



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA**

**MTM410038 Teoria de Distribuições e Espaços de Sobolev**

**PRÉ-REQUISITOS:** Teoria da medida e integral de Lebesgue; MTM410029 Análise Funcional.

**Nº DE HORAS/AULA SEMANAIS:** 06

**EMENTA:** O Espaço das Funções Testes. Densidade. Distribuições em um aberto  $\Omega$  do  $\mathbb{R}^n$ . Derivação de distribuições. Distribuições Temperadas. Transformada de Fourier em  $L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $S(\mathbb{R}^n)$  e  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Transformada de Fourier de Distribuições Temperadas. Teorema de Plancherel. Os Espaços de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$ . Propriedades, Reflexividade, Separabilidade, Dual. O Espaço  $W_0^{m,p}(\Omega)$ . Operadores de Prolongamento. Os Espaços de Sobolev  $H^s(\Omega)$  e  $H^s(\partial\Omega)$ ,  $s$  real,  $\Omega$  subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ . O Teorema do Traço. Aplicações a Equações Diferenciais Parciais. Soluções generalizadas e Existência e Unicidade de Problemas de Valor Inicial e de Fronteira.

**OBJETIVO:** Introduzir o aluno aos fundamentos da teoria moderna das equações diferenciais parciais e suas aplicações.

**PROGRAMA DETALHADO:**

**1. Revisão de espaços  $L^p(\Omega)$ ,  $p \in [1, +\infty]$ . [2]**

- 1.1 Definição e propriedades elementares. Teorema de Riesz-Fischer.
- 1.2 Desigualdades de Hölder e Minkowski
- 1.3 Reflexividade e separabilidade. Dual.
- 1.4 Convergência fraca.

**2. Distribuições [3]**

- 2.1 O espaço das funções testes. Noção de convergência.
- 2.2 Convolação com funções de  $L^p(\Omega)$ .
- 2.3 Sucessão Regularizante. Partição da unicidade.
- 2.4 Densidade em  $L^p(\Omega)$ .
- 2.5 Distribuições. Definição e propriedades.
- 2.6 O espaço das Distribuições. Convergência fraca.
- 2.6 Funções localmente integráveis e distribuições.
- 2.7 Derivação de distribuições. Propriedades.

**3. Transformada de Fourier. [3]**

- 3.1 O espaço de Schwarz  $S(\mathbb{R}^n)$ .
- 3.2 Propriedades. Densidade.
- 3.3 Distribuições temperadas.
- 3.4 Transformada de Fourier no espaço de Schwarz.
- 3.5 Transformada de Fourier no  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

3.6 Transformada de Fourier de distribuições temperadas. Teorema de Plancharel.

#### **4. Espaços de Sobolev [1]**

4.1 Definição e propriedades elementares.

4.2 Geometria dos Espaços de Sobolev.

4.3 Reflexividade . Separabilidade. Dual.

4.4 O Espaço  $W_0^{m,p}(\Omega)$ .

4.5 Densidade nos Espaços de Sobolev.

4.6 Operadores de prolongamento.

4.7 Os Espaços de Sobolev  $H^s(\Omega)$  e  $H^s(\partial\Omega)$ ,  $s$  real.

4.8 Desigualdades de Sobolev. Teoremas de Imersão. Teorema de Rellich - Kondrasov.

4.9 Normas equivalentes. Desigualdade de Poincaré.

4.10 Teorema do traço.

#### **5. Aplicações: Soluções fracas de problemas a valores no contorno elípticos. [3]**

5.1 problemas variacionais abstratos: teoremas de Stampachia e de Lax-Milgram.

5.2 Exemplos de problemas a valores no contorno elípticos: o problema de Dirichlet para operadores elípticos de segunda ordem, o sistema da elasticidade, o sistema de Stokes.

#### ***BIBLIOGRAFIA PRINCIPAL:***

1. Medeiros, L. A., Miranda, M. M., *Espaços de Sobolev*, 2a. Edição, Instituto de Matemática, UFRJ, 2004.

2. Brezis, H., *Analyse Fonctionnelle: théorie et Applications*, Masson (1983).

3. Kesavan, S., *Topics in Functional Analysis and Applications*, Wiley (1989).

#### ***Bibliografia Complementar:***

1. Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press (1975).

2. Evans, L. C., *Partial differential equations*, American Mathematical Society, 2002.

3. Hörmander, L., *The Analysis of Linear Differential Operators I, Distribution Theory and Fourier Analysis*, Springer-Verlag, 2ed., 1990

4. Medeiros, L. A. , Rivera, P. H. *Iniciação aos Espaços de Sobolev*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro (1977).

5. Renardy, M., Rogers, R.C., *An introduction to partial differential equations*, Springer-Verlag, 1993.