

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Método da energia no espaço
de Fourier para equações de
evolução em \mathbb{R}^n com dissipação
fracionária

Maíra Fernandes Gauer

Orientador: Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz

Coorientador: Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão

Florianópolis

Fevereiro de 2013

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Método da energia no espaço de Fourier
para equações de evolução em \mathbb{R}^n com
dissipação fracionária

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em EDP.

Maíra Fernandes Gauer

Florianópolis

Fevereiro de 2013

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Gauer, Maíra Fernandes

Método da Energia no Espaço de Fourier para Equações de Evolução em R^n com dissipação fracionária / Maíra Fernandes Gauer ; orientador, Cleverton Roberto da Luz ; co-orientador, Ruy Coimbra Charão. - Florianópolis, SC, 2013. 147 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Inclui referências

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Método da Energia. 3. Equação Diferencial Parcial. 4. Espaço de Fourier. I. Luz, Cleverton Roberto da. II. Charão, Ruy Coimbra. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. IV. Título.

**Método da energia no espaço de Fourier
para equações de evolução em \mathbb{R}^n com
dissipação fracionária**

**por
Maíra Fernandes Gauer***

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de Mestre em
Matemática, Área de Concentração em Equações Diferenciais
Parciais, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação
em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. Daniel Gonçalves
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz
(Orientador - UFSC)

Prof. Dr. Gustavo Alberto Perla Menzala
(UFRJ e LNCC)

Prof. Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira
(UFSC)

Prof. Dr. Luciano Bedin
(UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2013.

*Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico -
CNPq

A Deus.

A minha família.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, que sempre me acompanhou no meu caminho e que se faz cada vez mais presente.

Aos meus pais, Tânia e Luiz Carlos, por todo o seu carinho e preocupação, e pelos momentos de torcida e oração para que eu obtivesse sucesso acadêmico.

À minha irmã Luciane, que sempre estava disposta a me ajudar, me receber em sua casa, e por ter sido um exemplo para mim.

Aos meus irmãos Jaque e Lucas, por alegrar meus momentos de férias em Tubarão.

Ao meu namorado Giuliano, pela paciência neste último ano, pela companhia, pelos momentos de lazer fora da matemática, que também foram necessários para chegar até aqui.

Aos colegas das salas 106 e 107, especialmente Gustavo, Sara e Jaque, pela companhia nos estudos, nos cafés, nas risadas e pela amizade que só aumenta.

Ao Prof. Cleverson, por ter aceitado ser meu orientador, por sua amizade, dedicação e paciência. E por ter sido mais perfeccionista que eu ao corrigir o trabalho.

Ao Prof. Ruy Charão, pela ajuda nos preparativos do trabalho, por sua amizade e pela alegria que sempre transborda.

Ao Prof. Bedin, por me acompanhar no primeiro ano de mestrado, por sempre me estimular e pela amizade.

Às amigas Mari, Lethi e Rafa, pelo apoio, pelas conversas e pela amizade.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro nesses dois anos.

Resumo

Neste trabalho estudamos o problema de Cauchy em \mathbb{R}^n para três equações com dissipação fracionária, a saber: equação da onda, sistema de ondas elásticas e equação de placas. Provamos existência e unicidade de soluções através da teoria de semigrupos. Utilizando o método da energia no espaço de Fourier com adequados multiplicadores, encontramos taxas explícitas de decaimento para a energia e para a solução de cada um dos problemas. Para o estudo do comportamento assintótico de soluções utilizamos ideias de Ikehata-Natsume [13].

Abstract

In this work, we study the Cauchy problem in \mathbb{R}^n for three equations with fractional damping, namely: the wave equation, the system of elastic waves and plates equation. We prove the existence and uniqueness of the solutions through the semigroups theory. Using the energy method in the Fourier space with adequate multipliers, we found explicit decay rates for energy and for solving each of the problems. To study the asymptotic behavior of solutions we use ideas from Ikehata-Natsume [13].

Sumário

Introdução	xiv
1 Pré-requisitos	7
1.1 Notações e Primeiros Conceitos	7
1.2 Distribuições	12
1.3 Espaços $L^p(\Omega)$	14
1.4 Espaço de Schwartz e Distribuições Temperadas	17
1.5 Transformada de Fourier	18
1.6 Espaços de Sobolev	22
1.7 Desigualdades importantes	25
1.8 Teorema da Divergência e Fórmulas de Green	29
1.9 Operadores elípticos	30
1.10 Teorema de Lax-Milgram	31
1.11 Semigrupos de operadores lineares	32
2 Equação da Onda com Dissipação Fracionária	37

2.1	Existência e unicidade de soluções	38
2.2	Taxas de Decaimento	49
3	Sistema de Ondas Elásticas com Dissipação Fracionária	68
3.1	Existência e unicidade de soluções	69
3.2	Taxas de Decaimento	80
4	Equação de Placas com Dissipação Fracionária	100
4.1	Existência e unicidade de soluções	101
4.2	Taxas de Decaimento	110
4.3	A escolha da função ρ	125
	Referências Bibliográficas	128

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é investigar propriedades assintóticas de equações de evolução em \mathbb{R}^n com dissipação fracionária usando o método da energia no espaço de Fourier. Esse método foi introduzido por Umeda-Kawashima-Shizuta [30], Ide-Haramoto-Kawashima [12] e Dharmawardane-Rivera-Kawashima [9]. Mais especificamente, queremos obter taxas explícitas de decaimento para a energia total e a norma L^2 da solução de três modelos lineares: equação da onda, sistema de ondas elásticas e equação de placas. A seguir daremos uma breve descrição dos modelos que serão estudados neste trabalho.

1. *Equação da onda em \mathbb{R}^n :*

$$u_{tt}(t, x) - \Delta u(t, x) + A^\theta u_t(t, x) = 0, \quad (t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

onde os dados iniciais satisfazem $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

2. Sistema de ondas elásticas em \mathbb{R}^n :

$$u_{tt}(t, x) - a^2 \Delta u(t, x) - (b^2 - a^2) \nabla \operatorname{div} u(t, x) + A^\theta u_t(t, x) = 0,$$

para $(t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, com dados iniciais

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

tais que $u_0 \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$, $u_1 \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n$. Os coeficientes $a > 0$ e $b > 0$ satisfazem $b^2 > a^2 > 0$ e estão relacionados com os coeficientes de Lamé λ e μ da teoria de elasticidade linear do seguinte modo: $b^2 = \lambda + 2\mu$ e $a^2 = \mu$.

No problema acima $u = (u^1, u^2, \dots, u^n)$ é uma função vetorial com n componentes e representa o deslocamento da onda no ponto x e no instante de tempo t . Assim, Δu significa $(\Delta u^1, \dots, \Delta u^n)$, $u_{tt} = (u_{tt}^1, \dots, u_{tt}^n)$ e ∇ e div são os operadores gradiente e divergente usuais, respectivamente.

3. Equação de placas em \mathbb{R}^n :

$$u_{tt}(t, x) + \Delta^2 u(t, x) + A^\theta u_t(t, x) = 0,$$

para $(t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, com dados iniciais

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

satisfazendo $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

O termo dissipativo $A^\theta u_t$ que aparece nas três equações acima será especificado a seguir. Denotando por \mathcal{F} a transformada de Fourier usual, definimos, para os Problemas 1 e 3, o operador

$$A^\theta : H^{2\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \quad (0 \leq \theta \leq 1)$$

$$A^\theta v(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2\theta} \mathcal{F}(v)(\xi))(x), \quad v \in H^{2\theta}(\mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

O operador A^θ é um operador não-negativo e auto-adjunto em L^2 .

E para o Problema 2, consideramos $A^\theta : (H^{2\theta}(\mathbb{R}^n))^n \subset (L^2(\mathbb{R}^n))^n \rightarrow (L^2(\mathbb{R}^n))^n$ ($0 \leq \theta \leq 1$) de forma que, em cada coordenada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos para $v = (v^1, \dots, v^n) \in H^{2\theta}(\mathbb{R}^n)$

$$A^\theta v_i(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2\theta} \mathcal{F}(v_i)(\xi))(x).$$

Notamos que quando $\theta = 0$ o termo dissipativo é u_t que representa uma dissipação friccional no sistema. Quando $\theta = 1$, o termo dissipativo é dado por $-\Delta u_t$ representando um forte amortecimento no sistema.

O Problema 1 tem sido estudado por vários autores. Para o caso $\theta = 0$ podemos citar Chill-Haraux [7] e Radu-Todorova-Yordanov [27]. Para o caso $\theta \in (0, 1)$ não há muitos resultados, principalmente quando se trata de domínios não-limitados. Já para o caso $\theta = 1$, podemos

citar Ikehata [14] e Shibata [28]. Em [15], Karch estudou a autosimilaridade assintótica em tempo grande de soluções para caso semilinear do Problema 1 com $\theta \in (0, 1/2)$.

Menzala-Ferreira [23] e Menzala-Luz [24] estudaram propriedades assintóticas para o sistema de ondas elásticas acoplado com ondas eletromagnéticas em domínio exterior com um potencial constante do tipo dissipativo. Charão-Ikehata [6] estudaram o sistema de ondas elásticas em um domínio exterior, com dissipação localizada perto do infinito. Mas, para provar o decaimento polinomial das soluções, eles impuseram uma hipótese extra sobre os coeficientes de Lamé do sistema: $b^2 < 4a^2$. Além disso, Kapitonov [16] e Charão [5] estudaram taxas de decaimento para a energia local relativa ao sistema linear de ondas elásticas não-dissipativo tridimensional.

Por outro lado, em relação às equações de placas semilineares, Luz-Charão [20] e Sugitani-Kawashima [29] encontraram várias estimativas de decaimento de soluções que incluem a energia total. Em [19], Liu-Kawashima estudaram a seguinte equação de placas semilinear com termo de memória:

$$u_{tt} + \Delta^2 u + u + g * \Delta u = f(u).$$

Eles provaram a existência global e estimativas de decaimento de soluções usando o método da energia no espaço de Fourier e o teorema da

contração. Uma situação mais geral foi considerada por Liu [18], que estudou a equação de placas acima com efeitos de inércia rotacional e um termo semilinear que inclui derivadas da função u .

Os resultados apresentados para o Problema 1 foram obtidos por Ikehata-Natsume (2012) [13] usando o método da energia no espaço de Fourier. Neste trabalho descrevemos com detalhes os resultados encontrados em [13] e utilizamos o mesmo método para os dois outros problemas: Sistema de ondas elásticas e equação de placas.

As taxas que obtemos para o Problema 2 ainda não tinham sido calculadas na bibliografia e portanto são resultados novos, embora se trate de uma generalização do Problema 1. De fato, basta observar que se considerarmos o problema em $(H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (L^2(\mathbb{R}^n))^n$ e os coeficientes $a, b > 0$ tais que $a = b = 1$, então o Problema 2 se resume a um problema do tipo 1 para uma equação vetorial de ondas não acoplada. Também as taxas que obtemos neste trabalho para o Problema 3 são resultados novos, que foram calculadas baseadas no mesmo método utilizado para os primeiros dois problemas.

Para encontrar taxas de decaimento para os Problemas 1 e 2, foi necessário realizar estimativas no espaço de Fourier separando em dois casos: $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$ e $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$. Para o Problema 3, a equação de placas, isso não foi necessário devido a estrutura não hiperbólica dessa equação.

As estimativas são obtidas para a região de alta frequência ($|\xi| \geq 1$) e baixa frequência ($|\xi| \leq 1$) separadamente. Na região de alta frequên-

cia provamos que a energia total e a norma L^2 da solução no espaço de Fourier decaem exponencialmente, enquanto que na baixa frequência elas decaem polinomialmente.

Dividimos este trabalho em quatro capítulos. No Capítulo 1 apresentamos algumas definições e resultados básicos para este trabalho sobre teoria de Distribuições, Espaços de Sobolev, Transformada de Fourier, Semigrupos e alguns teoremas de Análise que são úteis neste trabalho. No Capítulo 2 estudamos o Problema 1 sobre a equação da onda em \mathbb{R}^n com dissipação fracionária. Usamos a teoria de semigrupos para provar a existência e unicidade de soluções para o caso $0 < \theta \leq 1/2$. O caso $1/2 < \theta \leq 1$ é mais difícil e não será tratado neste trabalho, mas citamos como referência o trabalho de Carvalho-Cholewa [3]. Utilizamos o método da energia no espaço de Fourier para encontrarmos taxas de decaimento para a energia e a norma L^2 da solução. No Capítulo 3 fazemos o estudo do Problema 2 sobre o sistema de ondas elásticas em \mathbb{R}^n com dissipação fracionária. Como no Capítulo 2, há uma seção para a prova da existência e unicidade de soluções (caso $0 < \theta \leq 1/2$) e uma seção onde apresentamos as taxas de decaimento que foram obtidas junto com a demonstração das mesmas. Finalmente, estudamos o Problema 3 no Capítulo 4. Neste capítulo também provamos a existência e unicidade de soluções via teoria de semigrupos, nesse caso, para todo $0 < \theta \leq 1$, e também usamos o método da energia no espaço de Fourier para encontrar taxas de decaimento.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste capítulo apresentamos as principais definições e resultados que serão utilizados no decorrer deste trabalho. As demonstrações são omitidas por se tratarem de resultados conhecidos, mas citamos referências onde tais resultados, junto com suas demonstrações, podem ser encontrados.

Em todo este trabalho, o símbolo Ω representará um subconjunto aberto do espaço \mathbb{R}^n , que eventualmente poderá ser todo \mathbb{R}^n .

1.1 Notações e Primeiros Conceitos

1. \mathbb{K} indica o corpo \mathbb{R} ou \mathbb{C} .
2. $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ para $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

3. $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n.$

4. Se

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

é diferenciável, então o *gradiente* de f , que será denotado por ∇f , é definido como o vetor do \mathbb{R}^n dado por

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

5. Se

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

é um campo vetorial de classe C^1 , definimos o *divergente* de $F(x)$, denotado por $\operatorname{div}(F)$, como

$$\operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

onde ∇ é o operador definido como $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$

6. O *laplaciano* de uma função f é definido como

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

e é denotado por Δf .

Identidades úteis

Se f, g são funções escalares de classe C^1 , c é uma constante real e F e G são campos vetoriais também de classe C^1 , então as seguintes relações podem ser facilmente comprovadas.

1. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
2. $\nabla(cf) = c\nabla f$
3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
4. $\operatorname{div}(F + G) = \operatorname{div}(F) + \operatorname{div}(G)$
5. $\operatorname{div}(fF) = f\operatorname{div}(F) + \nabla f \cdot F$

O ponto \cdot indica o produto interno usual em \mathbb{R}^n .

Proposição 1.1 *Seja $u = u(t, x)$ com $t \in \mathbb{R}^+$ e $x \in \mathbb{R}^n$, uma função vetorial com n componentes. Se u é uma função de classe C^2 as seguintes identidades são verdadeiras:*

- a) $\operatorname{div}(u : \nabla u) = (u \cdot \Delta u) + |\nabla u|^2;$
- b) $\operatorname{div}(u_t : \nabla u) = (u_t \cdot \Delta u) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u|^2;$
- c) $\operatorname{div}(u \operatorname{div} u) = (\operatorname{div} u)^2 + (u \cdot \nabla \operatorname{div} u);$
- d) $\operatorname{div}(u_t \operatorname{div} u) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\operatorname{div} u)^2 + (u_t \cdot \nabla \operatorname{div} u),$

onde $u : \nabla v = \sum_{i=1}^n (u^i \nabla v^i)$, para u e v quaisquer.

Demonstração.

Sejam $u, v : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções de classe C^2 tais que $u(t, x) = (u^1(t, x), \dots, u^n(t, x))$ e $v(t, x) = (v^1(t, x), \dots, v^n(t, x))$. Então

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(v : \nabla u) &= \operatorname{div} \sum_{i=1}^n (v^i \nabla u^i) \\ &= \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(v^i \nabla u^i) \\ &= \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(v^i u_{x_1}^i, \dots, v^i u_{x_n}^i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (v^i u_{x_1}^i) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} (v^i u_{x_n}^i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (v^i (u_{x_1 x_1}^i + \dots + u_{x_n x_n}^i) + v_{x_1}^i u_{x_1}^i + \dots + v_{x_n}^i u_{x_n}^i) \\ &= \sum_{i=1}^n (v^i \Delta u^i + (\nabla v^i \cdot \nabla u^i)) \\ &= (v \cdot \Delta u) + \sum_{i=1}^n (\nabla v^i \cdot \nabla u^i). \end{aligned}$$

Considerando $v = u$ na igualdade acima tem-se que

$$\operatorname{div}(u : \nabla u) = (u \cdot \Delta u) + \sum_{i=1}^n (\nabla u^i \cdot \nabla u^i) = (u \cdot \Delta u) + |\nabla u|^2.$$

Por outro lado, tomando $v = u_t$ tem-se

$$\operatorname{div}(u_t : \nabla u) = (u_t \cdot \Delta u) + \sum_{i=1}^n (\nabla u_t^i \cdot \nabla u^i),$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(u_t : \nabla u) &= (u_t \cdot \Delta u) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u^i|^2 \\ &= (u_t \cdot \Delta u) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u|^2.\end{aligned}$$

As duas últimas igualdades provam os itens a) e b) do lema.

Para demonstrar os itens c) e d) vamos usar a identidade

$$\operatorname{div}(Ff) = f \operatorname{div}(F) + (F \cdot \nabla f),$$

onde f é uma função escalar e F é uma função vetorial.

Considerando $f = \operatorname{div} u$ e $F = u$ temos

$$\operatorname{div}(u \operatorname{div} u) = (\operatorname{div} u)^2 + (u \cdot \nabla \operatorname{div} u)$$

e se considerarmos $f = \operatorname{div} u$ e $F = u_t$ temos

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(u_t \operatorname{div} u) &= \operatorname{div} u \operatorname{div} u_t + (u_t \cdot \nabla \operatorname{div} u) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\operatorname{div} u)^2 + (u_t \cdot \nabla \operatorname{div} u).\end{aligned}$$

Assim, a proposição está demonstrada. ■

1.2 Distribuições

Neste trabalho as integrais realizadas sobre Ω são no sentido de Lebesgue, assim como a mensurabilidade das funções envolvidas.

Como referência para as seções 1.2 e 1.3 citamos Evans [10] e Medeiros-Rivera [21], [22].

Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ uma função mensurável e seja $(K_i)_{i \in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos K_i de Ω tais que $u = 0$ quase sempre em K_i . Considera-se o subconjunto aberto $K = \bigcup_{i \in I} K_i$. Então

$$u = 0 \quad \text{quase sempre em } K.$$

Como consequência, define-se o *suporte* de u , que será denotado por $\text{supp}(u)$, como sendo o subconjunto fechado de Ω

$$\text{supp}(u) = \Omega / K.$$

Definição 1.1 Representamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{K},$$

cujas derivadas parciais de todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um conjunto compacto de Ω . Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são chamados de funções testes.

Naturalmente, $C_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{K} com as operações usuais de soma de funções e de multiplicação por escalar.

Noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Definição 1.2 *Sejam $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.*

Dizemos que $\varphi_k \rightarrow \varphi$ se:

- i) $\exists K \subset \Omega$, K compacto, tal que $\text{supp}(\varphi_k) \subset K$, para todo $k \in \mathbb{N}$;
- ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi_k(x) \rightarrow D^\alpha \varphi(x)$ uniformemente em $x \in \Omega$.

Definição 1.3 *O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência definida acima é denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e é chamado de espaço das funções testes.*

Definição 1.4 *Uma distribuição sobre Ω é um funcional linear definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ e contínuo em relação a noção de convergência definida em $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Desse modo,

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}; T \text{ é linear e contínuo}\}.$$

Observamos que $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{K} .

Se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ denotaremos por $\langle T, \varphi \rangle$ o valor de T aplicado no elemento φ .

Noção de convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$

Definição 1.5 Dizemos que $T_k \rightarrow T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se

$$\langle T_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

1.3 Espaços $L^p(\Omega)$

Definição 1.6 Sejam Ω um conjunto mensurável e $1 \leq p \leq \infty$. Indicamos por $L^p(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ tais que $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ onde:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \text{se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty(\Omega)} &= \sup_{\text{ess } x \in \Omega} |f(x)| \\ &= \inf \{ C \in \mathbb{R}^+ / \text{med} \{ x \in \Omega / |f(x)| > C \} = 0 \} \\ &= \inf \{ C > 0 : |f(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega \}. \end{aligned}$$

Observação 1.1 As funções $\| \cdot \|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$, $1 \leq p \leq \infty$, são normas.

Na verdade $L^p(\Omega)$ deve ser entendido como um conjunto de classes de funções onde duas funções estão na mesma classe se elas são iguais quase sempre em Ω .

Os espaços $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, são espaços de Banach, sendo $L^2(\Omega)$ um espaço de Hilbert com o produto interno usual da integral. Além disso, para $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é reflexivo.

Teorema 1.1 $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$.

Teorema 1.2 (Interpolação dos espaços $L^p(\Omega)$) Sejam $1 \leq p < q \leq \infty$. Se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ então $f \in L^r(\Omega)$ para todo $r \in [p, q]$.

Além disso,

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha}$$

com $\alpha \in [0, 1]$ tal que $\frac{1}{r} = \alpha \frac{1}{p} + (1 - \alpha) \frac{1}{q}$.

Espaços $L_{loc}^p(\Omega)$

Definição 1.7 Sejam Ω um aberto do espaço \mathbb{R}^n e $1 \leq p < \infty$. Indicamos por $L_{loc}^p(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f\chi_K \in L^p(\Omega)$, para todo K compacto de Ω , onde χ_K é a função característica de K .

Observação 1.2 $L_{loc}^1(\Omega)$ é chamado o espaço das funções localmente integráveis.

Para $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ consideremos o funcional $T = T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$

definido por

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx.$$

É fácil verificar que T define uma distribuição sobre Ω .

Lema 1.1 (Du Bois Reymond) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se e somente se $u = 0$ quase sempre em Ω .*

A aplicação

$$\begin{aligned} L^1_{loc}(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ u &\longmapsto T_u \end{aligned}$$

é linear, contínua e injetiva (devido ao Lema 1.1). Em decorrência disso é comum identificar a distribuição T_u com a função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Nesse sentido tem-se que $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Como $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ temos que toda função de $L^p(\Omega)$ define uma distribuição sobre Ω , isto é, toda função de $L^p(\Omega)$ pode ser vista como uma distribuição.

Definição 1.8 *Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T , denotada por $D^\alpha T$, é definida por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com esta definição tem-se que se $u \in C^k(\Omega)$ então $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$, para todo $|\alpha| \leq k$, onde $D^\alpha u$ indica a derivada clássica de u . E, se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ então $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

1.4 Espaço de Schwartz e Distribuições Temperadas

Para esta seção citamos Medeiros-Rivera [21], [22]

Definição 1.9 *Uma função $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é dita rapidamente decrescente no infinito quando para cada $k \in \mathbb{N}$ tem-se*

$$p_k(\varphi) = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^k |D^\alpha \varphi(x)| < \infty,$$

onde $\alpha \in \mathbb{N}^n$, o que é equivalente a dizer

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} P(x) D^\alpha \varphi(x) = 0,$$

para todo polinômio P de n variáveis reais e $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Consideremos $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o espaço vetorial de todas as funções rapidamente decrescentes no infinito. Sobre esse espaço, temos o seguinte sistema de seminormas:

$$p_k(\varphi) = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^k |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Noção de convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Uma sequência $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge para φ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se $p_k(\varphi_n - \varphi)$ converge para zero em \mathbb{K} , para todo $k \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.2 *O espaço $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Proposição 1.3 *Tem-se que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

Definição 1.10 *Considere $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com a noção de convergência definida acima. Se $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{K}$ é linear e contínua, diz-se que T é uma distribuição temperada.*

O espaço vetorial de todas as distribuições temperadas com a convergência pontual será representado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

1.5 Transformada de Fourier

Os conceitos e resultados desta seção podem ser encontrados em Adams [1], Dautray-Lions [8] e Evans [10].

Definição 1.11 *Seja $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos sua transformada de Fourier como sendo a função $\mathcal{F}\varphi$ definida no \mathbb{R}^n por*

$$(\mathcal{F}\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \varphi(\xi) d\xi.$$

Observação 1.3 *Também denotaremos a transformada de Fourier de uma função φ por $\widehat{\varphi}$.*

Proposição 1.4 *Para $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, existe $C > 0$ tal que*

$$\|\widehat{u}\|_{L^\infty}^2 \leq C \|u\|_{L^1}^2.$$

Observação 1.4 A aplicação $\tilde{\mathcal{F}}$ dada por $(\tilde{\mathcal{F}}\varphi)(x) = (\mathcal{F}\varphi)(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, é denominada transformada de Fourier inversa de φ . Além disso, $\overline{\mathcal{F}\varphi} = \tilde{\mathcal{F}}\bar{\varphi}$, onde $\bar{\varphi}$ denota o complexo conjugado de φ .

Como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\mathcal{F}\varphi$ e $\tilde{\mathcal{F}}\varphi$ estão bem definidas para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, ambas são rapidamente decrescentes do infinito.

Proposição 1.5 As aplicações

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad e \quad \tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

são isomorfismos contínuos e $\mathcal{F}^{-1} = \tilde{\mathcal{F}}$.

Proposição 1.6 Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$a) \mathcal{F}(D^\alpha \varphi) = i^{|\alpha|} x^\alpha \mathcal{F}\varphi, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n;$$

$$b) D^\alpha(\mathcal{F}\varphi) = \mathcal{F}(-i^{|\alpha|} x^\alpha \varphi), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Definição 1.12 Seja T uma distribuição temperada. Definimos sua transformada de Fourier da seguinte forma

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

$$\langle \tilde{\mathcal{F}}T, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{\mathcal{F}}\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Observação 1.5 Da continuidade da transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que $\mathcal{F}T$ e $\tilde{\mathcal{F}}T$ são distribuições temperadas.

Proposição 1.7 *As aplicações*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad e \quad \tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

são isomorfismos contínuos e $\mathcal{F}^{-1} = \tilde{\mathcal{F}}$.

Para $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ definimos $\varphi_k = \varphi \chi_{B_k(0)}$, $k \in \mathbb{N}$, onde $\chi_{B_k(0)}$ é a função característica do conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq k\}$. Assim, $\mathcal{F}\varphi_k$ é dada por

$$(\mathcal{F}\varphi_k)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|\xi| \leq k} e^{-ix \cdot \xi} \varphi(\xi) d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

É possível provar que $\mathcal{F}\varphi_k \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e que $\{\mathcal{F}\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como este espaço é de Hilbert, esta sequência tem um limite, que denotamos por $\mathcal{F}\varphi$. Ainda observa-se que $\mathcal{F}\varphi$ e a transformada de Fourier de φ (vista como distribuição temperada) coincidem. Assim fica definida a transformada de Fourier no espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.3 (Teorema de Plancherel) *As aplicações*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \quad e \quad \tilde{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

são isomorfismos de espaços de Hilbert tais que

$$\langle \mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\psi \rangle_{L^2} = \langle \varphi, \psi \rangle_{L^2} = \langle \tilde{\mathcal{F}}\varphi, \tilde{\mathcal{F}}\psi \rangle_{L^2}$$

para todo par $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Corolário 1.1 Se $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então $\|\varphi\| = \|\mathcal{F}\varphi\|$.

Exemplos

1. $\mathcal{F}(\Delta\varphi)(x) = -|x|^2\mathcal{F}(\varphi)(x)$:

Da Proposição 1.6, $\mathcal{F}(D^\alpha\varphi) = i^{|\alpha|}x^\alpha\mathcal{F}\varphi$, logo para cada $j = 1, 2, \dots, n$ tem-se

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}\right)(x) = i^2x_j^2\mathcal{F}(\varphi)(x) = -x_j^2\mathcal{F}(\varphi)(x).$$

Assim, pela linearidade da transformada de Fourier temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\Delta\varphi)(x) &= \mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}\right)(x) = \sum_{j=1}^n \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}\right)(x) \\ &= \sum_{j=1}^n (-x_j^2\mathcal{F}(\varphi)(x)) = -|x|^2\mathcal{F}(\varphi)(x).\end{aligned}$$

2. $\mathcal{F}(\Delta^2\varphi)(x) = |x|^4\mathcal{F}(\varphi)(x)$:

Usando o Exemplo 1, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\Delta^2\varphi)(x) &= \mathcal{F}(\Delta(\Delta\varphi))(x) = -|x|^2\mathcal{F}(\Delta\varphi)(x) \\ &= -|x|^2(-|x|^2\mathcal{F}(\varphi)(x)) = |x|^4\mathcal{F}(\varphi)(x).\end{aligned}$$

3. $\mathcal{F}(\nabla\varphi)(x) = ix\mathcal{F}(\varphi)(x)$:

Também usando que $\mathcal{F}(D^\alpha \varphi) = i^{|\alpha|} x^\alpha \mathcal{F}\varphi$, temos

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)(x) = ix_j \mathcal{F}(\varphi)(x), \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\nabla \varphi)(x) &= \mathcal{F}\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)(x) \\ \vdots \\ \mathcal{F}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right)(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ix_1 \mathcal{F}(\varphi)(x) \\ \vdots \\ ix_n \mathcal{F}(\varphi)(x) \end{pmatrix} = ix \mathcal{F}(\varphi)(x). \end{aligned}$$

1.6 Espaços de Sobolev

Os principais resultados desta seção podem ser encontrados em Adams [1], Brezis [4], Kesavan [17] e Medeiros-Rivera [21], [22].

Definição 1.13 *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Indicaremos por $W^{m,p}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções u de $L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada distribucional de u . $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado de Espaço de Sobolev de ordem m relativo ao espaço $L^p(\Omega)$.*

Resumidamente,

$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tal que } D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \leq m\}.$

Norma em $W^{m,p}(\Omega)$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ tem-se que

$$\begin{aligned} \|u\|_{m,p} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |(D^\alpha u)(x)|^p dx \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

com $p \in [1, \infty)$, e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)},$$

com $p = \infty$, define uma norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$.

Observações:

1. $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ é um espaço de Banach.
2. Quando $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ torna-se um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$\langle u, v \rangle_{m,2} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad u, v \in W^{m,2}(\Omega).$$

3. Denota-se $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$.

4. $H^m(\Omega)$ é reflexivo e separável.

5. A norma usual em $H^2(\mathbb{R}^n)$ é equivalente à norma dada por

$$\|u\|_{H^2} = \|u\|^2 + \|\Delta u\|^2.$$

O Espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$

Definição 1.14 *Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.*

Observações:

1. Quando $p = 2$, escreve-se $H_0^m(\Omega)$ em lugar de $W_0^{m,p}(\Omega)$.
2. Se $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$, o complemento de Ω em \mathbb{R}^n possui medida de Lebesgue igual a zero.
3. Vale que $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

O Espaço $W^{-m,q}(\Omega)$

Definição 1.15 *Suponha $1 \leq p < \infty$ e $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$.*

O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ representa-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Imersões de Sobolev

Teorema 1.4 (Teorema de Sobolev) *Sejam $m \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$.*

- i) *Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$;*
- ii) *Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $q \in [p, \infty)$;*
- iii) *Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$*

sendo as imersões acima contínuas.

1.7 Desigualdades importantes

Desigualdade de Young

Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$ e $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Desigualdade de Hölder

Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ou $q = 1$ e $p = \infty$ ou $q = \infty$ e $p = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Desigualdade da Integral

Lema 1.2 *Sejam $\xi \in \mathbb{R}^n$, $k > -n$, $\beta > 0$ e $\alpha > 0$. Então existe $C = C(\alpha) > 0$ tal que*

$$\int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha|\xi|^\beta t} |\xi|^k d\xi \leq C(1+t)^{-\frac{n+k}{\beta}} \quad \forall t > 0. \quad (1.1)$$

Prova.

Notemos que

$$\begin{aligned} I(t) &:= \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha|\xi|^\beta t} |\xi|^k d\xi \\ &= \int_0^1 \int_{|\xi|=r} e^{-\alpha|\xi|^\beta t} |\xi|^k dS_\xi dr \\ &= \int_0^1 \int_{|\xi|=r} e^{-\alpha r^\beta t} r^k dS_\xi dr \\ &= \int_0^1 e^{-\alpha r^\beta t} r^k \left(\int_{|\xi|=r} dS_\xi \right) dr \\ &= \int_0^1 e^{-\alpha r^\beta t} r^k (w_n r^{n-1}) dr \\ &= w_n \int_0^1 e^{-\alpha r^\beta t} r^{k+n-1} dr \\ &= w_n \int_0^1 e^{-\alpha(t^{\frac{1}{\beta}} r)^\beta} r^{k+n-1} dr, \end{aligned}$$

onde $w_n > 0$ é uma constante que depende somente de n . Fazendo a substituição $s = t^{\frac{1}{\beta}} r$, temos

$$\begin{aligned}
I(t) &= w_n \int_0^{t^{\frac{1}{\beta}}} e^{-\alpha s^\beta} \left(\frac{s}{t^{\frac{1}{\beta}}} \right)^{k+n-1} \frac{1}{t^{\frac{1}{\beta}}} ds \\
&= w_n \int_0^{t^{\frac{1}{\beta}}} e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n-1} t^{-\frac{1}{\beta}(k+n)} ds \\
&= w_n t^{-\frac{k+n}{\beta}} \int_0^{t^{\frac{1}{\beta}}} e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n-1} ds \\
&\leq w_n t^{-\frac{k+n}{\beta}} \int_0^\infty e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n-1} ds. \tag{1.2}
\end{aligned}$$

Note que $\int_0^\infty e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n-1} ds < +\infty$ se $k+n > 0$. De fato, temos

$$\int_0^\infty e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n-1} ds = \int_0^\infty e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n+1} s^{-2} ds.$$

Como $\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n+1} = 0$, existe $s_0 > 0$ tal que se $s \geq s_0$ então $e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n+1} < 1$. Além disso, é claro que $e^{-\alpha s^\beta} \leq 1$ se $s \geq 0$.

Assim podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n+1} s^{-2} ds \\
&= \int_0^{s_0} e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n-1} ds + \int_{s_0}^\infty e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n+1} s^{-2} ds \\
&\leq \int_0^{s_0} s^{k+n-1} ds + \int_{s_0}^\infty s^{-2} ds.
\end{aligned}$$

Mas

$$\int_0^{s_0} s^{k+n-1} ds = \frac{s^{k+n}}{k+n} \Big|_0^{s_0} = \frac{s_0^{k+n}}{k+n}$$

e

$$\int_{s_0}^{\infty} s^{-2} ds = \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_{s_0}^z s^{-2} ds = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{z} + \frac{1}{s_0} \right] = \frac{1}{s_0}.$$

Logo

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n-1} ds \leq \int_0^{s_0} s^{k+n-1} ds + \int_{s_0}^{\infty} s^{-2} ds = \frac{s_0^{k+n}}{k+n} + \frac{1}{s_0} < +\infty.$$

Considerando a conclusão acima em (1.2), tem-se que

$$I(t) \leq Kt^{-\frac{k+n}{\beta}},$$

onde K é uma constante que depende de n, k, α e β .

Agora chamemos $\gamma = \frac{k+n}{\beta}$. Resta mostrar que $Kt^{-\gamma} \leq C(1+t)^{-\gamma}$, para todo $t > 0$.

Primeiramente consideremos $t \in (0, 1]$. Como I é uma função contínua em $[0, 1]$, existe $C_1 > 0$ tal que $I(t) \leq C_1, \forall t \in (0, 1]$. Tomemos $C_2 > 0$ tal que $C_1 2^\gamma \leq C_2$, daí

$$C_1(1+t)^\gamma \leq C_1 2^\gamma \leq C_2,$$

ou seja,

$$I(t) \leq C_1 \leq C_2(1+t)^{-\gamma}, \quad \forall t \in (0, 1].$$

Agora consideremos $t \geq 1$. Seja $C_3 > 0$ uma constante tal que $K \leq C_3 2^{-\gamma}$. Assim

$$I(t) \leq Kt^{-\gamma} \leq C_3 2^{-\gamma} t^{-\gamma} \leq C_3(1+t)^{-\gamma}, \quad \forall t \geq 1,$$

pois neste caso, $2t \geq 1+t$.

Tomando $C = \max\{C_2, C_3\}$, segue que

$$I(t) \leq C(1+t)^{-\frac{k+n}{\beta}}, \quad \forall t > 0.$$

■

1.8 Teorema da Divergência e Fórmulas de Green

Valem as seguintes fórmulas para um aberto limitado Ω com fronteira de classe C^2 :

i. Para $F \in (H^1(\Omega))^n$:

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} F)(x) \, dx = \int_{\Gamma} F(x) \cdot \eta(x) \, d\Gamma.$$

ii. Para $v \in H_0^1(\Omega)$, $u \in H^2(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} v(x) \Delta u(x) \, dx = - \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla u(x) \, dx.$$

iii. Para $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H_0^2(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} v(x)\Delta u(x) dx = \int_{\Omega} \Delta v(x)u(x) dx.$$

A função $\eta(x)$ denota a normal exterior unitária no ponto $x \in \partial\Omega$ e a função F integrada sobre $\partial\Omega$ é no sentido da função traço.

1.9 Operadores elípticos

Definição 1.16 *Um operador diferencial de ordem $2m$, $m \in \mathbb{N}$, da forma*

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} C_{\alpha}(x)D^{2\alpha}u, \quad x \in \Omega$$

é chamado de operador elíptico se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left| \sum_{|\alpha| \leq m} C_{\alpha}(x)\xi^{2\alpha} \right| \geq C|\xi|^{2m}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e para todo $x \in \Omega$.

Exemplos

Para $\theta \in [0, 1]$ tem-se que

1. $2I - \Delta + (-\Delta)^{\theta}$ é um operador elíptico de segunda ordem.
2. $-a^2\Delta - (b^2 - a^2)\nabla\text{div} + 2I + (-\Delta)^{\theta}$, com $0 < a^2 < b^2$, é um operador elíptico de segunda ordem.

3. $2I + \Delta^2 + (-\Delta)^\theta$ é um operador elíptico de quarta ordem.

Teorema 1.5 (Teorema de regularidade elíptica) *Sejam L um operador diferencial elíptico de ordem $2m$, $m \in \mathbb{N}$, definido em \mathbb{R}^n e $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Se u é solução de $Lu = f$, no sentido das distribuições, com $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então $u \in H^{2m}(\mathbb{R}^n)$.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em Agmon-Douglis-Nirenberg [2].

1.10 Teorema de Lax-Milgram

Definição 1.17 *Seja H um espaço de Hilbert real. Uma aplicação*

$$B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

é chamada de forma bilinear se $B(\cdot, y)$ é linear para cada $y \in H$ e $B(x, \cdot)$ é linear para cada $x \in H$.

B é chamada de limitada (contínua) se existe uma constante C tal que

$$|B(x, y)| \leq C \|x\|_H \|y\|_H, \quad \forall x, y \in H.$$

B é chamada coerciva se existe uma constante $\delta > 0$ tal que

$$B(x, x) \geq \delta \|x\|_H^2, \quad \forall x \in H.$$

Teorema 1.6 (Lax-Milgram) *Seja B uma forma bilinear, limitada e coerciva sobre um espaço de Hilbert H . Então para cada funcional linear contínuo F em H , existe um único $u \in H$ tal que*

$$B(x, u) = F(x), \quad \forall x \in H.$$

As definições e a demonstração do Teorema de Lax-Milgram podem ser encontradas em Brezis [4].

1.11 Semigrupos de operadores lineares

Para a teoria de semigrupos de operadores lineares citamos como referências Gomes [11], Brezis [4] e Pazy [25].

Definição 1.18 *Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X . Diz-se que uma aplicação*

$$S : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$$

é um semigrupo de operadores lineares limitados em X se:

I- $S(0) = I$, onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$;

II- $S(t + s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$.

Diz-se que o semigrupo S é de classe C_0 se

III- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(S(t) - I)x\|_X = 0$, $\forall x \in X$.

Proposição 1.8 *Todo semigrupo de classe C_0 é fortemente contínuo em \mathbb{R}^+ , isto é, se $t \in \mathbb{R}^+$ então*

$$\lim_{s \rightarrow t} S(s)x = S(t)x, \quad \forall x \in X.$$

Definição 1.19 *Se $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$, $\forall t \geq 0$, S é dito semigrupo de contrações de classe C_0 .*

Definição 1.20 *O operador $A : D(A) \rightarrow X$ definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X \ / \ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x \text{ existe} \right\}$$

e

$$A(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x, \quad \forall x \in D(A)$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo S .

Proposição 1.9 *O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 é um operador linear e fechado e seu domínio é um subespaço vetorial denso em X .*

Proposição 1.10 *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A o gerador infinitesimal de S . Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A)$, $\forall t \geq 0$, e*

$$\frac{d}{dt} S(t)x = A S(t)x = S(t)Ax.$$

Definição 1.21 *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador*

infinitesimal. Ponhamos $A^0 = I$, $A^1 = A$ e, supondo que A^{k-1} esteja definido, vamos definir A^k pondo

$$D(A^k) = \{x \mid x \in D(A^{k-1}) \text{ e } A^{k-1}x \in D(A)\}$$

$$A^k x = A(A^{k-1}x), \quad \forall x \in D(A^k).$$

Proposição 1.11 *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Então:*

I- $D(A^k)$ é um subespaço de X e A^k é um operador linear de X ;

II- Se $x \in D(A^k)$ então $S(t)x \in D(A^k)$, $t \geq 0$, e

$$\frac{d^k}{dt^k} S(t)x = A^k S(t)x = S(t)A^k x, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

III- $\bigcap_k D(A^k)$ é denso em X .

Lema 1.3 *Seja A um operador linear fechado de X . Pondo, para cada $x \in D(A^k)$,*

$$|x|_k = \sum_{j=0}^k \|A^j x\|_X \tag{1.3}$$

o funcional $|\cdot|_k$ é uma norma em $D(A^k)$ munido da qual $D(A^k)$ é um espaço de Banach.

Definição 1.22 *A norma (1.3) é dita norma do gráfico. O espaço de Banach que se obtém munindo $D(A^k)$ da norma (1.3) será representado por $[D(A^k)]$.*

Teorema Lumer-Phillips

Definição 1.23 *Seja X um espaço de Hilbert. Diz-se que o operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é dissipativo se*

$$\Re \langle Ax, x \rangle \leq 0, \quad \forall x \in D(A).$$

Teorema 1.7 (Lumer-Phillips) *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 então:*

- i- *A é dissipativo;*
- ii- *$\text{Im}(\lambda - A) = X, \quad \lambda > 0$ ($\text{Im}(\lambda - A) =$ imagem de $\lambda I - A$).*

Reciprocamente, se

- i- *$D(A)$ é denso em X ;*
- ii- *A é dissipativo;*
- iii- *$\text{Im}(\lambda_0 - A) = X$, para algum $\lambda_0 > 0$,*

então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 .

Proposição 1.12 *Se A é um gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 e B é um operador linear e limitado então $A + B$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 .*

Problema de Cauchy Abstrato

Seja X um espaço de Hilbert e A um operador linear de X . Considere o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt} &= AU(t) \\ U(0) &= U_0\end{aligned}\tag{1.4}$$

onde $U_0 \in X$ e $t \geq 0$.

Definição 1.24 *Uma função $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$, contínua para $t \geq 0$, continuamente diferenciável para $t > 0$, tal que $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$ e que satisfaz (1.4) é dita solução forte do problema (1.4).*

Teorema 1.8 *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo S de classe C_0 então, para cada $U_0 \in D(A)$, o problema (1.4) tem uma única solução forte*

$$U(t) = S(t)U_0 \in C(\mathbb{R}^+, D(A)).$$

Se $U_0 \in X$ então dizemos que

$$U(t) = S(t)U_0 \in C(\mathbb{R}^+, X).$$

é uma solução fraca para o problema (1.4).

Capítulo 2

Equação da Onda com Dissipação Fracionária

Neste capítulo estudaremos a existência e unicidade de soluções para a equação da onda com dissipação fracionária em \mathbb{R}^n . Também apresentaremos alguns resultados relacionados ao comportamento assintótico. Estes foram obtidos por Ikehata-Natsume [13].

O problema de Cauchy que será estudado neste capítulo é dado por

$$u_{tt}(t, x) - \Delta u(t, x) + A^\theta u_t(t, x) = 0, \quad (t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

onde os dados iniciais satisfazem

$$u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n), \quad u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

O operador

$$A^\theta : H^{2\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \quad (0 \leq \theta \leq 1)$$

é definido por

$$A^\theta v(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2\theta} \mathcal{F}(v)(\xi))(x), \quad v \in H^{2\theta}(\mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

onde \mathcal{F} denota a transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

2.1 Existência e unicidade de soluções

Usando a teoria de semigrupos, mostraremos a existência e unicidade de soluções para o problema (2.1)-(2.2), no caso $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$. Para o caso $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$, citamos Carvalho-Cholewa [3].

Tomando o produto interno em $L^2(\mathbb{R}^n)$ de (2.1) com u_t obtemos formalmente

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_{tt} u_t dx - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u u_t dx + \int_{\mathbb{R}^n} A^\theta u_t u_t dx = 0,$$

ou ainda, usando o Teorema de Plancherel,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla u_t dx + \int_{\mathbb{R}^n} |A^{\theta/2} u_t|^2 dx = 0,$$

o que implica

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |A^{\theta/2} u_t|^2 dx = 0.$$

Assim

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 \right) + \int_{\mathbb{R}^n} |A^{\theta/2} u_t|^2 dx = 0.$$

Portanto a energia total $E_u(t)$ associada a equação (2.1) é dada por

$$E_u(t) = \frac{1}{2} (\|u_t(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2). \quad (2.3)$$

Das identidades acima podemos observar que a energia $E_u(t)$ é uma função decrescente no tempo t , o que caracteriza o sistema como dissipativo. Além disso, para todo $\theta \in [0, 1]$, $A^{\theta} u_t$ é um termo dissipativo na equação (2.1).

No espaço de Hilbert

$$X = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$$

consideremos o produto interno definido por

$$\langle U, V \rangle_X = \int_{\mathbb{R}^n} u_1 \cdot v_1 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_2 \cdot v_2 \, dx$$

para todo $U = (u_1, u_2)$ e $V = (v_1, v_2)$ em X .

Fazendo a substituição $v = u_t$ na equação (2.1) temos $v_t - \Delta u + A^\theta v = 0$ e assim podemos escrever o sistema (2.1)-(2.2) na forma matricial como segue:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U(t) = \mathcal{A}U(t) + \mathcal{B}U(t) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

onde $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \in X$, $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in X$, o operador

$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$, é dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta - I & -A^\theta \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

com $D(\mathcal{A}) = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$ e o operador $\mathcal{B} : X \rightarrow X$ é dado por

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Observe que o operador \mathcal{A} definido acima está bem definido para

$\theta \in (0, \frac{1}{2}]$.

Nosso objetivo agora é mostrar que existe um único $U(t)$ que satisfaz o problema (2.4). Assim ficará provado que existe uma única função $u = u(t, x)$ que satisfaz o problema (2.1)-(2.2). Para isso vamos mostrar que $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 . Mas da teoria de semigrupos isso ocorre se \mathcal{B} é linear e limitado e \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 . Na sequência mostraremos estes resultados.

Lema 2.1 *O operador $\mathcal{B} : X \rightarrow X$ definido em (2.6) é um operador linear e limitado.*

Demonstração.

Dados $U = (u_1, u_2)$ e $V = (v_1, v_2)$ no espaço energia X , tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(U + V) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 + v_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{B}U + \mathcal{B}V, \end{aligned}$$

o que mostra que \mathcal{B} é linear.

Para mostrar que \mathcal{B} é limitado vamos estimar a norma de $\mathcal{B}U$ em $X = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$. Se $U = (u_1, u_2)$ então

$$\|\mathcal{B}U\|_X^2 = \|(0, u_1)\|_X^2 = \|u_1\|^2 \leq \|U\|_X^2.$$

Logo, $\|\mathcal{B}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$. ■

Para mostrar que \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 usaremos o Teorema de Lumer-Phillips, ou seja, vamos mostrar que \mathcal{A} é m -dissipativo e densamente definido.

Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^n)$ e

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset H^2(\mathbb{R}^n) \subset H^1(\mathbb{R}^n)$$

temos que $H^2(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^n)$. E ainda $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset H^1(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n).$$

Logo, $H^1(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Portanto, o domínio de \mathcal{A} é denso no espaço energia X .

Lema 2.2 *O operador \mathcal{A} definido em (2.5) é m -dissipativo.*

Demonstração.

Para que \mathcal{A} seja um operador m -dissipativo é suficiente mostrar que \mathcal{A} é dissipativo e que $Im(I - \mathcal{A}) = X$.

Seja $U = (u, v) \in D(\mathcal{A})$ então

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{A}U, U \rangle_X &= \left\langle \left(\begin{array}{c} v \\ \Delta u - u - A^\theta v \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right) \right\rangle_X \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} vu \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla v \cdot \nabla u \, dx \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u v \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} uv \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} A^\theta v v \, dx \\
 &= - \int_{\mathbb{R}^n} |A^{\theta/2} v|^2 \, dx \leq 0
 \end{aligned}$$

o que mostra que $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow X$ é dissipativo.

Resta provar que

$$Im(I - \mathcal{A}) = X.$$

É fácil ver que $Im(I - \mathcal{A}) \subset X$. De fato, dado $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in Im(I - \mathcal{A})$ então existe $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$(I - \mathcal{A}) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A}) \subset X$ e $\mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X$ temos $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in X$.

Portanto, $Im(I - \mathcal{A}) \subset X$.

A outra inclusão será dividida em etapas. Dado $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in X$ que-

remos encontrar $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$(I - \mathcal{A}) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Vamos definir a função

$$\alpha : H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\alpha(u, \varphi) = 2 \int_{\mathbb{R}^n} u \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} A^{\theta/2} u A^{\theta/2} \varphi \, dx.$$

Mostremos que a função α é bilinear, contínua e coerciva.

- Bilinearidade de α :

Dados $\varphi, \phi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} \alpha(u, \varphi + \lambda\phi) &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} u(\varphi + \lambda\phi) \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla(\varphi + \lambda\phi) \, dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} A^{\theta/2} u A^{\theta/2}(\varphi + \lambda\phi) \, dx, \end{aligned}$$

o que implica em

$$\begin{aligned}
\alpha(u, \varphi + \lambda\phi) &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi \, dx + 2\lambda \int_{\mathbb{R}^n} u\phi \, dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} A^{\theta/2} u A^{\theta/2} \varphi \, dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^n} A^{\theta/2} u A^{\theta/2} \phi \, dx \\
&= \alpha(u, \varphi) + \lambda \alpha(u, \phi),
\end{aligned}$$

pois os operadores ∇ e $A^{\theta/2}$ são lineares.

Analogamente, mostra-se que $\alpha(u + \lambda v, \varphi) = \alpha(u, \varphi) + \lambda \alpha(v, \varphi)$, para $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, a função α é bilinear.

- Continuidade de α :

Dados $u, \varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned}
|\alpha(u, \varphi)| &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} |u| |\varphi| \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u \cdot \nabla \varphi| \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |A^{\theta/2} u| |A^{\theta/2} \varphi| \, dx \\
&\leq 2 \|u\| \|\varphi\| + \|\nabla u\| \|\nabla \varphi\| + \|A^{\theta/2} u\| \|A^{\theta/2} \varphi\| \\
&\leq C \|u\|_{H^1} \|\varphi\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

- Coercividade de α :

Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\begin{aligned}
\alpha(u, u) &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} uu \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla u \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} A^{\theta/2} u A^{\theta/2} u \, dx \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |A^{\theta/2} u|^2 \, dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx \\
&= \|u\|_{H^1}^2.
\end{aligned}$$

Considere o funcional $L : H^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\langle L, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (f + g + A^\theta f) \varphi \, dx.$$

Vamos mostrar que L é linear e contínuo.

- Linearidade de L :

Dado φ e ϕ em $H^1(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
\langle L, (\varphi + \lambda\phi) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (f + g + A^\theta f)(\varphi + \lambda\phi) \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (f + g + A^\theta f)\varphi \, dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^n} (f + g + A^\theta f)\phi \, dx \\
&= \langle L, \varphi \rangle + \lambda \langle L, \phi \rangle.
\end{aligned}$$

- Continuidade de L :

Como $(f, g) \in X = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ segue que f, g e $A^\theta f$, com

$\theta \in (0, \frac{1}{2}]$, pertencem a $L^2(\mathbb{R}^n)$. Assim, dado $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned} |\langle L, \varphi \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f + g + A^\theta f) \varphi \, dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(f + g + A^\theta f) \varphi| \, dx \\ &\leq \|f + g + A^\theta f\| \|\varphi\| \\ &\leq \|f + g + A^\theta f\| \|\varphi\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema de Lax-Milgram existe $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\alpha(u, \varphi) = \langle L, \varphi \rangle \text{ para todo } \varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$$

assim,

$$2 \int_{\mathbb{R}^n} u \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} A^{\theta/2} u A^{\theta/2} \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f + g + A^\theta f) \varphi \, dx,$$

para todo $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

Em particular,

$$2 \int_{\mathbb{R}^n} u \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} A^{\theta/2} u A^{\theta/2} \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f + g + A^\theta f) \varphi \, dx,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Disso temos que

$$f + g + A^\theta f = 2u - \Delta u + A^\theta u$$

no sentido das distribuições, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Para $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, aplicando o Teorema da Regularidade Elíptica para o operador elíptico de segunda ordem

$$2I - \Delta + A^\theta$$

concluimos que $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$f + g + A^\theta f = 2u - \Delta u + A^\theta u \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Seja $v = u - f$. Então tem-se que $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e

$$\begin{aligned} g &= u + v - \Delta u + A^\theta u - A^\theta f \\ &= u + v - \Delta u + A^\theta v. \end{aligned}$$

Dessa forma, fica provado que $U = (u, v) \in D(\mathcal{A})$ e

$$(I - \mathcal{A})U = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Logo, $Im(I - \mathcal{A}) = X$ e o lema está provado. ■

Usando os Lemas 2.1 e 2.2, segue da teoria de semigrupos que $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 . Seja $S : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ o semigrupo gerado por $\mathcal{A} + \mathcal{B}$. Então $U(t) = S(t)U_0$ é a única

solução do problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} S(t)U_0 = (\mathcal{A} + \mathcal{B})S(t)U_0 \\ S(0)U_0 = U_0. \end{cases}$$

Logo, se $U_0 = (u_0, u_1) \in X = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$, temos

$$U(t) = (u(t), u_t(t)) \in C(\mathbb{R}^+, X)$$

e assim

$$u \in C(\mathbb{R}^+, H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^n))$$

é a única solução fraca da equação da onda (2.1)-(2.2). Além disso, se

$$U_0 = (u_0, u_1) \in D(\mathcal{A}) = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n),$$

$$u \in C(\mathbb{R}^+, H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, H^1(\mathbb{R}^n))$$

é única solução forte do mesmo sistema.

2.2 Taxas de Decaimento

Nosso objetivo nesta seção é encontrar taxas de decaimento para a energia total e para a solução do problema (2.1)-(2.2) quando $\theta \in (0, 1]$. Ambas serão encontradas através do método da energia no espaço de Fourier. Separaremos em dois casos: $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$ e $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$. Estudare-

mos com detalhes o primeiro caso. O segundo é uma analogia do primeiro. Primeiramente aplicaremos a transformada de Fourier na equação (2.1) e encontraremos a energia no espaço de Fourier. Utilizando o método dos multiplicadores, encontraremos taxas para a energia e para a solução no espaço de Fourier. Através do Teorema de Plancherel e da desigualdade da integral apresentada na Seção 1.7, encontraremos o resultado para o problema (2.1)-(2.2) no espaço da energia X . O resultado para a energia total do problema (2.1)-(2.2) é dado abaixo.

Teorema 2.1 *Seja $n \geq 1$. Se $(u_0, u_1) \in (H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)) \times (L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n))$, então as seguintes estimativas são válidas:*

(i) *Se $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$, então*

$$E_u(t) \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2(1-\theta)}} \|u_1\|_{L^1}^2 + C(1+t)^{-\frac{n+2}{2(1-\theta)}} \|u_0\|_{L^1}^2 \\ + Ce^{-\eta t} (\|u_1\|^2 + \|\nabla u_0\|^2), \quad \forall t \geq 0.$$

(ii) *Se $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$, então*

$$E_u(t) \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}} \|u_1\|_{L^1}^2 + C(1+t)^{-\frac{n+2}{2\theta}} \|u_0\|_{L^1}^2 \\ + Ce^{-\eta t} (\|u_1\|^2 + \|\nabla u_0\|^2), \quad \forall t \geq 0,$$

onde $C > 0$ e $\eta > 0$ são constantes, e $E_u(t)$ é a energia total definida em (2.3).

Para demonstrar este teorema, podemos considerar $(u_0, u_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, já que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^n)$ e em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Queremos trabalhar com a equação (2.1) no espaço de Fourier. Para isso, apliquemos a transformada de Fourier em ambos os lados de (2.1).

Assim

$$\mathcal{F}(u_{tt} - \Delta u + A^\theta u_t) = \mathcal{F}(0) = 0.$$

Para $v \in H^{2\theta}$ temos

$$\mathcal{F}(A^\theta v)(\xi) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2\theta} \mathcal{F}(v)(\xi))(x))(\xi) = |\xi|^{2\theta} \mathcal{F}(v)(\xi),$$

logo

$$\mathcal{F}(A^\theta u_t)(\xi) = |\xi|^{2\theta} \widehat{u}_t(\xi).$$

Além disso, do Exemplo 1 da Seção 1.5, temos

$$\mathcal{F}(-\Delta u)(\xi) = |\xi|^2 \widehat{u}(\xi).$$

Portanto, no espaço de Fourier \mathbb{R}^n o problema é escrito como:

$$\widehat{u}_{tt}(t, \xi) + |\xi|^2 \widehat{u}(t, \xi) + |\xi|^{2\theta} \widehat{u}_t(t, x) = 0, \quad (t, \xi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \quad (2.7)$$

$$\widehat{u}(0, \xi) = \widehat{u}_0(\xi), \quad \widehat{u}_t(0, \xi) = \widehat{u}_1(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.8)$$

Agora utilizaremos o método dos multiplicadores para encontrar as estimativas. Multiplicando a equação (2.7) por $\overline{\widehat{u}_t}$ e tomando a parte

real, temos

$$\Re(\widehat{u}_{tt}\widehat{u}_t + |\xi|^2\widehat{u}\widehat{u}_t + |\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2) = 0.$$

Mas para $v = v(t, \xi)$, temos

$$\frac{d}{dt}|\widehat{v}|^2 = \frac{d}{dt}(\widehat{v}\widehat{\bar{v}}) = \widehat{v}\widehat{\bar{v}}_t + \widehat{\bar{v}}_t\widehat{v} = \widehat{v}\widehat{\bar{v}}_t + \overline{\widehat{v}\widehat{\bar{v}}_t} = 2\Re(\widehat{v}\widehat{\bar{v}}_t).$$

Daí

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|\widehat{u}_t|^2 + |\xi|^2|\widehat{u}|^2) + |\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 = 0.$$

Consideremos

$$E_0(t, \xi) = \frac{1}{2}|\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^2|\widehat{u}|^2$$

a energia da equação (2.1) no espaço de Fourier.

Pelas identidades acima, podemos escrever

$$\frac{d}{dt}E_0(t) + |\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 = 0. \quad (2.9)$$

Multiplicando (2.7) por $\rho(\xi)\widehat{\bar{u}}$ (a função real ρ será escolhida posteriormente) e tomando a parte real, temos

$$\Re(\rho(\xi)\widehat{u}_{tt}\widehat{\bar{u}} + \rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + \rho(\xi)|\xi|^{2\theta}\widehat{u}_t\widehat{\bar{u}}) = 0,$$

ou ainda

$$\rho(\xi)\Re\left(\frac{d}{dt}\widehat{u}_t\widehat{\bar{u}}\right) - \rho(\xi)|\widehat{u}_t|^2 + \rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + \rho(\xi)|\xi|^{2\theta}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\widehat{u}|^2 = 0,$$

o que implica em

$$\frac{d}{dt}\left(\rho(\xi)\Re(\widehat{u}_t\widehat{\bar{u}}) + \frac{1}{2}\rho(\xi)|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2\right) + \rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 = \rho(\xi)|\widehat{u}_t|^2. \quad (2.10)$$

Somando (2.9) e (2.10), temos

$$\frac{d}{dt}E(t, \xi) + F(t, \xi) = R(t, \xi), \quad (2.11)$$

em que

$$E(t, \xi) = \frac{1}{2}|\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + \rho(\xi)\Re(\widehat{u}_t\widehat{\bar{u}}) + \frac{1}{2}\rho(\xi)|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2,$$

$$F(t, \xi) = |\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + \rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2$$

e

$$R(t, \xi) = \rho(\xi)|\widehat{u}_t|^2$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Antes de provar o item (i) do Teorema 2.1, vamos obter alguns resultados para $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$. Para isso, definimos a função auxiliar ρ :

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo

$$\rho(\xi) = \rho_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \varepsilon|\xi|^{2-2\theta}, & |\xi| \leq 1 \\ \varepsilon, & |\xi| \geq 1, \end{cases}$$

onde ε será escolhido posteriormente.

Na sequência provaremos dois lemas que relacionarão os funcionais R e F e os funcionais E e F , respectivamente.

Lema 2.3 *Para qualquer $\varepsilon > 0$, é válido que*

$$R(t, \xi) \leq \varepsilon F(t, \xi), \tag{2.12}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Demonstração.

No caso $0 \leq |\xi| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} R(t, \xi) &= \rho(\xi)|\widehat{u}_t|^2 \\ &= \varepsilon|\xi|^{2-2\theta}|\widehat{u}_t|^2 \\ &\leq \varepsilon|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 \\ &\leq \varepsilon(|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + \rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}_t|^2) \\ &= \varepsilon F(t, \xi), \end{aligned}$$

pois $|\xi|^{2-2\theta} \leq |\xi|^{2\theta}$ para $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$.

Para $|\xi| \geq 1$, temos

$$\begin{aligned}
 R(t, \xi) &= \varepsilon |\widehat{u}_t|^2 \\
 &\leq \varepsilon |\xi|^{2\theta} |\widehat{u}_t|^2 \\
 &\leq \varepsilon (|\xi|^{2\theta} |\widehat{u}_t|^2 + \rho(\xi) |\xi|^2 |\widehat{u}|^2) \\
 &= \varepsilon F(t, \xi).
 \end{aligned}$$

■

Segue do Lema 2.3 e da equação (2.11) que

$$\frac{d}{dt} E(t, \xi) + (1 - \varepsilon) F(t, \xi) \leq 0, \tag{2.13}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Lema 2.4 *Seja $0 < \theta \leq \frac{1}{2}$. Existe uma constante $N > 0$ tal que*

$$\rho(\xi) E(t, \xi) \leq N F(t, \xi),$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Demonstração.

Notemos que

$$\rho(\xi) E(t, \xi) = \frac{1}{2} \rho(\xi) |\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2} \rho(\xi) |\xi|^2 |\widehat{u}|^2 + \rho(\xi)^2 \Re(\widehat{u}_t \bar{\widehat{u}}) + \frac{1}{2} \rho(\xi)^2 |\xi|^{2\theta} |\widehat{u}|^2.$$

Para $|\xi| \geq 1$, temos

- $\frac{1}{2}\rho(\xi)|\widehat{u}_t|^2 = \frac{\varepsilon}{2}|\widehat{u}_t|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 = N_1|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2$;
- $\frac{1}{2}\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 = N_2\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2$;
- $\rho(\xi)^2\Re(\widehat{u}_t\overline{\widehat{u}}) \leq \varepsilon^2|\widehat{u}_t||\widehat{u}| \leq \frac{1}{2}|\widehat{u}_t|^2 + \frac{\varepsilon^4}{2}|\widehat{u}|^2$
 $\leq N_3|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + N_4\varepsilon|\xi|^2|\widehat{u}|^2$;
- $\frac{1}{2}\rho(\xi)^2|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 = \frac{\varepsilon^2}{2}|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 \leq N_5\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2$,

já que $1 \leq |\xi|^{2\theta}$ e $|\xi|^{2\theta} \leq |\xi|^2$, pois $|\xi| \geq 1$ e $2\theta \leq 2$.

Assim,

$$\begin{aligned} \rho(\xi)E(t, \xi) &\leq (N_1 + N_3)|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + (N_2 + N_4 + N_5)\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 \\ &\leq \overline{NF}(t, \xi). \end{aligned} \quad (2.14)$$

E para $|\xi| \leq 1$, temos

- $\frac{1}{2}\rho(\xi)|\widehat{u}_t|^2 = \frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{2-2\theta}|\widehat{u}_t|^2 \leq M_1|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2$;
- $\frac{1}{2}\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 = M_2\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2$;
- $\rho(\xi)^2\Re(\widehat{u}_t\overline{\widehat{u}}) \leq \varepsilon^2|\xi|^{4-4\theta}|\widehat{u}_t||\widehat{u}|$
 $\leq \frac{1}{2}|\xi|^{2-2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + \frac{\varepsilon^4}{2}|\xi|^{6-6\theta}|\widehat{u}|^2$
 $\leq M_3|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + M_4\rho(\xi)|\xi|^{4-4\theta}|\widehat{u}|^2$
 $\leq M_3|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + M_4\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2$;
- $\frac{1}{2}\rho(\xi)^2|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 = \frac{\varepsilon^2}{2}|\xi|^{4-4\theta}|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2$
 $= \frac{\varepsilon}{2}\rho(\xi)|\xi|^{2-2\theta}|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 = M_5\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2$,

pois $|\xi|^{2-2\theta} \leq |\xi|^{2\theta}$ e $|\xi|^{4-4\theta} \leq |\xi|^2$, visto que $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$ e $|\xi| \leq 1$.

Assim,

$$\begin{aligned} \rho(\xi)E(t, \xi) &\leq (M_1 + M_3)|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + (M_2 + M_4 + M_5)\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 \\ &\leq \overline{MF}(t, \xi). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Portanto, de (2.14) e (2.15), existe $N > 0$ tal que

$$\rho(\xi)E(t, \xi) \leq NF(t, \xi),$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$. ■

Do Lema 2.4 e de (2.13), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t, \xi) + (1 - \varepsilon)N^{-1}\rho(\xi)E(t, \xi) \\ \leq \frac{d}{dt}E(t, \xi) + (1 - \varepsilon)F(t, \xi) \leq 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

desde que $1 - \varepsilon > 0$. Seja $\alpha := (1 - \varepsilon)N^{-1}$. Multiplicando a desigualdade acima por $e^{\alpha\rho(\xi)t}$ temos

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\alpha\rho(\xi)t}E(t, \xi)\right) \leq 0,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Integrando de 0 a t ,

$$e^{\alpha\rho(\xi)t}E(t, \xi) \leq E(0, \xi)$$

e portanto

$$E(t, \xi) \leq e^{-\alpha\rho(\xi)t}E(0, \xi), \quad (2.17)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Na seqüência vamos mostrar que os funcionais E e E_0 são equivalentes, ou seja, vamos mostrar que existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que $C_1E_0(t, \xi) \leq E(t, \xi) \leq C_2E_0(t, \xi)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Para $|\xi| \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} \pm \rho(\xi)\Re(\widehat{u}_t\widetilde{u}) &\leq \rho(\xi)\frac{|\xi|^\theta}{|\xi|^\theta}|\widehat{u}_t||\widehat{u}| \\ &\leq \frac{1}{2}\rho(\xi)|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 + \frac{1}{2|\xi|^{2\theta}}\rho(\xi)|\widehat{u}_t|^2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Da definição de $E(t, \xi)$ e de (2.18) com sinal negativo, temos

$$\begin{aligned} E(t, \xi) &\geq \frac{1}{2}|\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^2|\widehat{u}|^2 - \frac{1}{2|\xi|^{2\theta}}\rho(\xi)|\widehat{u}_t|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\rho(\xi)}{|\xi|^{2\theta}}\right)|\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^2|\widehat{u}|^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

se $|\xi| \neq 0$. Notemos que, da definição de $\rho(\xi)$,

$$0 < |\xi| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho(\xi)}{|\xi|^{2\theta}} = \varepsilon|\xi|^{2-4\theta} \leq \varepsilon$$

pois $2 - 4\theta \geq 0$ e

$$|\xi| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho(\xi)}{|\xi|^{2\theta}} = \frac{\varepsilon}{|\xi|^{2\theta}} \leq \varepsilon.$$

Portanto

$$\frac{\rho(\xi)}{|\xi|^{2\theta}} \leq \varepsilon, \quad \forall |\xi| \neq 0. \quad (2.20)$$

Logo

$$1 - \frac{\rho(\xi)}{|\xi|^{2\theta}} \geq 1 - \varepsilon > 0, \quad \forall |\xi| \neq 0. \quad (2.21)$$

Portanto, de (2.19) e de (2.21), temos

$$\begin{aligned} E(t, \xi) &\geq \frac{(1 - \varepsilon)}{2} |\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2} |\xi|^2 |\widehat{u}|^2 \\ &\geq (1 - \varepsilon) \left(\frac{1}{2} |\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2} |\xi|^2 |\widehat{u}|^2 \right) \\ &= (1 - \varepsilon) E_0(t, \xi), \end{aligned}$$

ou seja,

$$E(t, \xi) \geq (1 - \varepsilon) E_0(t, \xi), \quad (2.22)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$, pois $E(t, 0) = E_0(t, 0)$.

Assim, de (2.22) e de (2.17), temos

$$E_0(t, \xi) \leq (1 - \varepsilon)^{-1} E(t, \xi) \leq (1 - \varepsilon)^{-1} e^{-\alpha\rho(\xi)t} E(0, \xi), \quad (2.23)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Por outro lado, de (2.18) com sinal positivo temos, para $|\xi| \neq 0$:

$$E(t, \xi) \leq \frac{1}{2} |\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2} |\xi|^2 |\widehat{u}|^2 + \rho(\xi) |\xi|^{2\theta} |\widehat{u}|^2 + \frac{1}{2|\xi|^{2\theta}} \rho(\xi) |\widehat{u}_t|^2. \quad (2.24)$$

Note que se $0 < \theta \leq \frac{1}{2}$, então

$$|\xi| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \rho(\xi) |\xi|^{2\theta} = \varepsilon |\xi|^{2-2\theta} |\xi|^{2\theta} = \varepsilon |\xi|^2$$

e

$$|\xi| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \rho(\xi) |\xi|^{2\theta} = \varepsilon |\xi|^{2\theta} \leq \varepsilon |\xi|^2.$$

Portanto

$$\rho(\xi) |\xi|^{2\theta} \leq \varepsilon |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.25)$$

De (2.20), (2.25) e (2.24) temos, para $|\xi| \neq 0$:

$$E(t, \xi) \leq \frac{1}{2} (1 + \varepsilon) |\widehat{u}_t|^2 + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) |\xi|^2 |\widehat{u}|^2 \leq C E_0(t, \xi) \quad (2.26)$$

com $C > 0$ dependendo somente de ε . Mas é claro que (2.26) vale para $|\xi| = 0$. Assim, das desigualdades (2.23) e (2.26) com $t = 0$, segue que

$$\begin{aligned} E_0(t, \xi) &\leq (1 - \varepsilon)^{-1} e^{-\alpha\rho(\xi)t} E(0, \xi) \\ &\leq C (1 - \varepsilon)^{-1} e^{-\alpha\rho(\xi)t} E_0(0, \xi) \end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Portanto o seguinte lema está provado.

Lema 2.5 *Seja $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$. Então existem constantes $C = C(\varepsilon) > 0$ e $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ tais que*

$$E_0(t, \xi) \leq C e^{-\alpha \rho(\xi)t} E_0(0, \xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ e } t \geq 0,$$

desde que ε seja suficientemente pequeno.

Demonstração do item (i) do Teorema 2.1:

Vamos agora encontrar as estimativas para a energia total do problema (2.1)-(2.2) para o caso $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$.

Do Teorema de Plancherel,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi, \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n). \quad (2.27)$$

Note que para cada $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} u\right) = i\xi_j \mathcal{F}(u).$$

Logo

$$|\mathcal{F}(\nabla u)|^2 = |\xi|^2 |\widehat{u}|^2.$$

Daí, de (2.27) e do Lema 2.5 segue que

$$\begin{aligned}
2E_u(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (|\widehat{u}_t|^2 + |\xi|^2 |\widehat{u}|^2) d\xi \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^n} E_0(t, \xi) d\xi \\
&\leq 2C \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha\rho(\xi)t} E_0(0, \xi) d\xi \\
&= C \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha\rho(\xi)t} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^2 |\widehat{u}_0|^2) d\xi \\
&= C \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha\rho(\xi)t} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^2 |\widehat{u}_0|^2) d\xi \\
&\quad + C \int_{|\xi| \geq 1} e^{-\alpha\rho(\xi)t} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^2 |\widehat{u}_0|^2) d\xi.
\end{aligned}$$

Chamando

$$I_1 = \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha\rho(\xi)t} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^2 |\widehat{u}_0|^2) d\xi$$

e

$$I_2 = \int_{|\xi| \geq 1} e^{-\alpha\rho(\xi)t} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^2 |\widehat{u}_0|^2) d\xi,$$

temos

$$2E_u(t) = \int_{\mathbb{R}^n} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dx \leq C(I_1 + I_2), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.28)$$

Para provar o item (i) do Teorema 2.1 resta estimar as integrais I_1 e I_2 . Notemos que

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{|\xi| \geq 1} e^{-\alpha\rho(\xi)t} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^2 |\widehat{u}_0|^2) d\xi \\
 &= e^{-\alpha\varepsilon t} \int_{|\xi| \geq 1} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^2 |\widehat{u}_0|^2) d\xi \\
 &\leq e^{-\alpha\varepsilon t} \int_{\mathbb{R}^n} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^2 |\widehat{u}_0|^2) d\xi \\
 &= e^{-\alpha\varepsilon t} \int_{\mathbb{R}^n} (|u_1|^2 + |\nabla u_0|^2) dx \\
 &= 2e^{-\eta t} E_u(0),
 \end{aligned}$$

onde $\eta = \alpha\varepsilon$. Ou seja,

$$I_2 \leq 2e^{-\eta t} E_u(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.29)$$

Por outro lado

$$I_1 = \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha\varepsilon|\xi|^{2-2\theta}t} |\widehat{u}_1|^2 d\xi + \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha\varepsilon|\xi|^{2-2\theta}t} |\xi|^2 |\widehat{u}_0|^2 d\xi. \quad (2.30)$$

Mas

$$\begin{aligned}
 \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha\varepsilon|\xi|^{2-2\theta}t} |\widehat{u}_1|^2 d\xi &\leq \|\widehat{u}_1\|_{L^\infty}^2 \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha\varepsilon|\xi|^{2-2\theta}t} d\xi \\
 &\leq C \|u_1\|_{L^1}^2 \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha\varepsilon|\xi|^{2-2\theta}t} d\xi \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha \varepsilon |\xi|^{2-2\theta} t} |\xi|^2 |\widehat{u}_0|^2 d\xi &\leq \|\widehat{u}_0\|_{L^\infty}^2 \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha \varepsilon |\xi|^{2-2\theta} t} |\xi|^2 d\xi \\ &\leq C \|u_0\|_{L^1}^2 \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha \varepsilon |\xi|^{2-2\theta} t} |\xi|^2 d\xi. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Logo, de (2.30), (2.31) e (2.32), temos

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \|u_1\|_{L^1}^2 \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha \varepsilon |\xi|^{2-2\theta} t} d\xi \\ &\quad + C \|u_0\|_{L^1}^2 \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha \varepsilon |\xi|^{2-2\theta} t} |\xi|^2 d\xi, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Aplicando o Lema 1.2 para $\beta = 2 - 2\theta$, $k = 0$ e $k = 2$, segue que

$$I_1 \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2(1-\theta)}} \|u_1\|_{L^1}^2 + C(1+t)^{-\frac{n+2}{2(1-\theta)}} \|u_0\|_{L^1}^2, \quad (2.34)$$

para todo $t \geq 0$.

Portanto, de (2.28), (2.29) e (2.34), temos

$$\begin{aligned} E_u(t) &\leq C(1+t)^{-\frac{n}{2(1-\theta)}} \|u_1\|_{L^1}^2 + C(1+t)^{-\frac{n+2}{2(1-\theta)}} \|u_0\|_{L^1}^2 \\ &\quad + C e^{-\eta t} (\|u_1\|^2 + \|\nabla u_0\|^2), \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$ e $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$, o que prova o item (i) do Teorema 2.1.

Para provar (ii), basta fazer uma modificação na definição de ρ , considerando

$$\rho(\xi) = \rho_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \varepsilon|\xi|^{2\theta}, & |\xi| \leq 1 \\ \varepsilon, & |\xi| \geq 1. \end{cases}$$

No próximo teorema encontraremos taxas de decaimento para a solução do problema (2.1)-(2.2) para $n \geq 3$.

Teorema 2.2 *Seja $n \geq 3$. Se $(u_0, u_1) \in (H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)) \times (L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n))$, então as seguintes estimativas são válidas:*

(i) *Se $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$, então*

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 &\leq C(1+t)^{-\frac{n-2}{2(1-\theta)}} \|u_1\|_{L^1}^2 + C(1+t)^{-\frac{n}{2(1-\theta)}} \|u_0\|_{L^1}^2 \\ &\quad + Ce^{-\eta t} (\|u_0\|^2 + \|u_1\|^2), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

(ii) *Se $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$, então*

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 &\leq C(1+t)^{-\frac{n-2}{2\theta}} \|u_1\|_{L^1}^2 + C(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}} \|u_0\|_{L^1}^2 \\ &\quad + Ce^{-\eta t} (\|u_0\|^2 + \|u_1\|^2), \quad \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

onde $C > 0$ e $\eta > 0$ são constantes.

Demonstração.

Da mesma forma como feito na demonstração do Teorema 2.1, provaremos somente o item (i). A prova do item (ii) é análoga.

Do Lema 2.5 segue, para todo $|\xi| \neq 0$ e $t \geq 0$, que

$$|\widehat{u}|^2 \leq C e^{-\alpha\rho(\xi)t} \left(\frac{|\widehat{u}_1|^2}{|\xi|^2} + |\widehat{u}_0|^2 \right). \quad (2.35)$$

Integrando em $|\xi| \geq 1$, temos $\frac{|\widehat{u}_1|^2}{|\xi|^2} \leq |\widehat{u}_1|^2$ e assim

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi &\leq C e^{-\alpha\epsilon t} \left(\int_{|\xi| \geq 1} |\widehat{u}_1|^2 d\xi + \int_{|\xi| \geq 1} |\widehat{u}_0|^2 d\xi \right) \\ &\leq C e^{-\eta t} (\|\widehat{u}_1\|^2 + \|\widehat{u}_0\|^2) \\ &= C e^{-\eta t} (\|u_1\|^2 + \|u_0\|^2), \end{aligned} \quad (2.36)$$

para todo $t \geq 0$, com $\eta = \alpha\epsilon$.

Agora, integrando em $\delta \leq |\xi| \leq 1$ com δ pequeno, temos

$$\begin{aligned} \int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi &\leq C \int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} e^{-\eta|\xi|^{2-2\theta}t} \frac{|\widehat{u}_1|^2}{|\xi|^2} d\xi \\ &\quad + C \int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} e^{-\eta|\xi|^{2-2\theta}t} |\widehat{u}_0|^2 d\xi \\ &\leq C \|\widehat{u}_1\|_{L^\infty}^2 \int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} e^{-\eta|\xi|^{2-2\theta}t} |\xi|^{-2} d\xi \\ &\quad + C \|\widehat{u}_0\|_{L^\infty}^2 \int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} e^{-\eta|\xi|^{2-2\theta}t} d\xi \\ &\leq C_1 \|u_1\|_{L^1}^2 \int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} e^{-\eta|\xi|^{2-2\theta}t} |\xi|^{-2} d\xi \\ &\quad + C_1 \|u_0\|_{L^1}^2 \int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} e^{-\eta|\xi|^{2-2\theta}t} d\xi, \end{aligned} \quad (2.37)$$

para todo $t \geq 0$.

Do Lema 1.2, se $\beta = 2 - 2\theta$ e $n + k > 0$, existe $C > 0$ tal que

$$\int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} e^{-\eta|\xi|^{2-2\theta}} t |\xi|^k d\xi \leq C(1+t)^{-\frac{n+k}{2(1-\theta)}}, \quad \forall t > 0. \quad (2.38)$$

Agora, se $n \geq 3$, (2.38) é válida em particular para $k = 0$ e $k = -2$.

E assim (2.37) e (2.38) implicam em

$$\int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq C(1+t)^{-\frac{n-2}{2(1-\theta)}} \|u_1\|_{L^1}^2 + C(1+t)^{-\frac{n}{2(1-\theta)}} \|u_0\|_{L^1}^2,$$

para todo $t \geq 0$.

Fazendo $\delta \rightarrow 0$, temos

$$\int_{|\xi| \leq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq C(1+t)^{-\frac{n-2}{2(1-\theta)}} \|u_1\|_{L^1}^2 + C(1+t)^{-\frac{n}{2(1-\theta)}} \|u_0\|_{L^1}^2, \quad (2.39)$$

para todo $t \geq 0$.

Portanto, somando as equações (2.36) e (2.39) e usando o Teorema de Plancherel segue que

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 &= \|\widehat{u}(\xi)\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C(1+t)^{-\frac{n-2}{2(1-\theta)}} \|u_1\|_{L^1}^2 + C(1+t)^{-\frac{n}{2(1-\theta)}} \|u_0\|_{L^1}^2 \\ &\quad + C e^{-\eta t} (\|u_1\|^2 + \|u_0\|^2), \quad \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

o que prova o item (i) do teorema. ■

Capítulo 3

Sistema de Ondas

Elásticas com Dissipação

Fracionária

Neste capítulo, estudaremos o sistema linear de ondas elásticas em \mathbb{R}^n , a saber:

$$u_{tt}(t, x) - a^2 \Delta u(t, x) - (b^2 - a^2) \nabla \operatorname{div} u(t, x) + A^\theta u_t(t, x) = 0, \quad (3.1)$$

para $(t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, com dados iniciais

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.2)$$

tais que

$$u_0 \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n, \quad u_1 \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n.$$

Os coeficientes $a > 0$ e $b > 0$ satisfazem $0 < a^2 < b^2$.

No problema acima $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ é uma função vetorial com n componentes e representa o deslocamento da onda no ponto x e no instante de tempo t .

O operador $A^\theta : (H^{2\theta}(\mathbb{R}^n))^n \subset (L^2(\mathbb{R}^n))^n \rightarrow (L^2(\mathbb{R}^n))^n$ ($0 \leq \theta \leq 1$) é definido de forma que, em cada coordenada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos

$$A^\theta v_i(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2\theta} \mathcal{F}(v_i)(\xi))(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

para todo $v = (v_1, \dots, v_n) \in (H^{2\theta}(\mathbb{R}^n))^n$.

3.1 Existência e unicidade de soluções

Usando a teoria de semigrupos, mostremos a existência e unicidade de soluções do sistema linear (3.1)-(3.2) quando $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$.

Observemos que tomando o produto interno em $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$ de (3.1) com u_t obtemos formalmente que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u_{tt} \cdot u_t dx - a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \cdot u_t dx - (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla \operatorname{div} u) \cdot u_t dx \\ + \int_{\mathbb{R}^n} A^\theta u_t \cdot u_t dx = 0. \end{aligned}$$

Usando as identidades da Proposição 1.1

$$\operatorname{div}(u_t \operatorname{div} u) = \nabla \operatorname{div} u \cdot u_t + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\operatorname{div} u)^2,$$

$$\operatorname{div}(u_t \cdot \nabla u) = u_t \cdot \Delta u + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u|^2,$$

e o Teorema de Plancherel, segue que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 dx - a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(u_t \cdot \nabla u) dx + \frac{a^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \\ & - (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(u_t \operatorname{div} u) dx + \frac{b^2 - a^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{div} u)^2 dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^n} |A^{\theta/2} u_t|^2 dx = 0. \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Divergência, concluímos que

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} (\|u_t\|^2 + a^2 \|\nabla u\|^2 + (b^2 - a^2) \|\operatorname{div} u\|^2) + \int_{\mathbb{R}^n} |A^{\theta/2} u_t|^2 dx = 0.$$

A energia total $E_u(t)$ associada a equação (3.1) é, portanto, dada por

$$E_u(t) = \frac{1}{2} \|u_t(t)\|^2 + \frac{a^2}{2} \|\nabla u(t)\|^2 + \frac{b^2 - a^2}{2} \|\operatorname{div} u(t)\|^2. \quad (3.3)$$

Das identidades acima podemos observar que a energia $E_u(t)$ é uma função decrescente no tempo t . Assim o sistema (3.1)-(3.2) é dissipativo e a dissipação é dada pelo termo $A^\theta u_t$.

No espaço de Hilbert

$$X = (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (L^2(\mathbb{R}^n))^n$$

consideremos o produto interno definido por

$$\begin{aligned} \langle U, V \rangle_X &= \int_{\mathbb{R}^n} u_1 \cdot v_1 \, dx + a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \nabla u_1^i \cdot \nabla v_1^i \, dx \\ &\quad + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u_1 \operatorname{div} v_1 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_2 \cdot v_2 \, dx \end{aligned}$$

para todo $U = (u_1, u_2)$ e $V = (v_1, v_2)$ em X .

Fazendo a substituição $v = u_t$, a equação (3.1) fica

$$v_t(t, x) - a^2 \Delta u(t, x) - (b^2 - a^2) \nabla \operatorname{div} u(t, x) + A^\theta v(t, x) = 0.$$

Daí, escrevemos o sistema (3.1)-(3.2) na forma matricial como segue:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U(t) = \mathcal{A}U(t) + \mathcal{B}U(t) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

onde $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \in X$, $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in X$, o operador

$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$, é dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ a^2 \Delta + (b^2 - a^2) \nabla \operatorname{div} - I & -A^\theta \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

com $D(\mathcal{A}) = (H^2(\mathbb{R}^n))^n \times (H^1(\mathbb{R}^n))^n$ e o operador $\mathcal{B} : X \rightarrow X$ é dado por

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Note que o operador \mathcal{A} está bem definido quando $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$.

Queremos mostrar que existe um único $U(t)$ que satisfaz o problema (3.4) e que, conseqüentemente, existe uma única função $u = u(t, x)$ que satisfaz o sistema (3.1)-(3.2). Para isso vamos mostrar que $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 . No Lema 3.1 provaremos que \mathcal{B} é um operador linear e limitado e no Lema 3.2 vamos mostrar que \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 . Dessa forma segue pela teoria de semigrupos que $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ gera um semigrupo de classe C_0 .

Lema 3.1 *O operador $\mathcal{B} : X \rightarrow X$ definido em (3.6) é um operador linear e limitado.*

A demonstração é análoga à prova do Lema 2.1.

Para mostrar que \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 vamos usar o Teorema de Lumer-Phillips, ou seja, mostraremos

mos que \mathcal{A} é m -dissipativo e densamente definido.

Como $(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^n$ é denso em $(H^1(\mathbb{R}^n))^n$ e

$$(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^n \subset (H^2(\mathbb{R}^n))^n \subset (H^1(\mathbb{R}^n))^n$$

temos que $(H^2(\mathbb{R}^n))^n$ é denso em $(H^1(\mathbb{R}^n))^n$. E ainda $(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^n$ é denso em $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$ e

$$(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^n \subset (H^1(\mathbb{R}^n))^n \subset (L^2(\mathbb{R}^n))^n.$$

Logo, $(H^1(\mathbb{R}^n))^n$ é denso em $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$.

Portanto, o domínio de \mathcal{A} , $D(\mathcal{A})$, é denso no espaço energia X .

Lema 3.2 *O operador \mathcal{A} definido em (3.5) é m -dissipativo.*

Demonstração.

Vamos mostrar inicialmente que \mathcal{A} é dissipativo. Se $U = (u, v) \in D(\mathcal{A})$ então

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_X &= \left\langle \begin{pmatrix} v \\ a^2 \Delta u + (b^2 - a^2) \nabla \operatorname{div} u - u - A^\theta v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_X \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} v \cdot u \, dx + a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \nabla v^i \cdot \nabla u^i \, dx + a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \cdot v \, dx \\ &\quad + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} v \operatorname{div} u \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot v \, dx \\ &\quad + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \operatorname{div} u \cdot v \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} A^\theta v \cdot v \, dx. \end{aligned}$$

Usando a Proposição 1.1, o Teorema da Divergência e a identidade

$$\operatorname{div}(v \operatorname{div} u) = \nabla \operatorname{div} u \cdot v + \operatorname{div} v \operatorname{div} u,$$

temos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_X &= a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \nabla v^i \cdot \nabla u^i \, dx + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} v \operatorname{div} u \, dx \\ &+ a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(v : \nabla u) \, dx - a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \nabla v^i \cdot \nabla u^i \, dx \\ &+ (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(v \operatorname{div} u) \, dx \\ &- (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} v \operatorname{div} u \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} |A^{\theta/2} v|^2 \, dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} |A^{\theta/2} v|^2 \, dx \leq 0. \end{aligned}$$

Isso mostra que $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow X$ é dissipativo.

Para provar que \mathcal{A} é m-dissipativo vamos mostrar que

$$\operatorname{Im}(I - \mathcal{A}) = X.$$

A inclusão $\operatorname{Im}(I - \mathcal{A}) \subset X$ é análoga ao caso provado no Capítulo 2.

A outra inclusão será dividida em etapas. Dado $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in X$ que-

remos encontrar $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$(I - \mathcal{A}) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Vamos definir a função

$$\alpha : (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (H^1(\mathbb{R}^n))^n \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\begin{aligned} \alpha(u, \varphi) &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \varphi \, dx + a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \nabla u^i \cdot \nabla \varphi^i \, dx \\ &\quad + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u \operatorname{div} \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} A^{\theta/2} u \cdot A^{\theta/2} \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Na sequência vamos mostrar que a função α é bilinear, contínua e coerciva.

- Bilinearidade de α :

Dado φ e ϕ em $(H^1(\mathbb{R}^n))^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
\alpha(u, \varphi + \lambda\phi) &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot (\varphi + \lambda\phi) \, dx \\
&\quad + a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \nabla u^i \cdot \nabla(\varphi^i + \lambda\phi^i) \, dx \\
&\quad + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u \operatorname{div}(\varphi + \lambda\phi) \, dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} A^{\theta/2} u \cdot A^{\theta/2}(\varphi + \lambda\phi) \, dx \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \varphi \, dx + 2\lambda \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \phi \, dx \\
&\quad + a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \nabla u^i \cdot \nabla \varphi^i \, dx \\
&\quad + \lambda a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \nabla u^i \cdot \nabla \phi^i \, dx \\
&\quad + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u \operatorname{div} \varphi \, dx \\
&\quad + \lambda(b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u \operatorname{div} \phi \, dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} A^{\theta/2} u \cdot A^{\theta/2} \varphi \, dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^n} A^{\theta/2} u \cdot A^{\theta/2} \phi \, dx \\
&= \alpha(u, \varphi) + \lambda \alpha(u, \phi)
\end{aligned}$$

pois, os operadores ∇ , div e $A^{\theta/2}$ são lineares.

Analogamente, temos a linearidade em relação a primeira componente. Assim, a função α é bilinear.

- Continuidade de α :

Dados u e φ em $(H^1(\mathbb{R}^n))^n$ temos

$$\begin{aligned}
 |\alpha(u, \varphi)| &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} |u| |\varphi| dx + a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{i=1}^n \nabla u^i \cdot \nabla \varphi^i \right| dx \\
 &\quad + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} |\operatorname{div} u| |\operatorname{div} \varphi| dx + \int_{\mathbb{R}^n} |A^{\theta/2} u| |A^{\theta/2} \varphi| dx \\
 &\leq 2 \|u\| \|\varphi\| + a^2 \sum_{i=1}^n \|\nabla u^i\| \|\nabla \varphi^i\| \\
 &\quad + (b^2 - a^2) \|\operatorname{div} u\| \|\operatorname{div} \varphi\| + \|A^{\theta/2} u\| \|A^{\theta/2} \varphi\| \\
 &\leq C \|u\|_{(H^1)^n} \|\varphi\|_{(H^1)^n}.
 \end{aligned}$$

- Coercividade de α :

Seja $u \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$, então

$$\begin{aligned}
 \alpha(u, u) &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot u dx + a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \nabla u^i \cdot \nabla u^i dx \\
 &\quad + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u \operatorname{div} u dx + \int_{\mathbb{R}^n} A^{\theta/2} u \cdot A^{\theta/2} u dx \\
 &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx + a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n |\nabla u^i|^2 dx \\
 &\quad + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{div} u)^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |A^{\theta/2} u|^2 dx \\
 &\geq \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx + a^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \\
 &\quad + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{div} u)^2 dx \\
 &= \|u\|_{(H^1)^n}^2.
 \end{aligned}$$

Considere o funcional $L : (H^1(\mathbb{R}^n))^n \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\langle L, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (f + g + A^\theta f) \varphi \, dx.$$

Com argumentos análogos aos utilizados no Capítulo 2, mostra-se que L é linear e contínuo.

Portanto, pelo Teorema de Lax-Milgram existe $u \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$ tal que

$$\alpha(u, \varphi) = \langle L, \varphi \rangle \quad \text{para todo } \varphi \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$$

assim,

$$\begin{aligned} 2 \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \varphi \, dx + a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \nabla u^i \cdot \nabla \varphi^i \, dx + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u \operatorname{div} \varphi \, dx \\ + \int_{\mathbb{R}^n} A^{\theta/2} u \cdot A^{\theta/2} \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f + g + A^\theta f) \cdot \varphi \, dx \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$.

Em particular

$$\begin{aligned} 2 \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \varphi \, dx + a^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \nabla u^i \cdot \nabla \varphi^i \, dx + (b^2 - a^2) \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u \operatorname{div} \varphi \, dx \\ + \int_{\mathbb{R}^n} A^{\theta/2} u \cdot A^{\theta/2} \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f + g + A^\theta f) \cdot \varphi \, dx \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^n))^n$.

Disso temos que

$$f + g + A^\theta f = -a^2 \Delta u - (b^2 - a^2) \nabla \operatorname{div} u + 2u + A^\theta u$$

no sentido distribucional.

Como $f \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$ e $g \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n$, aplicando o Teorema da Regularidade Elíptica para o operador elíptico de segunda ordem

$$-a^2\Delta - (b^2 - a^2)\nabla\operatorname{div} + 2I + A^\theta$$

concluimos que $u \in (H^2(\mathbb{R}^n))^n$ e

$$f + g + A^\theta f = -a^2\Delta u - (b^2 - a^2)\nabla\operatorname{div} u + 2u + A^\theta u \quad \text{em } (L^2(\mathbb{R}^n))^n.$$

Seja $v = u - f$. Então tem-se que $v \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n$ e

$$g = -a^2\Delta u - (b^2 - a^2)\nabla\operatorname{div} u + u + v + A^\theta v.$$

Dessa forma, provamos que $U = (u, v) \in D(\mathcal{A})$ e

$$(I - \mathcal{A})U = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Logo, $\operatorname{Im}(I - \mathcal{A}) = X$ e o lema está provado. ■

Dos Lemas 3.1 e 3.2, concluimos que $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 . Seja

$$S : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$$

o semigrupo gerado por $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ então $U(t) = S(t)U_0$ é a única solução do problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} S(t)U_0 = (\mathcal{A} + \mathcal{B})S(t)U_0 \\ S(0)U_0 = U_0. \end{cases}$$

Então, se $U_0 = (u_0, u_1) \in X = (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (L^2(\mathbb{R}^n))^n$, temos

$$U(t) = (u(t), u_t(t)) \in C(\mathbb{R}^+, X).$$

Logo

$$u \in C(\mathbb{R}^+, (H^1(\mathbb{R}^n))^n) \cap C^1(\mathbb{R}^+, (L^2(\mathbb{R}^n))^n)$$

é a única solução fraca do sistema de ondas elásticas (3.1)-(3.2). Além disso, se $U_0 = (u_0, u_1) \in D(\mathcal{A}) = (H^2(\mathbb{R}^n))^n \times (H^1(\mathbb{R}^n))^n$,

$$u \in C(\mathbb{R}^+, (H^2(\mathbb{R}^n))^n) \cap C^1(\mathbb{R}^+, (H^1(\mathbb{R}^n))^n)$$

é única solução forte do mesmo sistema.

3.2 Taxas de Decaimento

Nesta seção, usando o método da energia no espaço de Fourier descrito no capítulo anterior, vamos obter taxas de decaimento para a energia total e para a solução do sistema (3.1)-(3.2). Novamente separaremos em dois casos: $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$ e $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$. Desta vez estudaremos com detalhes o segundo caso.

Teorema 3.1 *Seja $n \geq 1$. Se $(u_0, u_1) \in ((H^1(\mathbb{R}^n))^n \cap (L^1(\mathbb{R}^n))^n) \times ((L^2(\mathbb{R}^n))^n \cap (L^1(\mathbb{R}^n))^n)$, então as seguintes estimativas são válidas:*

(i) *Se $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$, então*

$$E_u(t) \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2(1-\theta)}} \|u_1\|_{(L^1)^n}^2 + C(1+t)^{-\frac{n+2}{2(1-\theta)}} \|u_0\|_{(L^1)^n}^2 + Ce^{-\eta t} (\|u_1\|^2 + \|\nabla u_0\|^2), \quad \forall t \geq 0.$$

(ii) *Se $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$, então*

$$E_u(t) \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}} \|u_1\|_{(L^1)^n}^2 + C(1+t)^{-\frac{n+2}{2\theta}} \|u_0\|_{(L^1)^n}^2 + Ce^{-\eta t} (\|u_1\|^2 + \|\nabla u_0\|^2), \quad \forall t \geq 0$$

onde $C > 0$ e $\eta > 0$ são constantes, e $E_u(t)$ é a energia total do sistema (3.1)-(3.2) definida em (3.3).

Assim como no Teorema 2.1, podemos considerar $(u_0, u_1) \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^n \times (C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^n$, já que $(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^n$ é denso em $(H^1(\mathbb{R}^n))^n$ e em $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$.

Vamos escrever o problema no espaço de Fourier. Para tanto, apliquemos a transformada de Fourier em ambos os lados de (3.1). Temos

$$\mathcal{F}(u_{tt} - a^2 \Delta u - (b^2 - a^2) \nabla \operatorname{div} u + A^\theta u_t) = \mathcal{F}(0) = 0.$$

Sabemos que para $v = (v_1, \dots, v_n) \in (H^{2\theta}(\mathbb{R}^n))^n$ é válido que

$$\mathcal{F}(A^\theta v_i)(\xi) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2\theta} \mathcal{F}(v_i)(\xi))(x))(\xi) = |\xi|^{2\theta} \mathcal{F}(v_i)(\xi),$$

logo

$$\mathcal{F}(-\Delta u)_i(\xi) = \mathcal{F}(Au)_i(\xi) = |\xi|^2 \widehat{u}_i(\xi)$$

e

$$\mathcal{F}(A^\theta u_t)_i(\xi) = |\xi|^{2\theta} (\widehat{u}_t)_i(\xi).$$

Dessa forma,

$$\mathcal{F}(-\Delta u)(\xi) = |\xi|^2 \widehat{u}(\xi)$$

e

$$\mathcal{F}(A^\theta u_t)(\xi) = |\xi|^{2\theta} \widehat{u}_t(\xi).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} u\right)(\xi) &= i\xi_i \mathcal{F}(\operatorname{div} u)(\xi) \\ &= i\xi_i \mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)(\xi) = i\xi_i \left(\sum_{j=1}^n i\xi_j \widehat{u}_j\right)(\xi) \\ &= -\xi_i (\xi \cdot \widehat{u}(\xi)), \end{aligned}$$

assim,

$$\mathcal{F}(\nabla \operatorname{div} u)(\xi) = -(\xi \cdot \widehat{u}(\xi))\xi.$$

Portanto, no espaço de Fourier do problema (3.1)-(3.2) é escrito como abaixo, para $(t, \xi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$:

$$\widehat{u}_{tt}(t, \xi) + a^2|\xi|^2\widehat{u}(t, \xi) + (b^2 - a^2)(\xi \cdot \widehat{u}(t, \xi))\xi + |\xi|^{2\theta}\widehat{u}_t(t, \xi) = 0, \quad (3.7)$$

$$\widehat{u}(0, \xi) = \widehat{u}_0(\xi), \quad \widehat{u}_t(0, \xi) = \widehat{u}_1(\xi). \quad (3.8)$$

Agora escolheremos multiplicadores adequados para encontrar as estimativas. Fazendo o produto escalar da equação (3.7) por $\overline{\widehat{u}_t}$ e tomando a parte real, temos

$$\Re(\widehat{u}_{tt} \cdot \overline{\widehat{u}_t} + a^2|\xi|^2\widehat{u} \cdot \overline{\widehat{u}_t} + (b^2 - a^2)(\xi \cdot \widehat{u})(\xi \cdot \overline{\widehat{u}_t}) + |\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2) = 0.$$

Mas para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\frac{d}{dt}|\widehat{v}_i|^2 = \frac{d}{dt}(\widehat{v}_i\overline{\widehat{v}_i}) = \widehat{v}_i\overline{\widehat{v}_{it}} + \widehat{v}_{it}\overline{\widehat{v}_i} = \widehat{v}_i\overline{\widehat{v}_{it}} + \overline{\widehat{v}_i\widehat{v}_{it}} = 2\Re(\widehat{v}_i\overline{\widehat{v}_{it}})$$

e assim

$$2\Re(\widehat{v}_t \cdot \overline{\widehat{v}}) = 2 \sum_{i=1}^n \Re(\widehat{v}_i\overline{\widehat{v}_{it}}) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n |\widehat{v}_i|^2 = \frac{d}{dt}|\widehat{v}|^2.$$

Daí

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\widehat{u}_t|^2 + a^2|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + (b^2 - a^2)|\xi \cdot \widehat{u}|^2) + |\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 = 0.$$

Seja

$$E_0(t, \xi) = \frac{1}{2}|\widehat{u}_t|^2 + \frac{a^2}{2}|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + \frac{b^2 - a^2}{2}|\xi \cdot \widehat{u}|^2$$

a energia da equação (3.1) no espaço de Fourier.

Pelas igualdades anteriores, podemos escrever

$$\frac{d}{dt}E_0(t) + |\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 = 0. \quad (3.9)$$

Agora, multiplicando (3.7) por $\rho(\xi)\overline{\widehat{u}}$ ($\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ será escolhida posteriormente) e tomando a parte real, temos

$$\Re(\rho(\xi)\widehat{u}_{tt} \cdot \overline{\widehat{u}} + a^2\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + (b^2 - a^2)\rho(\xi)(\xi \cdot \widehat{u})(\xi \cdot \overline{\widehat{u}}) + \rho(\xi)|\xi|^{2\theta}\widehat{u}_t \cdot \overline{\widehat{u}}) = 0.$$

Podemos reescrever a igualdade anterior da forma

$$\begin{aligned} & \rho(\xi) \left(\Re \left(\frac{d}{dt} \widehat{u}_t \cdot \overline{\widehat{u}} \right) - |\widehat{u}_t|^2 \right) + a^2\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 \\ & + (b^2 - a^2)\rho(\xi)|\xi \cdot \widehat{u}|^2 + \rho(\xi)|\xi|^{2\theta} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\widehat{u}|^2 = 0 \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\rho(\xi) \Re \left(\widehat{u}_t \cdot \overline{\widehat{u}} \right) + \frac{1}{2} \rho(\xi) |\xi|^{2\theta} |\widehat{u}|^2 \right) + a^2\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 \\ & + (b^2 - a^2)\rho(\xi)|\xi \cdot \widehat{u}|^2 = \rho(\xi)|\widehat{u}_t|^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Somando (3.9) e (3.10), temos

$$\frac{d}{dt}E(t, \xi) + F(t, \xi) = R(t, \xi), \quad (3.11)$$

onde

$$E(t, \xi) = \frac{1}{2}|\widehat{u}_t|^2 + \frac{a^2}{2}|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + \frac{b^2 - a^2}{2}|\xi \cdot \widehat{u}|^2 + \rho(\xi)\Re(\widehat{u}_t \cdot \widehat{\bar{u}}) + \frac{1}{2}\rho(\xi)|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2,$$

$$F(t, \xi) = |\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + a^2\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + (b^2 - a^2)\rho(\xi)|\xi \cdot \widehat{u}|^2$$

e

$$R(t, \xi) = \rho(\xi)|\widehat{u}_t|^2$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Antes de provar o item (ii) do Teorema 3.1, vamos obter alguns resultados para o caso $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$. Primeiramente escolhemos a função auxiliar $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo

$$\rho(\xi) = \rho_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \varepsilon|\xi|^{2\theta}, & |\xi| \leq 1 \\ \varepsilon, & |\xi| \geq 1, \end{cases}$$

onde ε será escolhido posteriormente.

Em seguida demonstraremos dois lemas, um dará uma relação entre os funcionais R e F e o outro, entre os funcionais F e E .

Lema 3.3 Para qualquer $\varepsilon > 0$, é válido que

$$R(t, \xi) \leq \varepsilon F(t, \xi), \quad (3.12)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Demonstração.

No caso $|\xi| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} R(t, \xi) &= \rho(\xi) |\widehat{u}_t|^2 \\ &= \varepsilon |\xi|^{2\theta} |\widehat{u}_t|^2 \\ &\leq \varepsilon (|\xi|^{2\theta} |\widehat{u}_t|^2 + a^2 \rho(\xi) |\xi|^2 |\widehat{u}|^2 + (b^2 - a^2) \rho(\xi) |\xi \cdot \widehat{u}|^2) \\ &= \varepsilon F(t, \xi). \end{aligned}$$

Para $|\xi| \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} R(t, \xi) &= \varepsilon |\widehat{u}_t|^2 \\ &\leq \varepsilon |\xi|^{2\theta} |\widehat{u}_t|^2 \\ &\leq \varepsilon (|\xi|^{2\theta} |\widehat{u}_t|^2 + a^2 \rho(\xi) |\xi|^2 |\widehat{u}|^2 + (b^2 - a^2) \rho(\xi) |\xi \cdot \widehat{u}|^2) \\ &= \varepsilon F(t, \xi). \end{aligned}$$

■

Do Lema 3.3 e da equação (3.11) concluímos que

$$\frac{d}{dt}E(t, \xi) + (1 - \varepsilon)F(t, \xi) \leq 0, \quad (3.13)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ e $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Lema 3.4 *Seja $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$. Existe uma constante $N > 0$ tal que*

$$\rho(\xi)E(t, \xi) \leq NF(t, \xi),$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Demonstração.

Da definição de $E = E(t, \xi)$ segue que

$$\begin{aligned} \rho(\xi)E(t, \xi) &= \frac{1}{2}\rho(\xi)|\widehat{u}_t|^2 + \frac{a^2}{2}\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + \frac{b^2 - a^2}{2}\rho(\xi)|\xi \cdot \widehat{u}|^2 \\ &\quad + \rho(\xi)^2\Re(\widehat{u}_t \cdot \overline{\widehat{u}}) + \frac{1}{2}\rho(\xi)^2|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2. \end{aligned}$$

Para $|\xi| \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} \rho(\xi)E(t, \xi) &\leq \frac{\varepsilon}{2}|\widehat{u}_t|^2 + \frac{a^2}{2}\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + \frac{b^2 - a^2}{2}\rho(\xi)|\xi \cdot \widehat{u}|^2 \\ &\quad + \varepsilon^2|\widehat{u}_t||\widehat{u}| + \frac{\varepsilon}{2}\rho(\xi)|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 \\ &\leq N_1|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + N_2a^2\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + N_3(b^2 - a^2)\rho(\xi)|\xi \cdot \widehat{u}|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}|\widehat{u}_t|^2 + \frac{\varepsilon^4}{2}|\widehat{u}|^2 + N_4a^2\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\rho(\xi)E(t, \xi) &\leq N_1|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + N_2a^2\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + N_3(b^2 - a^2)\rho(\xi)|\xi \cdot \widehat{u}|^2 \\
&\quad + N_5|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + N_6a^2\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + N_4a^2\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 \\
&\leq \overline{N}(|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + a^2\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + (b^2 - a^2)\rho(\xi)|\xi \cdot \widehat{u}|^2) \\
&= \overline{N}F(t, \xi). \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Nas estimativas acima usamos as desigualdades $1 \leq |\xi|^{2\theta}$ e $|\xi|^{2\theta} \leq |\xi|^2$, que são válidas pois $|\xi| \geq 1$ e $0 \leq 2\theta \leq 2$.

E para $|\xi| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
\rho(\xi)E(t, \xi) &\leq \frac{\varepsilon|\xi|^{2\theta}}{2}|\widehat{u}_t|^2 + M_1a^2\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + M_2(b^2 - a^2)\rho(\xi)|\xi \cdot \widehat{u}|^2 \\
&\quad + \varepsilon^2|\xi|^{4\theta}|\widehat{u}_t||\widehat{u}| + \frac{1}{2}\varepsilon^2|\xi|^{4\theta}|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 \\
&\leq M_3|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + M_1a^2\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + M_2(b^2 - a^2)\rho(\xi)|\xi \cdot \widehat{u}|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + \frac{\varepsilon^4}{2}|\xi|^{6\theta}|\widehat{u}|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\rho(\xi)|\xi|^{4\theta}|\widehat{u}|^2 \\
&\leq M_3|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + M_1a^2\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + M_2(b^2 - a^2)\rho(\xi)|\xi \cdot \widehat{u}|^2 \\
&\quad + M_4|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + M_5a^2\rho(\xi)|\xi|^{4\theta}|\widehat{u}|^2 + M_6a^2\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 \\
&\leq M_3|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + M_1a^2\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + M_2(b^2 - a^2)\rho(\xi)|\xi \cdot \widehat{u}|^2 \\
&\quad + M_4|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + M_5a^2\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + M_6a^2\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 \\
&\leq \overline{M}(|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + a^2\rho(\xi)|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + (b^2 - a^2)\rho(\xi)|\xi \cdot \widehat{u}|^2) \\
&= \overline{M}F(t, \xi), \tag{3.16}
\end{aligned}$$

pois $|\xi|^{4\theta} \leq |\xi|^2$, que segue de $2 \leq 4\theta$ e $|\xi| \leq 1$.

Portanto, de (3.15) e (3.16), existe $N > 0$ tal que

$$\rho(\xi)E(t, \xi) \leq NF(t, \xi),$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$. ■

Do Lema 3.4 e de (3.13) temos, escolhendo ε tal que $1 - \varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t, \xi) + (1 - \varepsilon)N^{-1}\rho(\xi)E(t, \xi) \\ \leq \frac{d}{dt}E(t, \xi) + (1 - \varepsilon)F(t, \xi) \leq 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Denotemos $\alpha := (1 - \varepsilon)N^{-1}$. Multipliquemos a desigualdade acima por $e^{\alpha\rho(\xi)t}$. Assim

$$\frac{d}{dt} \left(e^{\alpha\rho(\xi)t} E(t, \xi) \right) \leq 0,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Integrando de 0 a t ,

$$e^{\alpha\rho(\xi)t} E(t, \xi) \leq E(0, \xi)$$

e, conseqüentemente,

$$E(t, \xi) \leq e^{-\alpha\rho(\xi)t} E(0, \xi), \quad (3.18)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Para obtermos uma estimativa semelhante a (3.18) para a energia total no espaço de Fourier, vamos provar o seguinte resultado.

Lema 3.5 *Os funcionais E e E_0 são equivalentes, ou seja, existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que*

$$C_1 E_0(t, \xi) \leq E(t, \xi) \leq C_2 E_0(t, \xi)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Demonstração.

Seja $|\xi| \neq 0$. Notemos que

$$\pm \rho(\xi) \Re(\widehat{u}_t \cdot \bar{\widehat{u}}) \leq \rho(\xi) \frac{|\xi|^\theta}{|\xi|^{2\theta}} |\widehat{u}_t| |\widehat{u}| \leq \frac{1}{2} \rho(\xi) |\xi|^{2\theta} |\widehat{u}|^2 + \frac{\rho(\xi)}{2|\xi|^{2\theta}} |\widehat{u}_t|^2. \quad (3.19)$$

Da definição de $E(t, \xi)$ e de (3.19) com sinal negativo, temos

$$\begin{aligned} E(t, \xi) &\geq \frac{1}{2} |\widehat{u}_t|^2 + \frac{a^2}{2} |\xi|^2 |\widehat{u}|^2 + \frac{b^2 - a^2}{2} |\xi \cdot \widehat{u}|^2 - \frac{\rho(\xi)}{2|\xi|^{2\theta}} |\widehat{u}_t|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho(\xi)}{|\xi|^{2\theta}} \right) |\widehat{u}_t|^2 + \frac{a^2}{2} |\xi|^2 |\widehat{u}|^2 + \frac{b^2 - a^2}{2} |\xi \cdot \widehat{u}|^2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

se $|\xi| \neq 0$.

Mas, da definição de $\rho(\xi)$, temos

$$0 < |\xi| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho(\xi)}{|\xi|^{2\theta}} = \varepsilon \leq \varepsilon$$

e

$$|\xi| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho(\xi)}{|\xi|^{2\theta}} = \frac{\varepsilon}{|\xi|^{2\theta}} \leq \varepsilon.$$

Portanto

$$\frac{\rho(\xi)}{|\xi|^{2\theta}} \leq \varepsilon, \quad \forall |\xi| \neq 0. \quad (3.21)$$

Logo

$$1 - \frac{\rho(\xi)}{|\xi|^{2\theta}} \geq 1 - \varepsilon > 0. \quad (3.22)$$

De (3.20) e de (3.22), temos

$$\begin{aligned} E(t, \xi) &\geq \frac{1-\varepsilon}{2} |\widehat{u}_t|^2 + \frac{a^2}{2} |\xi|^2 |\widehat{u}|^2 + \frac{b^2 - a^2}{2} |\xi \cdot \widehat{u}|^2 \\ &\geq (1-\varepsilon) \left(\frac{1}{2} |\widehat{u}_t|^2 + \frac{a^2}{2} |\xi|^2 |\widehat{u}|^2 + \frac{b^2 - a^2}{2} |\xi \cdot \widehat{u}|^2 \right) \\ &= (1-\varepsilon) E_0(t, \xi). \end{aligned}$$

Em suma,

$$E(t, \xi) \geq (1-\varepsilon) E_0(t, \xi), \quad (3.23)$$

para todo $|\xi| \neq 0$ e $t \geq 0$.

É claro que $E(t, 0) = E_0(t, 0)$. Em consequência, (3.23) vale para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Por outro lado, usando (3.19) com sinal positivo temos, para $|\xi| \neq 0$:

$$\begin{aligned} E(t, \xi) &\leq \frac{1}{2} |\widehat{u}_t|^2 + \frac{a^2}{2} |\xi|^2 |\widehat{u}|^2 + \frac{b^2 - a^2}{2} |\xi \cdot \widehat{u}|^2 \\ &\quad + \rho(\xi) |\xi|^{2\theta} |\widehat{u}|^2 + \frac{\rho(\xi)}{2|\xi|^{2\theta}} |\widehat{u}_t|^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Além disso, se $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$, então

$$|\xi| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \rho(\xi)|\xi|^{2\theta} = \varepsilon|\xi|^{4\theta} \leq \varepsilon|\xi|^2$$

e

$$|\xi| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \rho(\xi)|\xi|^{2\theta} = \varepsilon|\xi|^{2\theta} \leq \varepsilon|\xi|^2.$$

Portanto

$$\rho(\xi)|\xi|^{2\theta} \leq \varepsilon|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (3.25)$$

Usando (3.21) e (3.25) em (3.24) temos, para $|\xi| \neq 0$:

$$\begin{aligned} E(t, \xi) &\leq \frac{1+\varepsilon}{2} |\widehat{u}_t|^2 + a^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{a^2} \right) |\xi|^2 |\widehat{u}|^2 + \frac{b^2 - a^2}{2} |\xi \cdot \widehat{u}|^2 \\ &\leq CE_0(t, \xi) \end{aligned} \quad (3.26)$$

com $C > 0$ dependendo de ε e a . Evidentemente (3.26) também vale para $|\xi| = 0$.

Portanto, de (3.23) e (3.26),

$$(1 - \varepsilon)E_0(t, \xi) \leq E(t, \xi) \leq CE_0(t, \xi),$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$, o que prova o lema. ■

Lema 3.6 *Seja $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$. Então existem constantes $C = C(\varepsilon) > 0$ e*

$\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ tais que

$$E_0(t, \xi) \leq C e^{-\alpha\rho(\xi)t} E_0(0, \xi),$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$, desde que ε seja suficientemente pequeno.

Demonstração.

De (3.23) e de (3.18), temos, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$, que

$$E_0(t, \xi) \leq (1 - \varepsilon)^{-1} E(t, \xi) \leq (1 - \varepsilon)^{-1} e^{-\alpha\rho(\xi)t} E(0, \xi). \quad (3.27)$$

Portanto, de (3.27) e de (3.26) com $t = 0$, segue que

$$\begin{aligned} E_0(t, \xi) &\leq (1 - \varepsilon)^{-1} e^{-\alpha\rho(\xi)t} E(0, \xi) \\ &\leq C(1 - \varepsilon)^{-1} e^{-\alpha\rho(\xi)t} E_0(0, \xi) \\ &\leq C_1 e^{-\alpha\rho(\xi)t} E_0(0, \xi) \end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$. ■

Demonstração do item (ii) do Teorema 3.1:

Vamos agora encontrar as estimativas para a energia quando $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Do Teorema de Plancherel e do Lema 3.6 segue que

$$\begin{aligned}
2E_u(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} (|u_t|^2 + a^2|\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)|\operatorname{div} u|^2) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (|\widehat{u}_t|^2 + a^2|\widehat{\nabla} u|^2 + (b^2 - a^2)|\widehat{\operatorname{div}} u|^2) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (|\widehat{u}_t|^2 + a^2|\xi|^2|\widehat{u}|^2 + (b^2 - a^2)|\xi \cdot \widehat{u}|^2) d\xi \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^n} E_0(t, \xi) d\xi \\
&\leq 2C \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha\rho(\xi)t} E_0(0, \xi) d\xi \\
&= C \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha\rho(\xi)t} (|\widehat{u}_1|^2 + a^2|\xi|^2|\widehat{u}_0|^2 + (b^2 - a^2)|\xi \cdot \widehat{u}_0|^2) d\xi \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha\rho(\xi)t} (|\widehat{u}_1|^2 + b^2|\xi|^2|\widehat{u}_0|^2) d\xi \\
&\leq C_0 \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha\rho(\xi)t} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^2|\widehat{u}_0|^2) d\xi \\
&\quad + C_0 \int_{|\xi| \geq 1} e^{-\alpha\rho(\xi)t} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^2|\widehat{u}_0|^2) d\xi.
\end{aligned}$$

Denotando

$$I_1 = \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha\rho(\xi)t} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^2|\widehat{u}_0|^2) d\xi$$

e

$$I_2 = \int_{|\xi| \geq 1} e^{-\alpha\rho(\xi)t} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^2|\widehat{u}_0|^2) d\xi,$$

temos

$$2E_u(t) \leq C_0(I_1 + I_2), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.28)$$

Para concluir o resultado basta estimar I_1 e I_2 . Notemos que

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{|\xi| \geq 1} e^{-\alpha\rho(\xi)t} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^2 |\widehat{u}_0|^2) d\xi \\
&= \int_{|\xi| \geq 1} e^{-\alpha\varepsilon t} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^2 |\widehat{u}_0|^2) d\xi \\
&= e^{-\alpha\varepsilon t} \int_{|\xi| \geq 1} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^2 |\widehat{u}_0|^2) d\xi \\
&\leq e^{-\alpha\varepsilon t} \int_{\mathbb{R}^n} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^2 |\widehat{u}_0|^2) d\xi \\
&= e^{-\alpha\varepsilon t} \int_{\mathbb{R}^n} (|u_1|^2 + |\nabla u_0|^2) dx \\
&\leq C e^{-\eta t} E_u(0),
\end{aligned}$$

onde $\eta = \alpha\varepsilon$. Ou seja,

$$I_2 \leq C e^{-\eta t} E_u(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.29)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha\varepsilon|\xi|^{2\theta}t} |\widehat{u}_1|^2 d\xi + \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha\varepsilon|\xi|^{2\theta}t} |\xi|^2 |\widehat{u}_0|^2 d\xi \\
&\leq \|\widehat{u}_1\|_{(L^\infty)^n}^2 \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha\varepsilon|\xi|^{2\theta}t} d\xi + \|\widehat{u}_0\|_{(L^\infty)^n}^2 \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha\varepsilon|\xi|^{2\theta}t} |\xi|^2 d\xi \\
&\leq C \|u_1\|_{(L^1)^n}^2 \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha\varepsilon|\xi|^{2\theta}t} d\xi \\
&\quad + C \|u_0\|_{(L^1)^n}^2 \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha\varepsilon|\xi|^{2\theta}t} |\xi|^2 d\xi,
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$.

Usando o Lema 1.2 com $\beta = 2\theta$, $k = 0$ e $k = 2$, segue que

$$I_1 \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}} \|u_1\|_{(L^1)^n}^2 + C(1+t)^{-\frac{n+2}{2\theta}} \|u_0\|_{(L^1)^n}^2, \quad (3.30)$$

para todo $t \geq 0$.

Portanto, de (3.28), (3.29) e (3.30) temos, para $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$:

$$\begin{aligned} E_u(t) &\leq C(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}} \|u_1\|_{(L^1)^n}^2 + C(1+t)^{-\frac{n+2}{2\theta}} \|u_0\|_{(L^1)^n}^2 \\ &\quad + Ce^{-\eta t} (\|u_1\|^2 + \|\nabla u_0\|^2), \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$, o que prova o item (ii) do Teorema 3.1.

Para provar (i), basta fazer uma modificação na definição de ρ , considerando

$$\rho(\xi) = \rho_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \varepsilon |\xi|^{2-2\theta}, & |\xi| \leq 1 \\ \varepsilon, & |\xi| \geq 1. \end{cases}$$

As taxas de decaimento para a solução do sistema (3.1)-(3.2) são dadas pelo seguinte teorema:

Teorema 3.2 *Seja $n \geq 3$. Se $(u_0, u_1) \in ((H^1(\mathbb{R}^n))^n \cap (L^1(\mathbb{R}^n))^n) \times ((L^2(\mathbb{R}^n))^n \cap (L^1(\mathbb{R}^n))^n)$, então as seguintes estimativas são válidas para todo $t \geq 0$:*

(i) Se $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$, então

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 &\leq C(1+t)^{-\frac{n-2}{2(1-\theta)}} \|u_1\|_{(L^1)^n}^2 + C(1+t)^{-\frac{n}{2(1-\theta)}} \|u_0\|_{(L^1)^n}^2 \\ &\quad + Ce^{-\eta t} (\|u_0\|^2 + \|u_1\|^2). \end{aligned}$$

(ii) Se $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$, então

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 &\leq C(1+t)^{-\frac{n-2}{2\theta}} \|u_1\|_{(L^1)^n}^2 + C(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}} \|u_0\|_{(L^1)^n}^2 \\ &\quad + Ce^{-\eta t} (\|u_0\|^2 + \|u_1\|^2), \end{aligned}$$

onde $C > 0$ e $\eta > 0$ são constantes.

Demonstração.

Vamos começar provando o item (ii).

Usando o Lema 3.6, para todo $|\xi| \neq 0$ e $t \geq 0$ temos que

$$\begin{aligned} |\widehat{u}|^2 &\leq C_0 e^{-\alpha\rho(\xi)t} \left(\frac{|\widehat{u}_1|^2}{a^2|\xi|^2} + |\widehat{u}_0|^2 + \frac{b^2 - a^2}{a^2|\xi|^2} |\xi \cdot \widehat{u}_0|^2 \right) \\ &\leq C_0 e^{-\alpha\rho(\xi)t} \left(\frac{|\widehat{u}_1|^2}{a^2|\xi|^2} + |\widehat{u}_0|^2 + \frac{b^2 - a^2}{a^2} |\widehat{u}_0|^2 \right) \\ &\leq C e^{-\alpha\rho(\xi)t} \left(\frac{|\widehat{u}_1|^2}{|\xi|^2} + |\widehat{u}_0|^2 \right). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Quando $|\xi| \geq 1$, temos $\frac{|\widehat{u}_1|^2}{|\xi|^2} \leq |\widehat{u}_1|^2$ e assim

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi| \geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi &\leq C e^{-\alpha \varepsilon t} \left(\int_{|\xi| \geq 1} |\widehat{u}_1|^2 d\xi + \int_{|\xi| \geq 1} |\widehat{u}_0|^2 d\xi \right) \\
&\leq C e^{-\eta t} (\|\widehat{u}_1\|^2 + \|\widehat{u}_0\|^2) \\
&= C e^{-\eta t} (\|u_1\|^2 + \|u_0\|^2), \tag{3.32}
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$, onde $\eta = \alpha \varepsilon$.

E integrando (3.31) em $\delta \leq |\xi| \leq 1$ com δ pequeno, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi &\leq C \int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} e^{-\eta |\xi|^{2\theta} t} \frac{|\widehat{u}_1|^2}{|\xi|^2} d\xi \\
&\quad + C \int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} e^{-\eta |\xi|^{2\theta} t} |\widehat{u}_0|^2 d\xi \\
&\leq C \|\widehat{u}_1\|_{(L^\infty)^n}^2 \int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} e^{-\eta |\xi|^{2\theta} t} |\xi|^{-2} d\xi \\
&\quad + C \|\widehat{u}_0\|_{(L^\infty)^n}^2 \int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} e^{-\eta |\xi|^{2\theta} t} d\xi \\
&\leq C_0 \|u_1\|_{(L^1)^n}^2 \int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} e^{-\eta |\xi|^{2\theta} t} |\xi|^{-2} d\xi \\
&\quad + C_0 \|u_0\|_{(L^1)^n}^2 \int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} e^{-\eta |\xi|^{2\theta} t} d\xi, \tag{3.33}
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$.

Pelo Lema 1.2, existe $C > 0$ tal que

$$\int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} e^{-\eta |\xi|^{2\theta} t} |\xi|^k d\xi \leq C(1+t)^{-\frac{n+k}{2\theta}}, \quad \forall t > 0, \tag{3.34}$$

quando $\beta = 2\theta$, $k = 0$ e $k = -2$, pois nestes casos temos $n + k > 0$, já que $n \geq 3$. Usando (3.33) e (3.34) concluímos que

$$\int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq C(1+t)^{-\frac{n-2}{2\theta}} \|u_1\|_{(L^1)_n}^2 + C(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}} \|u_0\|_{(L^1)_n}^2,$$

para todo $t \geq 0$.

Fazendo $\delta \rightarrow 0$, temos

$$\int_{|\xi| \leq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq C(1+t)^{-\frac{n-2}{2\theta}} \|u_1\|_{(L^1)_n}^2 + C(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}} \|u_0\|_{(L^1)_n}^2, \quad (3.35)$$

para todo $t \geq 0$.

Finalmente, somando as equações (3.32) e (3.35) segue que

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 &= \|\widehat{u}(\xi)\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C(1+t)^{-\frac{n-2}{2\theta}} \|u_1\|_{(L^1)_n}^2 + C(1+t)^{-\frac{n}{2\theta}} \|u_0\|_{(L^1)_n}^2 \\ &\quad + Ce^{-\eta t} (\|u_1\|^2 + \|u_0\|^2), \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$, o que demonstra o item (ii) do teorema.

A demonstração do item (i) é feita de maneira análoga, com $\rho(\xi)$ dada no Teorema 3.1. ■

Capítulo 4

Equação de Placas com Dissipação Fracionária

Neste capítulo, estudaremos a existência, unicidade e o comportamento assintótico de soluções para o seguinte problema linear de valor inicial para a equação de placas em \mathbb{R}^n com dissipação fracionária:

$$u_{tt}(t, x) + \Delta^2 u(t, x) + A^\theta u_t(t, x) = 0, \quad (4.1)$$

para $(t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, com dados iniciais

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (4.2)$$

satisfazendo

$$u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n), \quad u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Na equação acima, $u = u(t, x)$ representa o deslocamento da placa no ponto x e no instante de tempo t .

O operador $A^\theta : H^{2\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ ($0 \leq \theta \leq 1$) é definido, como anteriormente, por

$$A^\theta v(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2\theta} \mathcal{F}(v)(\xi))(x), \quad v \in H^{2\theta}(\mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

4.1 Existência e unicidade de soluções

Vamos provar a existência e unicidade de soluções do problema (4.1)-(4.2), usando a teoria de semigrupos. Para a equação de placas vamos obter o resultado para todo $\theta \in (0, 1]$.

Tomando o produto interno em $L^2(\mathbb{R}^n)$ de (4.1) com u_t obtemos formalmente que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_{tt} u_t dx + \int_{\mathbb{R}^n} \Delta^2 u u_t dx + \int_{\mathbb{R}^n} A^\theta u_t u_t dx = 0,$$

e, pelo Teorema de Plancherel,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \Delta u_t dx + \int_{\mathbb{R}^n} |A^{\theta/2} u_t|^2 dx = 0,$$

o que implica em

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 \right) + \int_{\mathbb{R}^n} |A^{\theta/2} u_t|^2 dx = 0.$$

Portanto a energia total associada a equação (4.1) é dada por

$$E_u(t) = \frac{1}{2} (\|u_t(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2). \quad (4.3)$$

No espaço de Hilbert

$$X = H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$$

consideremos o produto interno definido por

$$\langle U, V \rangle_X = \int_{\mathbb{R}^n} u_1 v_1 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u_1 \Delta v_1 dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_2 v_2 dx$$

para todo $U = (u_1, u_2)$ e $V = (v_1, v_2)$ em X .

Podemos escrever o sistema (4.1)-(4.2) na forma matricial como segue:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U(t) = \mathcal{A}U(t) + \mathcal{B}U(t) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \quad (4.4)$$

onde $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \in X$, $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in X$, o operador

$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \rightarrow X$, é dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Delta^2 - I & -A^\theta \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

com $D(\mathcal{A}) = H^4(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n)$ e o operador $\mathcal{B} : X \rightarrow X$ é dado por

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Notemos que o operador \mathcal{A} está bem definido quando $\theta \in (0, 1]$.

Assim como nos Capítulos 2 e 3, vamos mostrar que $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 .

Lema 4.1 *O operador $\mathcal{B} : X \rightarrow X$ definido em (4.6) é um operador linear e limitado.*

A demonstração é análoga à demonstração do Lema 2.1 no Capítulo 2.

Vamos mostrar que \mathcal{A} é m -dissipativo e densamente definido. Assim, pelo Teorema de Lumer-Phillips, \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 .

Como

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset H^4(\mathbb{R}^n) \subset H^2(\mathbb{R}^n)$$

e

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset H^2(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n),$$

concluimos que $D(\mathcal{A})$ é denso em X .

Lema 4.2 *O operador \mathcal{A} definido em (4.5) é m -dissipativo.*

Demonstração.

Para que \mathcal{A} seja um operador m -dissipativo é suficiente mostrar que \mathcal{A} é dissipativo e que $Im(I - \mathcal{A}) = X$.

Seja $U = (u, v) \in D(\mathcal{A})$ então

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_X &= \left\langle \begin{pmatrix} v \\ -\Delta^2 u - u - A^\theta v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_X \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} v u \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \Delta v \Delta u \, dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta^2 u v \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} u v \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} A^\theta v v \, dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} |A^{\theta/2} v|^2 \, dx \leq 0 \end{aligned}$$

o que mostra que $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow X$ é dissipativo.

Resta provar que

$$Im(I - \mathcal{A}) = X.$$

Analogamente aos argumentos dados no Capítulo 2, mostra-se que $Im(I - \mathcal{A}) \subset X$.

A outra inclusão será dividida em etapas. Dado $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in X =$

$H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ queremos encontrar $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$(I - A) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Vamos definir a função

$$\alpha : H^2(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\alpha(u, \varphi) = 2 \int_{\mathbb{R}^n} u \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \Delta \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} A^{\theta/2} u A^{\theta/2} \varphi \, dx.$$

Mostremos que a função α é bilinear, contínua e coerciva.

- Bilinearidade de α :

Dados $\varphi, \phi \in H^2(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} \alpha(u, \varphi + \lambda\phi) &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} u(\varphi + \lambda\phi) \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \Delta(\varphi + \lambda\phi) \, dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} A^{\theta/2} u A^{\theta/2} (\varphi + \lambda\phi) \, dx, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\alpha(u, \varphi + \lambda\phi) &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi \, dx + 2\lambda \int_{\mathbb{R}^n} u\phi \, dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \Delta \varphi \, dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \Delta \phi \, dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} A^{\theta/2} u A^{\theta/2} \varphi \, dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^n} A^{\theta/2} u A^{\theta/2} \phi \, dx \\
&= \alpha(u, \varphi) + \lambda \alpha(u, \phi),
\end{aligned}$$

pois os operadores Δ e $A^{\theta/2}$ são lineares.

Analogamente, temos $\alpha(u + \lambda v, \varphi) = \alpha(u, \varphi) + \lambda \alpha(v, \varphi)$, para $u, v \in H^2(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, a função α é bilinear.

- Continuidade de α :

Dados $u, \varphi \in H^2(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned}
|\alpha(u, \varphi)| &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} |u| |\varphi| \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u| |\Delta \varphi| \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |A^{\theta/2} u| |A^{\theta/2} \varphi| \, dx \\
&\leq 2 \|u\| \|\varphi\| + \|\Delta u\| \|\Delta \varphi\| + \|A^{\theta/2} u\| \|A^{\theta/2} \varphi\| \\
&\leq C \|u\|_{H^2} \|\varphi\|_{H^2}.
\end{aligned}$$

- Coercividade de α :

Seja $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$, então

$$\alpha(u, u) = 2 \int_{\mathbb{R}^n} uu \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \Delta u \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} A^{\theta/2} u A^{\theta/2} u \, dx,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 \alpha(u, u) &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |A^{\theta/2} u|^2 dx \\
 &\geq \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx \\
 &\geq C \|u\|_{H^2}^2.
 \end{aligned}$$

Considere o funcional $L : H^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\langle L, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (f + g + A^\theta f) \varphi dx.$$

Como no Capítulo 2, temos que L é linear e contínuo.

Portanto, pelo Teorema de Lax-Milgram existe $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\alpha(u, \varphi) = \langle L, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in H^2(\mathbb{R}^n)$$

assim,

$$2 \int_{\mathbb{R}^n} u \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \Delta \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^n} A^{\theta/2} u A^{\theta/2} \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f + g + A^\theta f) \varphi dx,$$

para todo $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

Em particular,

$$2 \int_{\mathbb{R}^n} u \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \Delta \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^n} A^{\theta/2} u A^{\theta/2} \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f + g + A^\theta f) \varphi dx,$$

para todo $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

Assim, segue que

$$f + g + A^\theta f = 2u + \Delta^2 u + A^\theta u$$

no sentido das distribuições, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Para $f \in H^2(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, aplicando o Teorema da Regularidade Elíptica para o operador elíptico de quarta ordem

$$2I + \Delta^2 + A^\theta$$

concluimos que $u \in H^4(\mathbb{R}^n)$ e

$$f + g + A^\theta f = 2u + \Delta^2 u + A^\theta u \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Seja $v = u - f$. Então tem-se que $v \in H^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$g = u + v + \Delta^2 u + A^\theta v.$$

Dessa forma, fica provado que $U = (u, v) \in D(\mathcal{A})$ e

$$(I - \mathcal{A})U = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Logo, $Im(I - \mathcal{A}) = X$ e o lema está provado. ■

Usando os Lemas 4.1 e 4.2, segue da teoria de semigrupos que $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 . Seja

$$S : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$$

o semigrupo gerado por $\mathcal{A} + \mathcal{B}$. Então $U(t) = S(t)U_0$ é a única solução do problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} S(t)U_0 = (\mathcal{A} + \mathcal{B})S(t)U_0 \\ S(0)U_0 = U_0. \end{cases}$$

Logo, se $U_0 = (u_0, u_1) \in X = H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$, temos

$$U(t) = (u(t), u_t(t)) \in C(\mathbb{R}^+, X)$$

e assim

$$u \in C(\mathbb{R}^+, H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^n))$$

é a única solução fraca da equação de placas (4.1)-(4.2). Além disso, se

$$U_0 = (u_0, u_1) \in D(\mathcal{A}) = H^4(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n),$$

$$u \in C(\mathbb{R}^+, H^4(\mathbb{R}^n)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, H^2(\mathbb{R}^n))$$

é única solução forte do mesmo sistema.

4.2 Taxas de Decaimento

Como nos capítulos anteriores, buscamos taxas de decaimento para a energia total e para a solução, agora relativo ao problema (4.1)-(4.2) quando $\theta \in (0, 1]$, através do método da energia no espaço de Fourier.

Diferentemente do que aconteceu nos capítulos anteriores, quando a prova do resultado principal foi dividida em dois casos: $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$ e $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$, para a equação de placas, será possível fazer uma única demonstração para $\theta \in (0, 1]$, escolhendo uma função ρ adequada.

Teorema 4.1 *Sejam $n \geq 1$, $(u_0, u_1) \in (H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)) \times (L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n))$ e $\theta \in (0, 1]$. Então*

$$\begin{aligned} E_u(t) \leq & C(1+t)^{-\frac{n}{4-2\theta}} \|u_1\|_{L^1}^2 + C(1+t)^{-\frac{n+4}{4-2\theta}} \|u_0\|_{L^1}^2 \\ & + Ce^{-\eta t} (\|u_1\|^2 + \|\Delta u_0\|^2), \end{aligned}$$

onde $C > 0$ e $\eta > 0$ são constantes.

Para essa demonstração, vamos considerar $(u_0, u_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, já que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^2(\mathbb{R}^n)$ e em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Aplicando a transformada de Fourier em ambos os lados de (4.1), temos

$$\mathcal{F}(u_{tt} + \Delta^2 u + A^\theta u_t) = \mathcal{F}(0) = 0.$$

Já vimos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u_{tt})(\xi) &= \widehat{u}_{tt}(\xi), \\ \mathcal{F}(\Delta^2 u)(\xi) &= |\xi|^4 \widehat{u}(\xi) \quad \text{e} \\ \mathcal{F}(A^\theta u_t)(\xi) &= |\xi|^{2\theta} \widehat{u}_t(\xi).\end{aligned}$$

Assim, no espaço de Fourier, escrevemos o problema (4.1)-(4.2) como abaixo, para $(t, \xi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$:

$$\widehat{u}_{tt}(t, \xi) + |\xi|^4 \widehat{u}(t, \xi) + |\xi|^{2\theta} \widehat{u}_t(t, \xi) = 0, \quad (4.7)$$

$$\widehat{u}(0, \xi) = \widehat{u}_0(\xi), \quad \widehat{u}_t(0, \xi) = \widehat{u}_1(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (4.8)$$

Calculemos o produto escalar de (4.7) por $\overline{\widehat{u}_t}$ e tomemos a parte real. Temos

$$\Re(\widehat{u}_{tt}\overline{\widehat{u}_t} + |\xi|^4 \widehat{u}\overline{\widehat{u}_t} + |\xi|^{2\theta} |\widehat{u}_t|^2) = 0,$$

o que implica em

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\widehat{u}_t|^2 + |\xi|^4 |\widehat{u}|^2) + |\xi|^{2\theta} |\widehat{u}_t|^2 = 0.$$

Seja

$$E_0(t, \xi) = \frac{1}{2} |\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2} |\xi|^4 |\widehat{u}|^2$$

a energia da equação (4.1) no espaço de Fourier.

Pelas identidades anteriores, temos

$$\frac{d}{dt}E_0(t) + |\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 = 0. \quad (4.9)$$

Agora, fazendo o produto escalar de (4.7) por $\rho(\xi)\widehat{\bar{u}}$ ($\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ será escolhida posteriormente) e tomando a parte real, temos

$$\Re(\rho(\xi)\widehat{u}_{tt}\widehat{\bar{u}} + \rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}|^2 + \rho(\xi)|\xi|^{2\theta}\widehat{u}_t\widehat{\bar{u}}) = 0.$$

Reescrevendo, temos

$$\rho(\xi) \left(\Re \left(\frac{d}{dt} \widehat{u}_t \widehat{\bar{u}} \right) - |\widehat{u}_t|^2 \right) + \rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}|^2 + \rho(\xi)|\xi|^{2\theta} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\widehat{u}|^2 = 0,$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt} \left(\rho(\xi)\Re(\widehat{u}_t\widehat{\bar{u}}) + \frac{1}{2}\rho(\xi)|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 \right) + \rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}|^2 = \rho(\xi)|\widehat{u}_t|^2. \quad (4.10)$$

Definimos

$$E(t, \xi) = \frac{1}{2}|\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^4|\widehat{u}|^2 + \rho(\xi)\Re(\widehat{u}_t\widehat{\bar{u}}) + \frac{1}{2}\rho(\xi)|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2,$$

$$F(t, \xi) = |\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + \rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}|^2$$

e

$$R(t, \xi) = \rho(\xi)|\widehat{u}_t|^2$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Assim, somando (4.9) e (4.10), temos

$$\frac{d}{dt}E(t, \xi) + F(t, \xi) = R(t, \xi). \quad (4.11)$$

Para $\theta \in (0, 1]$, consideremos a função auxiliar $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo

$$\rho(\xi) = \rho_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \varepsilon|\xi|^{4-2\theta}, & |\xi| \leq 1 \\ \varepsilon, & |\xi| \geq 1, \end{cases}$$

onde ε será escolhido posteriormente.

Inicialmente provaremos alguns resultados que serão importantes na demonstração do Teorema 4.1.

Lema 4.3 *Para qualquer $\varepsilon > 0$, é válido que*

$$R(t, \xi) \leq \varepsilon F(t, \xi), \quad (4.12)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Demonstração.

No caso $|\xi| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} R(t, \xi) &= \rho(\xi)|\widehat{u}_t|^2 = \varepsilon|\xi|^{4-2\theta}|\widehat{u}_t|^2 \\ &\leq \varepsilon(|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + \rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}_t|^2), \end{aligned}$$

pois $|\xi|^{4-2\theta} \leq |\xi|^{2\theta}$, para todo $\theta \in (0, 1]$.

Ou seja,

$$R(t, \xi) = \varepsilon F(t, \xi), \quad \forall |\xi| \leq 1.$$

Para $|\xi| \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} R(t, \xi) &= \varepsilon |\widehat{u}_t|^2 \\ &\leq \varepsilon |\xi|^{2\theta} |\widehat{u}_t|^2 \\ &\leq \varepsilon (|\xi|^{2\theta} |\widehat{u}_t|^2 + \rho(\xi) |\xi|^4 |\widehat{u}|^2) \\ &= \varepsilon F(t, \xi). \end{aligned}$$

■

Do Lema 4.3 e da equação (4.11) segue que

$$\frac{d}{dt} E(t, \xi) + (1 - \varepsilon) F(t, \xi) \leq 0, \quad (4.13)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Lema 4.4 *Para todo $\theta \in (0, 1]$, existe uma constante $N > 0$ tal que*

$$\rho(\xi) E(t, \xi) \leq N F(t, \xi),$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Demonstração.

Observemos primeiramente que

$$\rho(\xi)E(t, \xi) = \frac{1}{2}\rho(\xi)|\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}\rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}|^2 + \rho(\xi)^2\Re(\widehat{u}_t\overline{\widehat{u}}) + \frac{1}{2}\rho(\xi)^2|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2.$$

Para $|\xi| \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} \rho(\xi)E(t, \xi) &\leq \frac{\varepsilon}{2}|\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}\rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}|^2 + \varepsilon^2|\widehat{u}_t||\widehat{u}| + \frac{\varepsilon}{2}\rho(\xi)|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 \\ &\leq N_1|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + N_2\rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}|\widehat{u}_t|^2 + \frac{\varepsilon^4}{2}|\widehat{u}|^2 + N_3\rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}|^2 \\ &\leq N_1|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + N_2\rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}|^2 + N_4|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 \\ &\quad + N_5\rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}|^2 + N_3\rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}|^2 \\ &\leq \overline{N}(|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + \rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}|^2) \\ &= \overline{N}F(t, \xi) \end{aligned} \tag{4.14}$$

já que $1 \leq |\xi|^{2\theta}$ e $|\xi|^{2\theta} \leq |\xi|^4$ para $|\xi| \geq 1$ e $\theta \in (0, 1]$.

Agora, para $|\xi| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} \rho(\xi)E(t, \xi) &\leq \frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{4-2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}\rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}|^2 \\ &\quad + \varepsilon^2|\xi|^{8-4\theta}|\widehat{u}_t||\widehat{u}| + \frac{\varepsilon^2}{2}|\xi|^{8-4\theta}|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 \\ &\leq M_1|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + M_2\rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}|\xi|^{4-2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + \frac{\varepsilon^4}{2}|\xi|^{12-6\theta}|\widehat{u}|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}|^2 \end{aligned}$$

pois $|\xi|^{4-2\theta} \leq |\xi|^{2\theta}$, desde que $2\theta \leq 4 - 2\theta$ e $|\xi| \leq 1$.

E usando que $|\xi|^{12-6\theta} \leq |\xi|^{8-2\theta}$ (pois $8 - 2\theta \leq 12 - 6\theta$ e $|\xi| \leq 1$), temos

$$\begin{aligned}
\rho(\xi)E(t, \xi) &\leq M_1|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + M_2\rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}|^2 \\
&\quad + M_3|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + M_4\rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}|^2 + M_5\rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}|^2 \\
&\leq \overline{M}(|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + \rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}|^2) \\
&= \overline{M}F(t, \xi).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Assim, de (4.14) e (4.15), existe $N > 0$ tal que

$$\rho(\xi)E(t, \xi) \leq NF(t, \xi),$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$. ■

Do Lema 4.4 e de (4.13), escolhendo ε tal que $1 - \varepsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t, \xi) + (1 - \varepsilon)N^{-1}\rho(\xi)E(t, \xi) \\
\leq \frac{d}{dt}E(t, \xi) + (1 - \varepsilon)F(t, \xi) \leq 0.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Definimos $\alpha := (1 - \varepsilon)N^{-1}$. Multiplicando a desigualdade acima por $e^{\alpha\rho(\xi)t}$ temos

$$\frac{d}{dt} \left(e^{\alpha\rho(\xi)t} E(t, \xi) \right) \leq 0,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Integrando de 0 a t ,

$$e^{\alpha\rho(\xi)t}E(t, \xi) \leq E(0, \xi)$$

e portanto

$$E(t, \xi) \leq e^{-\alpha\rho(\xi)t}E(0, \xi), \quad (4.17)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Da mesma maneira como nos capítulos anteriores, mostremos que os funcionais E e E_0 são equivalentes.

Para $|\xi| \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} \pm \rho(\xi)\Re(\widehat{u}_t\bar{\widehat{u}}) &\leq \rho(\xi)\frac{|\xi|^\theta}{|\xi|^\theta}|\widehat{u}_t||\widehat{u}| \\ &\leq \frac{1}{2}\rho(\xi)|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 + \frac{1}{2|\xi|^{2\theta}}\rho(\xi)|\widehat{u}_t|^2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Usando (4.18) com sinal negativo na definição de $E(t, \xi)$, temos

$$\begin{aligned} E(t, \xi) &\geq \frac{1}{2}|\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^4|\widehat{u}|^2 - \frac{1}{2|\xi|^{2\theta}}\rho(\xi)|\widehat{u}_t|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\rho(\xi)}{|\xi|^{2\theta}}\right)|\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^4|\widehat{u}|^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

se $|\xi| \neq 0$.

Mas

$$0 < |\xi| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho(\xi)}{|\xi|^{2\theta}} = \varepsilon|\xi|^{4-4\theta} \leq \varepsilon \quad \text{e}$$

$$|\xi| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho(\xi)}{|\xi|^{2\theta}} = \frac{\varepsilon}{|\xi|^{2\theta}} \leq \varepsilon.$$

Portanto

$$\frac{\rho(\xi)}{|\xi|^{2\theta}} \leq \varepsilon, \quad \forall |\xi| \neq 0. \quad (4.20)$$

Logo

$$1 - \frac{\rho(\xi)}{|\xi|^{2\theta}} \geq 1 - \varepsilon > 0, \quad \forall |\xi| \neq 0. \quad (4.21)$$

Portanto, de (4.19) e de (4.21), temos

$$\begin{aligned} E(t, \xi) &\geq \frac{1-\varepsilon}{2} |\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2} |\xi|^4 |\widehat{u}|^2 \\ &\geq (1-\varepsilon) \left(\frac{1}{2} |\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2} |\xi|^4 |\widehat{u}|^2 \right) \\ &= (1-\varepsilon) E_0(t, \xi), \end{aligned}$$

ou seja,

$$E(t, \xi) \geq (1-\varepsilon) E_0(t, \xi), \quad (4.22)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$, pois $E(t, 0) = E_0(t, 0)$.

Logo, de (4.22) e de (4.17), temos

$$E_0(t, \xi) \leq (1-\varepsilon)^{-1} E(t, \xi) \leq (1-\varepsilon)^{-1} e^{-\alpha\rho(\xi)t} E(0, \xi), \quad (4.23)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Por outro lado, usando (4.18) com sinal positivo na definição de

$E(t, \xi)$, temos, para $|\xi| \neq 0$:

$$E(t, \xi) \leq \frac{1}{2}|\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^4|\widehat{u}|^2 + \rho(\xi)|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 + \frac{1}{2|\xi|^{2\theta}}\rho(\xi)|\widehat{u}_t|^2.$$

Note que

$$|\xi| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \rho(\xi)|\xi|^{2\theta} = \varepsilon|\xi|^4 \quad \text{e}$$

$$|\xi| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \rho(\xi)|\xi|^{2\theta} = \varepsilon|\xi|^{2\theta} \leq \varepsilon|\xi|^4.$$

Portanto

$$|\xi|^{2\theta}\rho(\xi) \leq \varepsilon|\xi|^4, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (4.24)$$

De (4.20) e (4.24) segue que:

$$E(t, \xi) \leq \frac{1+\varepsilon}{2}|\widehat{u}_t|^2 + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)|\xi|^4|\widehat{u}|^2 \leq CE_0(t, \xi), \quad \forall |\xi| \neq 0 \quad (4.25)$$

com $C > 0$ dependendo somente de ε . Mas é imediato que (4.25) vale para $|\xi| = 0$. Logo, de (4.23) e de (4.25) com $t = 0$, segue que

$$\begin{aligned} E_0(t, \xi) &\leq (1 - \varepsilon)^{-1}e^{-\alpha\rho(\xi)t}E_0(0, \xi) \\ &\leq C(1 - \varepsilon)^{-1}e^{-\alpha\rho(\xi)t}E_0(0, \xi) \\ &\leq C_0e^{-\alpha\rho(\xi)t}E_0(0, \xi) \end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Portanto o lema abaixo está provado.

Lema 4.5 *Seja $\theta \in (0, 1]$. Então existem constantes $C = C(\varepsilon) > 0$ e $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ tais que*

$$E_0(t, \xi) \leq C e^{-\alpha\rho(\xi)t} E_0(0, \xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ e } t \geq 0,$$

desde que ε seja suficientemente pequeno.

Demonstração do Teorema 4.1:

Encontraremos agora as estimativas para a energia total do problema (4.1)-(4.2).

Já observamos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi, \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n). \quad (4.26)$$

Sabemos que para cada $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\mathcal{F} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u \right) = i\xi_j \mathcal{F} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u \right) = -\xi_j^2 \mathcal{F}(u),$$

e assim

$$|\mathcal{F}(\Delta u)|^2 = \sum_{j=1}^n |\xi|^4 |\widehat{u}_j|^2 = |\xi|^4 |\widehat{u}|^2.$$

Daí, de (4.26) e do Lema 4.5 segue que

$$\begin{aligned}
2E_u(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} (|u_t|^2 + |\Delta u|^2) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (|\widehat{u}_t|^2 + |\xi|^4 |\widehat{u}|^2) d\xi \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^n} E_0(t, \xi) d\xi \\
&\leq 2C \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha\rho(\xi)t} E_0(0, \xi) d\xi \\
&= C \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha\rho(\xi)t} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^4 |\widehat{u}_0|^2) d\xi \\
&= C \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha\rho(\xi)t} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^4 |\widehat{u}_0|^2) d\xi \\
&\quad + C \int_{|\xi| \geq 1} e^{-\alpha\rho(\xi)t} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^4 |\widehat{u}_0|^2) d\xi.
\end{aligned}$$

Chamando

$$I_1 = \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha\rho(\xi)t} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^4 |\widehat{u}_0|^2) d\xi$$

e

$$I_2 = \int_{|\xi| \geq 1} e^{-\alpha\rho(\xi)t} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^4 |\widehat{u}_0|^2) d\xi,$$

temos

$$2E_u(t) = \int_{\mathbb{R}^n} (|u_t|^2 + |\Delta u|^2) dx \leq C(I_1 + I_2), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.27)$$

Na seqüência vamos estimar as integrais I_1 e I_2 . Notemos que

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{|\xi| \geq 1} e^{-\alpha\rho(\xi)t} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^4 |\widehat{u}_0|^2) d\xi \\
 &= e^{-\alpha\varepsilon t} \int_{|\xi| \geq 1} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^4 |\widehat{u}_0|^2) d\xi \\
 &\leq e^{-\alpha\varepsilon t} \int_{\mathbb{R}^n} (|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^4 |\widehat{u}_0|^2) d\xi \\
 &= e^{-\alpha\varepsilon t} \int_{\mathbb{R}^n} (|u_1|^2 + |\Delta u_0|^2) dx \\
 &= 2e^{-\eta t} E_u(0),
 \end{aligned}$$

onde $\eta = \alpha\varepsilon$. Ou seja,

$$I_2 \leq 2e^{-\eta t} E_u(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.28)$$

E, por outro lado,

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha\varepsilon|\xi|^{4-2\theta}t} |\widehat{u}_1|^2 d\xi + \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha\varepsilon|\xi|^{4-2\theta}t} |\xi|^4 |\widehat{u}_0|^2 d\xi \\
 &\leq \|\widehat{u}_1\|_{L^\infty}^2 \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha\varepsilon|\xi|^{4-2\theta}t} d\xi + \|\widehat{u}_0\|_{L^\infty}^2 \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha\varepsilon|\xi|^{4-2\theta}t} |\xi|^4 d\xi \\
 &\leq C \|u_1\|_{L^1}^2 \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha\varepsilon|\xi|^{4-2\theta}t} d\xi + C \|u_0\|_{L^1}^2 \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha\varepsilon|\xi|^{4-2\theta}t} |\xi|^4 d\xi.
 \end{aligned}$$

Usando o Lema 1.2 com $\beta = 4 - 2\theta$, $k = 0$ e $k = 4$, segue que

$$I_1 \leq C \|u_1\|_{L^1}^2 (1+t)^{-\frac{n}{4-2\theta}} + C \|u_0\|_{L^1}^2 (1+t)^{-\frac{n+4}{4-2\theta}}, \quad (4.29)$$

para todo $t \geq 0$.

Portanto, de (4.27), (4.28) e (4.29), temos

$$\begin{aligned} E_u(t) &\leq C(1+t)^{-\frac{n}{4-2\theta}} \|u_1\|_{L^1}^2 + C(1+t)^{-\frac{n+4}{4-2\theta}} \|u_0\|_{L^1}^2 \\ &\quad + Ce^{-\eta t} (\|u_1\|^2 + \|\Delta u_0\|^2), \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$ e $\theta \in (0, 1]$, o que prova o Teorema 4.1.

Teorema 4.2 *Seja $n \geq 5$ e $\theta \in (0, 1]$. Se $(u_0, u_1) \in (H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)) \times (L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n))$, então a seguinte estimativa é válida:*

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 &\leq C(1+t)^{-\frac{n-4}{4-2\theta}} \|u_1\|_{L^1}^2 + C(1+t)^{-\frac{n}{4-2\theta}} \|u_0\|_{L^1}^2 \\ &\quad + Ce^{-\eta t} (\|u_0\|^2 + \|u_1\|^2), \quad \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

onde $C > 0$ e $\eta > 0$ são constantes.

Demonstração.

Do Lema 4.5 segue, para todo $|\xi| \neq 0$ e $t \geq 0$, que

$$|\widehat{u}|^2 \leq Ce^{-\alpha\rho(\xi)t} \left(\frac{|\widehat{u}_1|^2}{|\xi|^4} + |\widehat{u}_0|^2 \right). \quad (4.30)$$

Integrando em $|\xi| \geq 1$, temos $\frac{|\widehat{u}_1|^2}{|\xi|^4} \leq |\widehat{u}_1|^2$ e assim

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \geq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi &\leq Ce^{-\alpha\epsilon t} \left(\int_{|\xi| \geq 1} |\widehat{u}_1|^2 d\xi + \int_{|\xi| \geq 1} |\widehat{u}_0|^2 d\xi \right) \\ &\leq Ce^{-\alpha\epsilon t} (\|\widehat{u}_1\|^2 + \|\widehat{u}_0\|^2) \\ &= Ce^{-\eta t} (\|u_1\|^2 + \|u_0\|^2), \end{aligned} \quad (4.31)$$

para todo $t \geq 0$, com $\eta = \alpha\varepsilon$.

Agora, integrando em $\delta \leq |\xi| \leq 1$ com δ pequeno, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi &\leq C \int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} e^{-\eta|\xi|^{4-2\theta}t} \frac{|\widehat{u}_1|^2}{|\xi|^4} d\xi \\
&\quad + C \int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} e^{-\eta|\xi|^{4-2\theta}t} |\widehat{u}_0|^2 d\xi \\
&\leq C \|\widehat{u}_1\|_{L^\infty}^2 \int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} e^{-\eta|\xi|^{4-2\theta}t} |\xi|^{-4} d\xi \\
&\quad + C \|\widehat{u}_0\|_{L^\infty}^2 \int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} e^{-\eta|\xi|^{4-2\theta}t} d\xi \\
&\leq C_0 \|u_1\|_{L^1}^2 \int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} e^{-\eta|\xi|^{4-2\theta}t} |\xi|^{-4} d\xi \\
&\quad + C_0 \|u_0\|_{L^1}^2 \int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} e^{-\eta|\xi|^{4-2\theta}t} d\xi, \quad (4.32)
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$.

Do Lema 1.2, se $\beta = 4 - 2\theta$ e $n + k > 0$, existe $C > 0$ tal que

$$\int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} e^{-\eta|\xi|^{4-2\theta}t} |\xi|^k d\xi \leq C(1+t)^{-\frac{n+k}{4-2\theta}}, \quad \forall t > 0. \quad (4.33)$$

Agora, se $n \geq 5$, (4.33) é válida em particular para $k = 0$ e $k = -4$.

E assim (4.32) e (4.33) implicam em

$$\int_{\delta \leq |\xi| \leq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq C(1+t)^{-\frac{n-4}{4-2\theta}} \|u_1\|_{L^1}^2 + C(1+t)^{-\frac{n}{4-2\theta}} \|u_0\|_{L^1}^2,$$

para todo $t \geq 0$.

Fazendo $\delta \rightarrow 0$, temos

$$\int_{|\xi| \leq 1} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq C(1+t)^{-\frac{n-4}{4-2\theta}} \|u_1\|_{L^1}^2 + C(1+t)^{-\frac{n}{4-2\theta}} \|u_0\|_{L^1}^2 \quad (4.34)$$

para todo $t \geq 0$.

E portanto, somando as equações (4.31) e (4.34) segue que

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 &= \|\widehat{u}(\xi)\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C(1+t)^{-\frac{n-4}{4-2\theta}} \|u_1\|_{L^1}^2 + C(1+t)^{-\frac{n}{4-2\theta}} \|u_0\|_{L^1}^2 \\ &\quad + Ce^{-\alpha \varepsilon t} (\|u_1\|^2 + \|u_0\|^2), \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$. ■

4.3 A escolha da função ρ

Nos Capítulos 2 e 3 a função ρ foi escolhida baseada no trabalho de Ikehata-Natsume [13]. Nesta seção daremos a justificativa para a escolha da função ρ para o caso da equação de placas.

Buscamos uma função $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz os Lemas 4.3, 4.4 e 4.5. Seja ρ uma função da forma $\rho(\xi) = \varepsilon |\xi|^\beta$, onde ε é uma constante positiva.

Para a alta frequência ($|\xi| \geq 1$), a escolha de ρ é mais simples. Basta escolher $\rho(\xi) = \varepsilon$ para obtermos um decaimento exponencial para a energia correspondente no espaço de Fourier. Vamos justificar

a escolha de ρ para a baixa frequência ($|\xi| \leq 1$).

No primeiro lema, ρ deve ser tal que $R(t, \xi) \leq \varepsilon F(t, \xi)$ para alguma constante $\varepsilon > 0$, ou seja, tal que

$$\rho(\xi)|\widehat{u}_t|^2 \leq \varepsilon(|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + \rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}|^2), \quad \forall |\xi| \in \mathbb{R}. \quad (4.35)$$

Para tanto, é suficiente que $0 < \rho(\xi) \leq \varepsilon|\xi|^{2\theta}$.

No segundo lema, queremos $\rho(\xi)E(t, \xi) \leq NF(t, \xi)$, para alguma constante positiva N , ou seja, queremos encontrar $N > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \rho(\xi)E(t, \xi) &= \frac{1}{2}\rho(\xi)|\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}\rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}|^2 + \rho(\xi)^2\Re(\widehat{u}_t\bar{\widehat{u}}) + \frac{1}{2}\rho(\xi)^2|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 \\ &\leq N(|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t|^2 + \rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}|^2). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Observe que para que a estimativa acima ocorra, devemos ter necessariamente

$$\frac{1}{2}\rho(\xi)^2|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 \leq N\rho(\xi)|\xi|^4|\widehat{u}|^2,$$

ou seja,

$$\frac{\varepsilon^2}{2}|\xi|^{2\beta}|\xi|^{2\theta}|\widehat{u}|^2 \leq N\varepsilon|\xi|^\beta|\xi|^4|\widehat{u}|^2,$$

ou ainda,

$$\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^\beta \leq N|\xi|^{4-2\theta}. \quad (4.37)$$

Portanto, a função ρ não pode ser maior que uma constante multi-

plicada por $|\xi|^{4-2\theta}$. Definimos

$$\rho(\xi) = \varepsilon|\xi|^{4-2\theta}$$

para o caso $|\xi| \leq 1$.

Com essa escolha vale $\rho(\xi) \leq \varepsilon|\xi|^{2\theta}$ e é possível provar o Lemas 4.3, 4.4 e 4.5 e, conseqüentemente, o Teorema 4.1.

Referências Bibliográficas

- [1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II*. Comm. Pure Appl. Math., 17, 35-92, 1964.
- [3] A. N. Carvalho, J. W. Cholewa, *Local well posedness for strongly damped wave equations with critical nonlinearities*. Bull. Austral. Math. Soc. 66, 443-463, 2002.
- [4] H. Brezis, *Análisis funcional Teoría y aplicaciones*. Alianza Editorial, Madrid, 1983.
- [5] R. C. Charão, *On the principle of limiting amplitude for perturbed elastic waves in 3D*, Boll. Unione Mat. Ital., 7, 10-B, 781-797, 1996.

- [6] R. C. Charão, R. Ikehata, *Decay of solutions for a semilinear system of elastic waves in an exterior domain with damping near infinity*, *Nonlinear Anal.*, 67, 398-429, 2007.
- [7] R. Chill, A. Haraux, *An optimal estimate for the difference of solutions of two abstract evolution equations.* *J. Diff. Eqns* 193, 385-395, 2003.
- [8] R. Dautray, J.-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology Volume 2: Functional and Variational Methods*, Springer, Berlin Heidelberg, 1988.
- [9] P. M. N. Dharmawardane, J. E. M. Rivera, S. Kawashima, *Decay property for second order hyperbolic systems of viscoelastic materials* *J. Math. Anal. Appl.*, 366, No. 2, 621-635, 2010.
- [10] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2002
- [11] A. M. Gomes, *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução*. Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1985.
- [12] K. Ide, K. Haramoto, S. Kawashima. *Decay property of regularity-loss type for dissipative Timoshenko system.* *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 18, 647-667, 2008.

- [13] R. Ikehata, M. Natsume *Energy Decay Estimates for Wave Equations with a Fractional Damping*. Differential and Integral Equations 25, No 9/10, 939-956, 2012.
- [14] R. Ikehata, *Decay estimates of solutions for the wave equations with strong damping terms in unbounded domains*. Math. Meth. Appl. Sci. 24, 659-670, 2001.
- [15] G. Karch, *Selfsimilar profiles in large time asymptotics of solutions to damped wave equations*. Studia. Math. 143, 175-197, 2000.
- [16] B. V. Kapitonov, *Decrease of a solution of an exterior boundary-value problem for a system in elastic theory*, Differ. Equ., 22, 332-337, 1986.
- [17] S. Kesavan, *Topics in functional analysis and applications*. Wiley Eastern Limited, Bangalore, 1989.
- [18] Y. Liu, *Decay of solutions to an inertial model for a semilinear plate equation with memory*, J. Math. Anal. Appl., 394, 616-632, 2012.
- [19] Y. Liu, S. Kawashima, *Decay property for a plate equation with memory-type dissipation*, Kinet. Relat. Models, 4, 531-547, 2011.
- [20] C. R. da Luz, R. Coimbra Charão, *Asymptotic properties for a semilinear plate equation in unbounded domains*, J. Hyperbolic Diff. Eqns., 6, 269-294, 2009.

- [21] L. A. Medeiros, P. H. Rivera, *Iniciação aos espaços de Sobolev*. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.
- [22] L. A. Medeiros, P. H. Rivera, *Espaços de Sobolev e aplicações às equações diferenciais parciais*. Textos de Métodos Matemáticos No. 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro.
- [23] G. P. Menzala, M. V. Ferreira, *Uniform stabilization of an electromagnetic-elasticity problem in exterior domains*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 18, 719-746, 2007.
- [24] G. P. Menzala, C. R. da Luz, *Large time behavior of anisotropic electromagnetic/elasticity equations in exterior domains*, J. Math. Anal. Appl. 359, 464-481, 2009.
- [25] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [26] G. Perla Menzala, *Equações Diferenciais: Ordinárias e Parciais*. Textos de Métodos Matemáticos No. 14, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.
- [27] P. Radu, G. Todorova, B. Yordanov, *Diffusion phenomenon in Hilbert spaces and applications*. J. Diff. Eqns. 250, 4200-4218. 2011.
- [28] Y. Shibata, *On the rate of decay of solutions to linear viscoelastic equation*. Math. Meth. Appl. Sci. 23, 203-226, 2000.

- [29] Y. Sugitani, S. Kawashima, *Decay estimates of solutions to a semi-linear dissipative plate equation*, J. Hyperbolic Diff. Eqns., 7, 471-501, 2010.
- [30] T. Umeda, S. Kawashima, Y. Shizuta, *On the decay of solutions to the linearized equations of electro-magneto-fluid dynamics*, Japan J. Appl. Math., 1, 435-457, 1984.