



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA**

MTM410027 Medida e Integração

PRÉ-REQUISITO: x-x

Nº DE HORAS/AULA SEMANAIS: 06

EMENTA – Funções mensuráveis, medidas, integral, funções integráveis, espaços L_p , formas de convergência, decomposição de medidas, geração de medidas, medidas produto, medida de Lebesgue.

OBJETIVO: Propiciar ao aluno condições de dominar e aplicar os conceitos relativos à teoria da medida.

PROGRAMA DETALHADO:

Parte I: Elementos de Integração

1. Introdução – Cap. 1 do livro texto:

- Razões para o desenvolvimento da integral de Lebesgue.
- Comparação com a integral de Riemann.
- Números reais estendidos.

2. Funções mensuráveis – Cap. 2 do livro texto:

- Funções e conjuntos mensuráveis.
- Funções complexas.
- Funções entre espaços mensuráveis.

3. Medidas – Cap. 3 do livro texto:

- Medidas.
- Espaços de medida.

4. Volumes de blocos e intervalos – Cap. 11 do livro texto:

- Intervalos, blocos em \mathbb{R}^n , volume n-dimensional, invariância por translação.

5. Medida exterior – Cap. 12 do livro texto:

- A medida exterior em \mathbb{R}^n , propriedades da medida exterior, invariância por translação.

6. Conjuntos mensuráveis – Cap. 13 do livro texto:

- σ -álgebras, medida em uma σ -álgebra.
- A condição de Carathéodory, teorema de Carathéodory.
- Conjuntos de Lebesgue, medida de Lebesgue, unicidade da medida de Lebesgue, algumas propriedades.

7. A integral – Cap. 4 do livro texto:

- Funções simples e suas integrais.

- A integral de uma função mensurável real estendida não negativa.
- O Teorema da Convergência Monótona.
- Lema de Fatou.
- Propriedades da integral.

8. Funções integráveis – Cap. 5 do livro texto:

- Funções reais integráveis.
- Positividade e linearidade da integral.
- O Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.
- Integrandos que dependem de um parâmetro.

9. Os Espaços de Lebesgue L_p – Cap. 6 do livro texto:

- Espaços lineares normados.
- Os espaços L_p .
- Desigualdades de Hölder e Minkowski.
- O Teorema do Completamento.
- O espaço L_∞ .

10. Formas de Convergência – Cap. 7 do livro texto:

- Relação entre: convergências em L_p , convergência uniforme, convergência quase sempre, convergência em medida, convergência quase uniforme
- Teorema de Egoroff.
- Teorema da convergência de Vitali.

11. Decomposição de medidas – Cap. 8 do livro texto:

- Teoremas da decomposição de Hahn e Jordan.
- Teorema de Radon-Nikodym.
- Teorema da decomposição de Lebesgue.
- Teorema da Representação de Riesz para L_p .

12. Geração de Medidas – Cap. 9 do livro texto:

- Medidas em álgebras de conjuntos.
- A extensão de medidas, teoremas de extensão de Hahn e Carathéodory.
- A medida de Lebesgue.
- O teorema da representação de Riesz para $C([a,b])$.

13. Medidas produto – Cap. 10 do livro texto:

- Retângulos, o Teorema da Medida Produto.
- Teorema de Tonelli e Fubini.

Parte II: Elementos da Medida de Lebesgue

14. Exemplos de conjuntos mensuráveis – Cap. 14 do livro texto:

- Conjunto de Borel.
- Conjunto nulo.
- Invariância por translação.
- Existência de conjuntos que não são de Borel.

15. Aproximação de conjuntos mensuráveis – Cap. 15 do livro texto:

- Aproximação por conjuntos abertos, por conjuntos fechados, por conjuntos compactos, por blocos.

16. Aditividade e não aditividade – Cap. 16 do livro texto:

- Aditividade.
- Catathéodory revisitado.
- Medida interior.

17. Conjunto não mensurável e conjunto que não é de Borel – Cap. 17 do livro texto:

- Conjunto diferença, equivalência racional, conjunto de Vitali.
- Decomposição não aditiva.
- Existência de conjuntos que não são de Borel.

BIBLIOGRAFIA:

Livro texto:

Bartle, R.G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, New York: J.Wiley, 1995.

Bibliografia complementar:

- 1) Royden, H.L., *Real Analysis*, New York: Macmillan, 1963.
- 2) Isnard, C. *Introdução à medida e integração*, Rio de Janeiro: IMPA, 2007.