
Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

**Métodos Tipo Newton Inexatos
para Problemas Inversos**

Fábio J. Margotti

Orientador: Prof. Dr. Antônio C. G. Leitão

Florianópolis

Abril de 2011

Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e

Computação Científica

Métodos Tipo Newton Inexatos para Problemas Inversos

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Matemática Aplicada.

Fábio J. Margotti

Florianópolis

Abril de 2011

Métodos Tipo Newton Inexatos para Problemas Inversos

por

Fábio J. Margotti

Esta dissertação foi julgada para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, Área de Concentração em Matemática Aplicada, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Dr. Ruy Exel Filho

Coordenador da Pós-Graduação em Matemática

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Antônio C. G. Leitão
(UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Uri Ascher (British Columbia)

Prof. Dr. José Mario Martinez Pérez
(UNICAMP)

Prof. Dra. Melissa Weber Mendonça
(UFSC)

Florianópolis, 15 de abril de 2011.

Resumo

Essa dissertação se dedica ao estudo de dois algoritmos do tipo Newton inexatos, usados para a obtenção de soluções regularizadas de problemas inversos não lineares e mal postos. O estudo abrange as propriedades de convergência e estabilidade das soluções computadas pelos algoritmos iterativos em questão, além de estabelecer e analisar taxas de convergência mediante condições de fonte assumidas.

Uma implementação numérica de identificação de parâmetro num problema elíptico é feita ao final do trabalho e dá o suporte necessário para a verificação dos resultados teóricos.

Abstract

This monograph is dedicated to the study of two different algorithms of inexact Newton type, used to obtain regularized solutions of nonlinear ill-posed inverse problems. The study includes convergence and stability properties of the computed solutions from the algorithms. Moreover, it establishes and analyses convergence rates from the assumption of source conditions.

A numerical implementation for a parameter identification in an elliptic problem on the end of the work gives the necessary support for the verification of theoretical results.

Notações

Símbolo	Significado
X, Y	Espaços de Hilbert
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto interno no espaço X ou em Y
$ \cdot $	Norma padrão em X ou Y
$D(F)$	Domínio da função F
x^+	Única solução da equação $F(x) = y$ na bola $B_\rho(x^+)$
x_n	Vetor corrente livre de ruídos
x_0	Aproximação inicial para x^+
δ	Nível de ruídos
x_n^δ	Vetor corrente com ruídos
y^δ	Dados com ruídos satisfazendo $ y - y^\delta \leq \delta$
$E(v, w)$	Erro de linearização: $F(v) - F(w) - F'(w)(v - w)$
e_n	Erro na n -ésima iteração: $x^+ - x_n^\delta$
b_n	Resíduo sem ruídos: $y - F(x_n)$
b_n^δ	Resíduo com ruídos: $y^\delta - F(x_n^\delta)$
b_{ξ_n}	Resíduo no ponto ξ_n : $y - F(\xi_n)$
d_n	Norma do resíduo com ruídos: $ b_n^\delta $
ω	Constante da condição do cone tangencial
$\epsilon(x_n^\delta, \delta)$	$(1 + \omega)\delta + \omega d_n$
τ	Constante utilizada no princípio da discrepância
$N(\delta)$	Índice da última iteração com nível de ruídos δ

Símbolo	Significado
A	Derivada da função F calculada em x^+
A_n	Derivada da função F calculada em x_n^δ
$\sigma(A)$	Espectro do operador A
$N(A)$	Núcleo do operador A
$R(A)$	Imagem do operador A
A^*	Adjunta do operador A
$A^\dagger$	Pseudo-inversa do operador A
(γ_n)	sequência de termos de penalização do IRGN
(μ_n)	sequência de termos forçantes do REGINN
$(s_{n,m})_m$	sequência gerada na iteração interna do REGINN
$P_W v$	Projeção do vetor v sobre o espaço W
$B^\perp$	Complemento ortogonal do conjunto B
$\overline{B}$	Fecho do conjunto B
$\nabla \varphi$	Gradiente do funcional φ
$L^p(\Omega)$	Espaço das funções p -integráveis sobre Ω
$W^{m,p}(\Omega)$	Espaço de Sobolev das funções com derivadas
	distribucionais m -integráveis sobre Ω até ordem p
$H^m(\Omega)$	Espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$
$C_0^\infty(\Omega)$	Espaço das funções $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ infinitamente
	diferenciáveis e com suporte compacto
$H_0^m(\Omega)$	Fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$
$D(\overline{\Omega})$	Espaço das funções $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ restritas a Ω

Sumário

1	Métodos Iterativos para Problemas Inversos	1
1.1	Problemas Inversos e Mal Postos	1
1.1.1	Algoritmos Iterativos	2
1.2	Métodos Iterativos Clássicos	4
1.3	Métodos tipo Newton	8
1.3.1	Métodos de Newton e Gauss-Newton	8
1.3.2	Métodos de Levenberg-Marquardt e IRGN	11
1.4	Métodos tipo Newton Inexatos	14
1.4.1	REGINN	15
1.4.2	IRGN Inexato	18
2	Algoritmo REGINN	21
2.1	Apresentação	21
2.2	Convergência do Método	32
2.3	Taxas de Convergência	50
3	Método IRGN Inexato	81
3.1	Apresentação	81
3.2	Convergência do Método	84
3.3	Taxas de Convergência	96
3.4	Solução do Sistema Linear	113
4	Implementação Numérica do REGINN	117
4.1	Apresentação do Problema Inverso	117
4.2	O Modelo Matemático	119
4.3	Descrição do Algoritmo	120
4.4	Exemplos Numéricos	123

4.4.1	Primeiro Exemplo	123
4.4.2	Segundo Exemplo	125
A	Análise Funcional	135
B	Estimativas Relevantes	141
C	Técnicas de Regularização	151

Introdução

O objetivo desse trabalho é estudar dois algoritmos iterativos diferentes para resolução de problemas inversos e mal postos e que de algum modo utilizam o método de Newton como base. Esses algoritmos são chamados de REGINN e de IRGN *inexato*. Ambos são considerados métodos do tipo Newton *inexato* porque em cada passo, procuram resolver o sistema

$$F(x) = y, \tag{1}$$

linearizando-o em torno do vetor corrente x_n e em seguida encontrando uma solução aproximada para a equação linearizada. Consideramos que $F : X \longrightarrow Y$ é um operador (possivelmente não linear) entre os espaços de Hilbert X e Y .

Em aplicações práticas, o vetor *exato* $y \in Y$ normalmente não está disponível. Através da leitura de resultados de experimentos obtemos apenas uma *aproximação* $y^\delta \in Y$ contaminada com *ruídos*, satisfazendo $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ com algum nível de ruídos $\delta > 0$ conhecido. Esta situação acarreta uma série de problemas de *estabilidade*.

O estudo desses algoritmos envolve a demonstração de que eles são encerrados após um número finito $N = N(\delta)$ de iterações, produzindo uma aproximação $x_N \in X$ para o vetor procurado $x^+ \in X$, solução de (1). Os teoremas apresentados no trabalho mostram ainda que as aproximações obtidas pelos algoritmos são *estáveis*, no sentido de que $x_N \longrightarrow x^+$ quando $\delta \longrightarrow 0$.

A dissertação está estruturada da seguinte maneira: no capítulo 1, apresentaremos alguns conceitos bastante conhecidos sobre problemas inversos e mal postos, alguns métodos iterativos clássicos, além de métodos do tipo Newton e do tipo Newton *inexatos* para a resolução desses problemas. Apresentaremos também nesse capítulo, algumas

ideias básicas sobre o funcionamento do algoritmo REGINN e do IRGN inexato.

O capítulo 2 está baseado principalmente no estudo dos artigos [30], [31] e [32] e nele apresentamos o algoritmo REGINN. Os principais resultados desse capítulo são apresentados no teorema 9, que mostra que o algoritmo produz aproximações estáveis e no teorema 19, que estabelece taxas de convergência, provando que existe um número $\lambda_{\min} < 1$ tal que se assumirmos a condição de fonte $x^+ - x_0 \in R(A^*A)^\lambda$ com $\lambda \in (\lambda_{\min}, 1]$, então a taxa de convergência $\|x^+ - x_{N(\delta)}^\delta\| = O\left(\delta^{\frac{\lambda - \lambda_{\min}}{1 + \lambda}}\right)$ é obtida.

O capítulo 3 desse trabalho está baseado no artigo [16] e nele exibimos um estudo da convergência do conhecido método IRGN. Na implementação desse método é necessário resolver um sistema linear em cada passo. O foco desse capítulo é mostrar que podemos resolver esse sistema linear de maneira inexata sem comprometer a convergência do método. Ainda, vamos estudar o comportamento do algoritmo utilizando condições de fonte mais gerais do que aquelas comumente exigidas¹. O principal resultado do capítulo é apresentado no teorema 26, que estabelece que se for satisfeita a condição de fonte $x_0 - x^+ \in R(f(A^*A))$ para alguma função índice f , então o IRGN inexato produz soluções estáveis e a taxa de convergência $\|x_N^\delta - x^+\| = O\left(f(u^{-1}(\delta))\right)$ é obtida, onde $u(x) := \sqrt{x}f(x)$. Ao final do capítulo encontra-se a seção 3.4, onde explicamos como é possível utilizarmos o método do gradiente conjugado para resolver o sistema linear usado na implementação do IRGN inexato.

Finalmente, no capítulo 4, apresentaremos uma implementação numérica do REGINN aplicado para identificar a função $a(x)$ no problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' = f(x), & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases},$$

onde a função $f(x)$ e uma aproximação para a função $u(x)$ são conhecidas.

Após as conclusões do trabalho estão apresentados 3 apêndices, sendo que o primeiro deles aborda alguns conceitos básicos de análise

¹Vamos assumir a condição de fonte (3.2) ao invés de (1.21).

funcional, o segundo apresenta as demonstrações de algumas desigualdades e resultados intermediários e finalmente no terceiro apêndice, apresentamos algumas ideias e conceitos relacionados a técnicas de regularização.

Números entre parênteses, como (1.1) ou (3.7) correspondem a referências do texto. Letras e números entre parênteses, como (C.3) ou (A.12) correspondem a referências apresentadas nos apêndices. Finalmente, números entre colchetes, como [1] ou [18], representam citações bibliográficas.

Capítulo 1

Métodos Iterativos para Problemas Inversos

1.1 Problemas Inversos e Mal Postos

Problemas inversos aparecem muito frequentemente em modelos de aplicações reais. A resolução de tais problemas possui aplicações em diversas áreas tais como: prospecção geológica, problemas de restauração de imagem, tomografia computadorizada e tomografia por impedância, problemas de reconstrução de distribuição de temperatura num objeto, difusão num meio heterogêneo, problemas de identificação de parâmetro, diferenciação numérica, diversas aplicações em física entre muitas outras (veja detalhes nos livros [12, 20, 34]). Uma implementação numérica do problema de tomografia por impedância (EIT) pode ser encontrado na dissertação [7]).

O grande desafio se apresenta quando tentamos de alguma maneira contornar os problemas de instabilidade que com muita frequência se apresentam nos problemas inversos. Para entender melhor este tipo de situação, vamos definir o que entendemos ser um sistema mal posto. A definição a seguir pode ser obtida na referência [15].

Definição 1 *Sejam X e Y espaços topológicos, $F : X \longrightarrow Y$. Dizemos que o sistema $F(x) = y$ é bem posto se F é inversível e sua inversa é contínua. Dizemos que este sistema é mal posto se ele não for bem*

posto.

Sejam X e Y espaços de Hilbert e $F : D(F) \subset X \longrightarrow Y$ uma função de classe $C^1(D(F))$ (isto é, F é continuamente Fréchet diferenciável em seu domínio). Suponha que o sistema mal posto

$$F(x) = y, \quad (1.1)$$

possui uma única solução localmente, isto é, suponha que existe um $\rho > 0$ de tal modo que $x^+ \in D(F)$ seja a única solução de (1.1) na bola $B_\rho(x^+)$ de centro em x^+ e raio ρ . Portanto

$$F(x^+) = y. \quad (1.2)$$

O *problema direto* associado a equação (1.1) consiste em encontrar o vetor $y \in Y$, supondo-se conhecido o vetor $x \in X$ e a função F . Em contrapartida, o *problema inverso* associado a essa equação consiste na determinação de algum vetor $x \in X$ (supondo que ele exista) conhecendo-se o vetor $y \in Y$ e a função F . Desejamos resolver o problema inverso, mas com algumas complicações adicionais. O nosso objetivo é encontrar uma aproximação $\bar{x} \in X$ para x^+ , supondo que o vetor $y \in Y$ seja *desconhecido* e dispondo somente de um vetor perturbado $y^\delta \in Y$ satisfazendo

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta, \quad (1.3)$$

onde o *nível de ruídos* $\delta > 0$ é conhecido.

1.1.1 Algoritmos Iterativos

Uma maneira de tentarmos obter $\bar{x}$, aproximação para x^+ , é usando algoritmos iterativos. Nesse caso, supomos disponível uma aproximação inicial $x_0 \in D(F)$ para o vetor x^+ . Na n -ésima iteração, calculamos o *passo de correção* $h_n \in X$, o qual é somado ao *vetor corrente* x_n , providenciando a *atualização* x_{n+1} .

Gostaríamos de distinguir claramente o vetor corrente produzido por uma iteração utilizando o vetor perturbado y^δ e utilizando o vetor livre de ruídos y . Por isso, convencionemos que o vetor x_n^δ representará o vetor corrente na primeira situação e que x_n representará o vetor

corrente na segunda, isto é, $x_n = x_n^0$ representará o vetor corrente no caso livre de ruídos $\delta = 0$. Portanto, teremos como padrão a iteração

$$x_{n+1}^\delta = x_n^\delta + h_n. \quad (1.4)$$

Repare que como o vetor y não é conhecido exatamente, não podemos esperar encontrar o vetor x^+ exatamente. Por esse motivo, estaremos satisfeitos se conseguirmos obter uma aproximação $\bar{x}$, desde que esta aproximação possua propriedades adequadas. Pelo fato do sistema (1.1) ser mal posto e porque possuímos apenas o vetor perturbado y^δ satisfazendo (1.3), devemos parar a iteração (1.4) após um número apropriado N de iterações e tomar $\bar{x} := x_N^\delta$ como uma aproximação para o vetor x^+ . Da inequação (1.3) e da igualdade (1.2) podemos concluir apenas que a função F aplicada na solução x^+ é um vetor *qualquer* pertencente a bola centrada em y^δ e de raio δ , isto é, sabemos somente que a solução x^+ satisfaz

$$\|F(x^+) - y^\delta\| \leq \delta.$$

Por isso, se em algum momento encontrarmos um vetor x_n^δ satisfazendo

$$\|F(x_n^\delta) - y^\delta\| \leq \delta,$$

Devemos encerrar a iteração e aceitar x_n^δ como uma aproximação para x^+ .

O *princípio da discrepância de Morozov* utiliza uma ideia similar. Para utilizarmos este princípio, devemos escolher uma constante $\tau > 1$ apropriadamente e encerrar a iteração ao encontrarmos $N \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$\|F(x_N^\delta) - y^\delta\| \leq \tau\delta < \|F(x_n^\delta) - y^\delta\|, \quad 0 \leq n \leq N, \quad (1.5)$$

isto é, $n = N$ é o primeiro número natural que torna o resíduo menor ou igual a $\tau\delta$, ou seja, é o primeiro número natural que satisfaz $\|F(x_n^\delta) - y^\delta\| \leq \tau\delta$. Esse número N depende do nível de ruído $\delta > 0$, ou seja, $N = N(\delta)$. A constante $\tau > 1$ deve ser escolhida apropriadamente, normalmente dependendo de imposições sobre a não linearidade de F .

Uma propriedade desejada de um algoritmo iterativo para a resolução de um problema inverso, é que este produza soluções estáveis,

no sentido de que $N(\delta)$ deve ser escolhido de modo que a *propriedade de regularização*

$$x_{N(\delta)}^\delta \longrightarrow x^+, \text{ quando } \delta \longrightarrow 0, \quad (1.6)$$

seja satisfeita.

Do princípio da discrepância (1.5) e da desigualdade (1.3) decorre que

$$\begin{aligned} \left\| F\left(x_{N(\delta)}^\delta\right) - y \right\| &\leq \left\| F\left(x_{N(\delta)}^\delta\right) - y^\delta \right\| + \left\| y - y^\delta \right\| \quad (1.7) \\ &\leq \tau\delta + \delta = (\tau + 1)\delta. \end{aligned}$$

Logo, $\left\| F\left(x_{N(\delta)}^\delta\right) - y \right\| \longrightarrow 0$ quando $\delta \longrightarrow 0$. Podemos concluir da igualdade (1.2), que se a sequência $x_{N(\delta)}^\delta$ converge para um ponto $a \in B_\rho(x^+)$ quando $\delta \longrightarrow 0$, então $a = x^+$, ou seja, a propriedade de regularização (1.6) é satisfeita.

1.2 Métodos Iterativos Clássicos

Alguns métodos iterativos conhecidos podem ser aplicados para a resolução de problemas inversos mal postos. Maiores detalhes sobre os métodos apresentados a seguir podem ser obtidos em [18] e [14].

Uma classe importante de métodos iterativos para a resolução de tais problemas são os *métodos do tipo gradiente*. Estes métodos procuram minimizar algum funcional apropriado utilizando um passo na direção contrária ao gradiente desse funcional. Por exemplo, podemos pensar em minimizar o funcional

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \left\| F(x) - y^\delta \right\|^2 \quad (1.8)$$

sujeito a $x \in D(F)$. Como o gradiente do funcional φ no ponto $x \in D(F)$ é dado por $-F'(x)^*(y^\delta - F(x))$, tentamos partir de um ponto x e seguir na direção oposta ao gradiente de φ (se $-\nabla\varphi(x) \neq 0$ então esse vetor é uma direção de descida para o funcional φ a partir de x porque $\langle \nabla\varphi(x), -\nabla\varphi(x) \rangle < 0$ (veja definição 2, página 23 e o lema

imediatamente seguinte)). A partir desse raciocínio obtemos a iteração

$$x_{n+1}^{\delta} := x_n^{\delta} + w_n^{\delta} F'(x_n^{\delta})^* (y^{\delta} - F(x_n^{\delta})), \quad (1.9)$$

onde $x_0 := x_0^{\delta}$ é uma aproximação inicial e w_n^{δ} é utilizado para controlar o tamanho do passo.

Se tomarmos $w_n^{\delta} = w$ constante, obtemos o *método de Landweber*. Nesse caso a constante w deve ser escolhida de modo que $w \|F'(x^+)\|^2 \leq 1$ (veja [18]). Então podemos tomar simplesmente $w = 1$ caso $\|F'(v)\| \leq 1$ para todo $v \in D(F)$ suficientemente próximo da solução x^+ .

Utilizando o princípio da discrepância como critério de parada e sob restrições adequadas na não linearidade da função F , é possível provar que o método produz aproximações estáveis para x^+ . Assumindo condições de fonte adequadas, podemos provar ainda taxas de convergência [18, teorema 2.13.].

O método de Landweber será utilizado na iteração interna do REGINN na implementação numérica apresentada no capítulo 4.

Um outro método do tipo gradiente é conhecido como *método da máxima descida*. Para simplificar o raciocínio, vamos imaginar que queremos resolver o sistema *linear* $Ax = b$, onde $A : X \rightarrow X$ é um operador linear, limitado, auto-adjunto e estritamente positivo (isto é, $\langle x, Ax \rangle > 0$ para todo vetor não nulo $x \in X$) atuando no espaço de Hilbert real X . Essas hipóteses garantem que A é inversível e portanto a solução procurada existe e é única. Defina o funcional $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$J(x) := \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle - \langle x, b \rangle. \quad (1.10)$$

Então $\nabla J(x) = Ax - b$. Logo $\nabla J(x) = 0$ se e somente se x é solução do sistema $Ax = b$. Para encontrar o vetor x onde $\nabla J(x) = 0$, tentamos minimizar o funcional J . Para isso, começamos de um ponto inicial x_0 e procedemos iterativamente. Na n -ésima iteração, partimos do vetor corrente x_n e seguimos na direção oposta ao gradiente de J , isto é, o passo deve ser dado na direção do vetor $-\nabla J(x_n) = b - Ax_n =: r_n$. Para escolher o tamanho do passo, determina-se o número $\lambda > 0$ que minimiza $J(x_n + \lambda r_n)$. Se $r_n \neq 0$,

$$\frac{d}{d\lambda} J(x_n + \lambda r_n) = 0 \implies \lambda_n = \frac{\langle r_n, r_n \rangle}{\langle r_n, Ar_n \rangle}.$$

Repare que se $r_n = 0$ então x_n é a solução do sistema $Ax = b$. Repare ainda que para $r_n \neq 0$, $\frac{d^2}{d\lambda^2} J(x_n + \lambda r_n) = \langle r_n, Ar_n \rangle > 0$, logo $\lambda = \lambda_n$ é o valor apropriado para minimizar $J(x_n + \lambda r_n)$.

Desse modo, podemos resumir dizendo que o método da máxima descida inicia com uma aproximação x_0 e na iteração n toma $\lambda_n = \frac{\langle r_n, r_n \rangle}{\langle r_n, Ar_n \rangle}$, onde $r_n := b - Ax_n$ é o resíduo no vetor corrente, e em seguida define-se $x_{n+1} = x_n + \lambda_n r_n$.

Esse algoritmo pode também ser aplicado à equação não linear (1.1) fazendo-se algumas modificações. Se supormos que não está disponível o vetor y , mas somente sua versão perturbada y^δ satisfazendo (1.3), devemos escolher o tamanho do passo $\lambda = \lambda_n$ de modo que o funcional $\phi_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ definido por

$$\phi_n^\delta(\lambda) := \varphi(x_n^\delta + \lambda \nabla \varphi(x_n^\delta))$$

seja minimizado, onde φ é tomado como em (1.8). Faz-se então $x_{n+1}^\delta = x_n^\delta + \lambda_n \nabla \varphi(x_n^\delta)$. Repare que nesse caso, o método da máxima descida possui o padrão apresentado na equação (1.9) com $w_n^\delta := \arg \min_{\lambda \geq 0} \phi_n^\delta(\lambda)$.

Chamamos a atenção para o fato de que o cálculo de w_n^δ envolve a minimização de um funcional, mas essa minimização é em geral mais simples do que a minimização direta de φ em (1.8), uma vez que w_n^δ é calculada com a minimização do funcional ϕ_n^δ , com domínio em $\mathbb{R}_+$.

Uma variação do método da máxima descida é o *método do gradiente conjugado*. Por simplificação imaginemos que estamos tentando resolver o sistema linear $Ax = b$, onde $A : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ é simétrica e definida positiva. Similarmente ao método da máxima descida, escolhamos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e fazemos $x_{n+1} = x_n + \lambda_n p_n$, $n = 0, 1, \dots, k-1$.

Para o método do gradiente conjugado, definimos $p_0 := r_0$ e escolhamos p_j , $j = 1, 2, \dots, k-1$ de modo que o conjunto $P := \{p_0, \dots, p_{k-1}\}$ seja *A-conjugado*, ou seja, de modo que $\langle p_j, Ap_m \rangle = 0$ se $j \neq m$. Também de modo similar ao método da máxima descida, escolhamos o parâmetro $\lambda = \lambda_n$ de modo que o funcional $J(x_n + \lambda p_n)$ seja minimizado, onde J está definido em (1.10), ou seja, $\lambda_n := \arg \min_{\lambda \geq 0} J(x_n + \lambda p_n)$

com $\{p_0, \dots, p_{k-1}\}$ *A-conjugado*. Procedendo como no método da máxima descida obtemos $\lambda_n = \frac{\langle r_n, p_n \rangle}{\langle p_n, Ap_n \rangle}$.

Fazendo-se $p_0 := r_0$ e $p_{n+1} := r_{n+1} + \beta_n p_n$, devemos escolher o

parâmetro β_n de modo que o conjunto P seja A -conjugado. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p_n, Ap_{n+1} \rangle = \langle p_n, Ar_{n+1} + \beta_n Ap_n \rangle \\ \implies \beta_n &= -\frac{\langle p_n, Ar_{n+1} \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle}. \end{aligned}$$

Notando que

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= b - Ax_{n+1} = b - A(x_n + \lambda_n p_n) \\ &= b - Ax_n - \lambda_n Ap_n = r_n - \lambda_n Ap_n, \end{aligned}$$

obtemos a seguinte iteração: Tome uma aproximação x_0 para a solução de $Ax = b$, $r_0 = b - Ax_0$ e $p_0 = r_0$. Em seguida tome, para $n = 0, 1, \dots, k-1$,

$$x_{n+1} = x_n + \lambda_n p_n,$$

onde $\lambda_n = \frac{\langle r_n, p_n \rangle}{\langle p_n, Ap_n \rangle}$ e com as atualizações $r_{n+1} = r_n - \lambda_n Ap_n$, $\beta_n = -\frac{\langle p_n, Ar_{n+1} \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle}$ e $p_{n+1} := r_{n+1} + \beta_n p_n$.

É possível mostrar que este processo iterativo termina fornecendo o vetor $\bar{x}$, única solução do sistema $Ax = b$ (veja [14]), executando k passos (isto é, $x_k = \bar{x} = A^{-1}b$).

Esse método pode ser adaptado para resolver o sistema $Ax = b$ com $A : X \rightarrow X$ linear, limitado e estritamente positivo, onde X é um espaço de Hilbert real. Nesse caso, teremos $x_n \rightarrow x^* = A^{-1}b$ quando $n \rightarrow \infty$ e precisamos aplicar um critério de parada adequado para encerrar o algoritmo¹.

Uma outra classe importante de métodos iterativos para problemas inversos são os *métodos tipo Newton*. Nesses métodos procuramos linearizar a equação (1.1) (com y^δ no lugar de y satisfazendo (1.3)) em torno do vetor corrente x_n^δ e então resolver a equação linearizada (exatamente ou de alguma maneira aproximada). Desse modo, devemos começar com uma aproximação inicial $x_0^\delta := x_0$ e na n -ésima iteração calcular o passo s_n na equação linearizada

$$F'(x_n^\delta) s_n = y^\delta - F(x_n^\delta), \quad (1.11)$$

¹Na seção 3.4, utilizaremos esse método com um critério apropriado para resolver o sistema linear associado à resolução do IRGN inexato, estudado no capítulo 3.

para então fazer $x_{n+1}^\delta = x_n^\delta + s_n$.

Um método desse tipo é conhecido como o método de Gauss-Newton, no qual procuramos na n -ésima iteração minimizar o funcional

$$g_n(h) := \|F'(x_n^\delta)h - (y^\delta - F(x_n^\delta))\|^2, \quad (1.12)$$

sujeito a $x \in D(F)$ e em seguida tomar $x_{n+1}^\delta = x_n^\delta + h$.

Se o sistema (1.1) é mal posto, não é incomum que o sistema (1.11) também seja e por isso se torna necessária a aplicação de técnicas de regularização². Diferentes técnicas de regularização aplicadas a equação (1.11) e (1.12) levam a diferentes métodos do tipo Newton. Os métodos de Levenberg-Marquardt e IRGN são apresentados na subseção 1.3.2 e utilizam essa ideia como base. Pelo fato de "minimizarem" (1.12) de forma inexata (no sentido de que encontram $x \in D(F)$ que torne o funcional g_n apenas "pequeno suficiente"), esses métodos são chamados por alguns autores de métodos do tipo Newton *iterativamente regularizados*. Nesse trabalho, apresentaremos mais dois algoritmos desse tipo, os algoritmos REGINN e IRGN inexato, apresentados na seção 1.4, ao final desse capítulo. Chamaremos porém esses dois métodos de métodos do tipo Newton *inexatos* para diferenciá-los dos demais e por outros motivos que explicaremos mais adiante.

1.3 Métodos tipo Newton

1.3.1 Métodos de Newton e Gauss-Newton

Para um melhor entendimento dos algoritmos apresentados nos capítulos seguintes, vamos fazer alguns comentários e relembrar alguns fatos sobre os métodos de Newton e de Gauss-Newton. Consideremos inicialmente o caso livre de ruídos $\delta = 0$.

O método de Newton consiste em resolver (1.1) na forma

$$f(x) := F(x) - y = 0$$

a partir de uma aproximação inicial x_0 para x^+ . A ideia é linearizar a função f em torno de x_0 e em seguida, encontrar uma raiz s_0 para

²Veja o apêndice C para uma discussão mais aprofundada sobre técnicas de regularização.

essa linearização que será o *passo de Newton*. O passo de Newton será então somado ao vetor x_0 definindo o vetor x_1 . Em seguida, repete-se o processo para x_n no lugar de x_0 para $n = 1, 2, \dots$ e espera-se que $x_n \longrightarrow x^+$ quando $n \longrightarrow \infty$.

Desse modo, devemos resolver na iteração n , o sistema

$$F'(x_n) s_n = y - F(x_n), \quad (1.13)$$

para determinar s_n e então fazermos $x_{n+1} = x_n + s_n$.

É possível mostrar a convergência da sequência gerada pelo método de Newton para x^+ , solução de (1.1), desde que x_0 esteja suficientemente próximo de x^+ e desde que tenhamos algumas condições satisfeitas. Detalhes sobre o método para funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ podem ser obtidos em [36, 2, 11]. As referências [11, 28, 38, 25] apresentam uma generalização do método para $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Para uma generalização do método, considerando $f : X \longrightarrow Y$, com X e Y espaços de Banach, veja [29, 20]. Na referência [29], o autor enuncia o Teorema de *Newton-Kantorovich*, que apresenta condições suficientes para a convergência do método de Newton em espaços de Banach e em problemas bem postos. Em [20] encontrar-se uma demonstração para a convergência do método de Newton em espaços de Banach assumindo que a função F seja diferenciável próximo da solução x^+ e de modo que a derivada possua uma inversa a esquerda limitada³.

Por comodidades de notação, tomemos $b_n := y - F(x_n)$, $A_n := F'(x_n)$.

Alguns problemas podem ocorrer com o método de Newton se algumas restrições fortes não forem satisfeitas. Por exemplo, $b_n \in Y$ pode não pertencer a imagem do operador $A_n : X \longrightarrow Y$. Isto é, o sistema (1.13) pode não possuir solução. Isso ocorre caso $R(A_n) \neq Y$ e $b_n \in Y \setminus R(A_n)$ ⁴. Para uma situação dessas, poderíamos pensar em substituir s_n por um vetor $h_n \in X$ que satisfaça

$$\|A_n h_n - b_n\| = \inf_{h \in X} \|A_n h - b_n\|, \quad (1.14)$$

³De um modo geral, a exigência de que a inversa da derivada exista e seja um operador limitado é muito restritiva, no sentido de que isso pode não ser assegurado em problemas mal postos, conforme comentaremos mais adiante.

⁴Se assumirmos que o vetor b_n não está disponível, mas apenas a sua versão perturbada $b_n^\delta := y^\delta - F(x_n^\delta)$, é ainda mais razoável imaginar que o vetor b_n^δ pode pertencer a $Y \setminus R(A_n)$.

caso tal h_n exista⁵. Note que para determinar um vetor h_n satisfazendo (1.14), podemos minimizar o funcional $g_n : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definido por

$$g_n(h) := \|A_n h - b_n\|^2.$$

Repare que se $F'(x_n)$ for inversível, então o minimizador do funcional g_n é o passo de Newton s_n que satisfaz a equação (1.13). Se de alguma maneira pudermos encontrar $h_n \in X$ satisfazendo a equação (1.14), podemos tomar então $x_{n+1} = x_n + h_n$ para $n = 0, 1, 2, \dots$. Esse método é conhecido como *método de Gauss-Newton* (maiores detalhes em [22, 39]).

Caso X e Y sejam espaços de Hilbert, podemos utilizar a *condição de otimalidade* $g'_n(h) = 0$ para obter a *equação normal*

$$A_n^* A_n h = A_n^* b_n, \quad (1.15)$$

onde $A_n^* : Y \longrightarrow X$ representa a adjunta de A_n . Em seguida tomamos h_n como sendo uma solução de (1.15). Repare que caso o operador $A_n^* A_n : X \longrightarrow X$ seja inversível, então a solução de (1.15) será única e então o passo de Gauss-Newton na n -ésima iteração será dado por

$$h_n = (A_n^* A_n)^{-1} A_n^* b_n.$$

Quando consideramos o caso com ruídos, isto é, quando consideramos que y não está disponível mas apenas y^δ e $\delta > 0$ satisfazendo (1.3), uma série de problemas pode ocorrer. Por exemplo, se tomarmos $n = 0$ na igualdade (1.15) acima, então no caso com ruídos devemos aproximar b_0 por $b_0^\delta := y^\delta - F(x_0)$ e por isso, o lado direito dessa igualdade será aproximado pelo vetor $A_0^* b_0^\delta$. Se o operador F for contínuo e compacto, então A_0 também será compacto. Nesse caso, se tivermos $\dim X = \infty$, mesmo que $A_0^* A_0$ seja inversível, $(A_0^* A_0)^{-1}$ será não limitado, o que significa que o vetor

$$h_0^\delta := (A_0^* A_0)^{-1} A_0^* b_0^\delta \quad (1.16)$$

⁵O vetor h_n em (1.14) é chamado de uma solução de mínimos quadrados e a sua existência será garantida caso $b_n \in D(A_n^\dagger) = R(A_n) + R(A_n)^\perp$, onde $A_n^\dagger$ representa a pseudo-inversa de A_n . Veja o apêndice C para uma discussão mais detalhada.

pode estar arbitrariamente distante do vetor procurado h_0 .

Os problemas são ainda maiores no método de Newton. Por exemplo, o vetor com ruídos $b_n^\delta := y^\delta - F(x_n^\delta)$ pode não pertencer a imagem do operador $F'(x_n^\delta)$. Isso significa que o sistema (1.13) que define o passo de Newton, não tem solução. Mesmo que $y^\delta - F(x_n^\delta) \in R(F'(x_n^\delta))$ e mesmo que $F'(x_n^\delta)$ seja inversível sobre sua imagem, essa inversa pode não ser limitada (o que ocorre por exemplo, se F for contínuo e compacto e $\dim X = \infty$), o que resulta em problemas de instabilidade conforme já argumentado.

1.3.2 Métodos de Levenberg-Marquardt e IRGN

Para facilitar a notação, vamos definir $x_0^\delta := x_0$ e continuar usando $b_n^\delta := y^\delta - F(x_n^\delta)$. Vamos porém substituir o significado de $A_n = F'(x_n)$ por $A_n := F'(x_n^\delta)$.

Uma maneira de contornar os problemas de instabilidade comentados na seção anterior, é utilizar alguma técnica de regularização⁶. Olhando para equação (1.16) por exemplo, vemos que se $(A_0^* A_0)^{-1} : X \rightarrow X$ for um operador ilimitado, $h_0^\delta \in X$ pode possuir uma norma arbitrariamente grande. Seria interessante porém, que h_0^δ estivesse próximo do vetor

$$h_0 := (A_0^* A_0)^{-1} A_0^* b_0,$$

pelo menos quando $\delta > 0$ for pequeno. Uma maneira de tentar manter a estabilidade, é portanto, *penalizar* a norma do vetor solução h_0^δ . Na prática escolhemos em cada iteração n , um número real $\gamma_n > 0$ e ao invés de minimizar o funcional

$$w_n(h) := \|A_n h - b_n^\delta\|^2,$$

minimizamos o funcional

$$w_n^\delta(h) := \|A_n h - b_n^\delta\|^2 + \gamma_n \|h\|^2, \quad (1.17)$$

para então tomarmos $h_n^\delta := \arg \min w_n^\delta(h)$. Falando informalmente, se $\|h\|$ for grande, então $\|A_n h - b_n^\delta\|$ deve ser pequena para que a soma no lado direito de (1.17) seja pequena. Em contrapartida, se $\|h\|$ já é pequena, o vetor h pode ser tomado de modo que a norma $\|A_n h - b_n^\delta\|$

⁶Técnicas de regularização são discutidas no apêndice C.

seja um pouco maior. Isso significa que a norma do vetor h está sendo penalizada na equação (1.17) no sentido de que o algoritmo dará "prioridade" para soluções com norma pequena. O fator γ_n decidirá o *peso* dessa penalização.

Se utilizarmos a condição de otimalidade $w_n^{\delta'}(h) = 0$, obtemos

$$[A_n^* A_n + \gamma_n] h = A_n^* b_n^\delta.$$

Repare que para todo $v \in X$,

$$\langle A_n^* A_n v, v \rangle = \langle A_n v, A_n v \rangle = \|A_n v\|^2 \geq 0.$$

Então, se v satisfaz $[A_n^* A_n + \gamma_n] v = 0$, teremos $A_n^* A_n v = -\gamma_n v$. Daí,

$$0 \leq \langle A_n^* A_n v, v \rangle = \langle -\gamma_n v, v \rangle = -\gamma_n \|v\|^2 \leq 0,$$

o que implica que $v = 0$ e portanto $[A_n^* A_n + \gamma_n]^{-1}$ existe. Assim,

$$h_n^\delta = [A_n^* A_n + \gamma_n]^{-1} A_n^* b_n^\delta$$

está bem definido.

Repare que o operador $[A_n^* A_n + \gamma_n]^{-1}$ é contínuo com norma menor ou igual a $\frac{1}{\gamma_n}$. O parâmetro γ_n garante a estabilidade do processo. Quanto maior for esse parâmetro, maior será esta estabilidade, no entanto mais distante do problema original estaremos. Fazemos então $\gamma_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ a uma taxa apropriada.

Por fim, tomamos $x_{n+1}^\delta = x_n^\delta + h_n^\delta$, $n = 0, 1, \dots$. O algoritmo é então encerrado com o princípio da discrepância (1.5), fornecendo um vetor $x_{N(\delta)}^\delta$ que serve de aproximação para x^+ . Esse método é conhecido como método de Levenberg-Marquardt e é possível mostrar, sob condições apropriadas (veja a referência [18]), que esse método possui a propriedade de regularização (1.6).

O método IRGN (Iterative Regularized Gauss-Newton) é uma variação do método de Levenberg-Marquardt. A diferença entre os dois se dá no termo de penalização. Aqui, ao invés de penalizarmos a norma da solução, penalizamos a norma da diferença entre a solução e o vetor $x_0 - x_n^\delta$. Assim, o passo h_n do IRGN é definido como sendo o

minimizador do funcional (compare com (1.17))

$$z_n^\delta(h) := \|A_n h - b_n^\delta\|^2 + \gamma_n \|h - (x_0 - x_n^\delta)\|^2,$$

ou seja,

$$h_n = [\gamma_n I + A_n^* A_n]^{-1} (A_n^* b_n^\delta + \gamma_n (x_0 - x_n^\delta)), \quad (1.18)$$

com $x_{n+1}^\delta := x_n^\delta + h_n$

Repare que nesse caso, a penalização se dá no termo $h_n - (x_0 - x_n^\delta) = x_{n+1}^\delta - x_0$. Intuitivamente, isto serve para que os vetores resultantes de cada iteração não se afastem muito do vetor inicial x_0 . Para garantir a convergência do método, podemos tomar (γ_n) como sendo uma sequência satisfazendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0 \text{ e } 1 \leq \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} \leq \gamma, \quad (1.19)$$

com $\gamma > 1$ fixado. Novamente o algoritmo é encerrado pelo princípio da discrepância (1.5).

Assumindo condições adequadas (veja as referências [18] e [3]), é possível provar que este algoritmo possui a propriedade de regularização (1.6). Uma das hipóteses mais importantes que deve ser exigida é certamente a fatoração do operador F dada a seguir.

Suponha que existam constantes positivas E, C_Q e C_R tais que para todo $x, \tilde{x} \in B[x^+, E] := \{x \in X : \|x - x^+\| \leq E\}$, existem operadores lineares $R(\tilde{x}, x) \in \mathcal{L}(Y, Y)$ e $Q(\tilde{x}, x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ satisfazendo

$$\begin{aligned} F'(\tilde{x}) &= R(\tilde{x}, x) F'(x) + Q(\tilde{x}, x) \\ \|I - R(\tilde{x}, x)\| &\leq C_R \\ \|Q(\tilde{x}, x)\| &\leq C_Q \|F'(x^+) (\tilde{x} - x)\|. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Essa fatoração é uma condição relaxada da versão mais forte apresentada em (2.42). Assumindo ainda as condições de fonte do tipo Hölder

$$x_0 - x^+ = (A^* A)^v w, \quad w \in X, \quad \|w\| \leq \rho, \quad (1.21)$$

onde $\rho > 0$ é uma constante e $0 < v < \frac{1}{2}$, é possível provar a taxa de

convergência (veja [3])

$$\left\| x_{N(\delta)}^\delta - x^+ \right\| = O\left(\delta^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}\right). \quad (1.22)$$

1.4 Métodos tipo Newton Inexatos

Métodos do tipo Newton inexatos são uma generalização dos métodos tipo Newton apresentados na seção anterior. Quando usamos o método de Newton para resolver a equação 1.1, devemos resolver uma sequência de sistemas linearizados $F'(x_n) s_n = y - F(x_n)$ a partir de uma aproximação inicial x_0 . Resolver estes sistemas lineares de maneira exata pode ser muito custoso no ponto de vista computacional e esse trabalho não se justifica quando ainda estamos longe da solução do problema. Na década de 80, Dembo, et. al [9], introduziram uma classe de métodos do tipo Newton inexatos para resolver esses sistemas lineares de maneira aproximada para operadores $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$. Nesse caso, procura-se resolver os sistemas lineares

$$F'(x_n) s_n = y - F(x_n) + r_n,$$

onde $\frac{\|r_n\|}{\|y - F(x_n)\|} \leq \mu_n$, para *termos forçantes* $\mu_n \in [0, 1)$. Assim, o passo na n -ésima iteração é encontrado ao obtermos um vetor s_n satisfazendo

$$\|F'(x_n) s_n - (y - F(x_n))\| \leq \mu_n \|y - F(x_n)\|,$$

para uma escolha apropriada de μ_n . Esse procedimento foi utilizado inicialmente para resolver problemas bem postos e em [10] podemos encontrar um estudo de como escolher adequadamente a sequência de termos forçantes (μ_n) para garantir a convergência do método.

O algoritmo REGINN, apresentado na próxima subseção apresenta uma ideia muito similar e pode ser considerado uma adaptação voltada à resolução de problemas inversos mal postos.

Na subseção 1.4.2, apresentamos o IRGN inexato. Esse método não utiliza exatamente a ideia exposta acima, mas é também chamado de método do tipo Newton inexato porque resolve de forma inexata o sistema linear associado a um método do tipo Newton (o IRGN).

1.4.1 REGINN

Notações: $A := F'(x^+)$, $A_n := F'(x_n^\delta)$ e $b_n^\delta := y^\delta - F(x_n^\delta)$.

Gostaríamos de resolver de uma maneira estável o sistema mal posto (1.1), assumindo (1.2) e (1.3), isto é, gostaríamos de determinar, para cada nível de ruídos $\delta > 0$ um vetor $x_{N(\delta)}^\delta$ que sirva de aproximação ao vetor procurado x^+ e de modo que a propriedade (1.6) seja satisfeita.

Podemos pensar em aplicar diretamente o método de Newton na equação

$$F(x) = y^\delta. \quad (1.23)$$

Para tanto, devemos supor disponível um vetor $x_0^\delta \in X$ e na n -ésima iteração resolver a equação linearizada

$$A_n s_n = b_n^\delta, \quad (1.24)$$

para obter o passo s_n e obtermos então $x_{n+1}^\delta = x_n^\delta + s_n$. Mas caso o sistema (1.24) acima seja mal posto, nem sempre será vantajoso calcular s_n exatamente (mesmo que isso seja possível, conforme ideias já expostas nas seções anteriores). Seguindo as ideias do método de Gauss Newton, podemos pensar em minimizar o funcional

$$p_n(x) = \|A_n x - b_n^\delta\|^2,$$

mas esse procedimento também pode gerar problemas de instabilidade em problemas mal postos.

O algoritmo que será apresentado resumidamente nessa subseção, foi chamado pelo autor de [31] de REGINN (REGularization based on INexact Newton iteration) e será estudado detalhadamente no capítulo 2. Este método não consiste em minimizar o funcional p_n , mas apenas determinar um vetor que o torne "pequeno suficiente". Repare que se o vetor b_n^δ não pertencer ao subespaço $R(A_n)^\perp$, então (veja a figura 1.1) a norma desse vetor será estritamente maior do que a norma de sua projeção sobre o subespaço $R(A_n)^\perp$, isto é

$$\|b_n^\delta\| > \|P_{R(A_n)^\perp} b_n^\delta\| = \|P_{\overline{R(A_n)}} b_n^\delta - b_n^\delta\|.$$

A ideia do algoritmo é trabalhar com uma iteração interna e uma

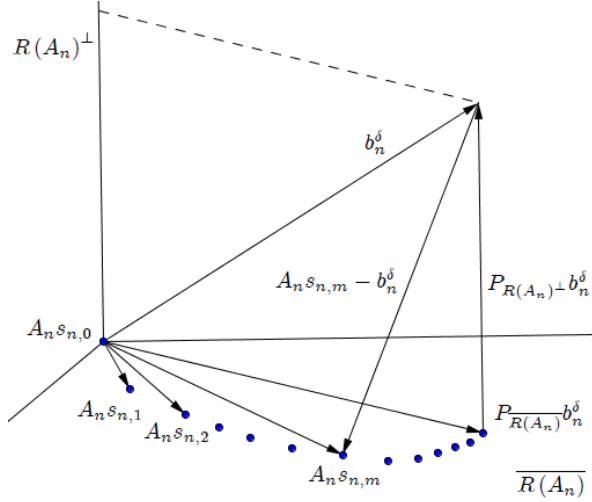


Figura 1.1: $b_n^\delta \notin R(A_n)^\perp \implies \|P_{R(A_n)^\perp} b_n^\delta\| < \|b_n^\delta\|$.

iteração externa. Na iteração interna, mantém-se fixado o índice de iteração n e aplica-se um método de regularização para gerar o passo h_n que é somado na iteração externa ao vetor corrente x_n^δ definindo o vetor x_{n+1}^δ . A iteração externa é então encerrada pelo princípio da discrepância (1.5).

Para a iteração interna, gera-se uma sequência $(s_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ de modo que $s_{n,0} = 0$ e $A_n s_{n,m} \rightarrow P_{\overline{R(A_n)}} b_n^\delta$ quando $m \rightarrow \infty$. Desse modo, para $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, teremos (veja a figura 1.1)

$$\|A_n s_{n,m} - b_n^\delta\| < \|b_n^\delta\|.$$

Se fixarmos $\mu_n \leq 1$ suficientemente próximo de 1, teremos ainda

$$\|A_n s_{n,m_n} - b_n^\delta\| < \mu_n \|b_n^\delta\|$$

para algum $m_n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande (Repare que s_{n,m_n} aproxima s_n na equação 1.24, que está sendo resolvida de forma inexata, por isso diremos que este é um método do tipo Newton inexato). Definimos então o passo $h_n := s_{n,m_n}$. O algoritmo a seguir codifica o método para uma escolha a priori da sequência (μ_n) .

Algoritmo 1 (REGINN) Dados $(x_0; F, y^\delta; (\mu_n); F'; \tau; \delta)$

```

 $n := 0;$ 
 $x_0^\delta := x_0;$ 
 $b_n^\delta := y^\delta - F(x_n^\delta);$ 
 $A_n := F'(x_n^\delta);$ 
 $\text{Enquanto } \|b_n^\delta\| > \tau\delta$ 
     $m := 0;$ 
     $s_{n,0} := 0;$ 
     $\text{Enquanto } \|A_n s_{n,m} - b_n^\delta\| \geq \mu_n \|b_n^\delta\|$ 
         $m := m + 1;$ 
         $\text{compute } s_{n,m};$ 
     $\text{Fim}$ 
     $x_{n+1}^\delta := x_n^\delta + s_{n,m};$ 
     $n := n + 1;$ 
     $b_n^\delta := y^\delta - F(x_n^\delta);$ 
     $A_n := F'(x_n^\delta);$ 
 $\text{Fim}$ 
 $\bar{x} = x_n^\delta.$ 

```

Sob condições adequadas, este algoritmo termina com uma aproximação $\bar{x} = x_N^\delta$ para o vetor x^+ com a propriedade da regularização (1.6) desejada. Essas condições, são propriedades exigidas da sequência $(s_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ e da função F . Explicaremos maneiras de escolher convenientemente o parâmetro $\tau > 1$ utilizado no princípio da discrepância (1.5) e a sequência (μ_n) .

Para o caso livre de ruídos $\delta = 0$, este algoritmo toma a forma:

Algoritmo 2 Dados $(x_0; F, y; (\mu_n); F')$

```

 $n := 0;$ 
 $b_n := y - F(x_n);$ 
 $A_n := F'(x_n);$ 
 $\text{Enquanto } \|b_n\| \neq 0$ 
     $m := 0;$ 
     $s_{n,0} := 0;$ 
     $\text{Enquanto } \|A_n s_{n,m} - b_n\| \geq \mu_n \|b_n\|$ 
         $m := m + 1;$ 
         $\text{compute } s_{n,m};$ 
     $\text{Fim}$ 

```

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &:= x_n + s_{n,m}; \\
n &:= n + 1; \\
b_n &:= y - F(x_n); \\
A_n &:= F'(x_n); \\
\textit{Fim} \\
\bar{x} &= x_n.
\end{aligned}$$

A importância do algoritmo 2 acima é puramente teórica e não possui relevância em aplicações práticas, uma vez que a sua regra de parada pode não ser atingida num número finito de iterações. Em geral, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^+$. Esse algoritmo será utilizado para clarear as ideias quando demonstrarmos a convergência do método no caso livre de ruídos (lema 10).

1.4.2 IRGN Inexato

Notações: $A_n := F'(x_n^\delta)$, $b_n^\delta := y^\delta - F(x_n^\delta)$

O método IRGN foi apresentado na subseção 1.3.2. Na n -ésima iteração desse algoritmo, é necessário que se resolva o sistema linear (1.18) para que possamos determinar o passo h_n , o qual deve ser adicionado ao vetor corrente x_n^δ para determinar a atualização x_{n+1}^δ . Esse método por si só, já é considerado um método do tipo Newton inexato por alguns autores, porque de alguma maneira ele resolve em cada passo e de forma inexata, a equação linearizada (1.24).

Em aplicações reais é muito difícil obtermos o passo h_n , solução do sistema linear

$$[\gamma_n I + A_n^* A_n] h_n = (A_n^* b_n^\delta + \gamma_n (x_0 - x_n^\delta)) \quad (1.25)$$

de maneira *exata*. Na prática, podemos obter somente uma aproximação para esse vetor. Por esse motivo, introduziremos brevemente nessa subseção e explicaremos com detalhes no capítulo 3, o método conhecido como IRGN inexato. Esse método é muito parecido com o próprio IRGN, sendo diferente apenas no fato de que o sistema linear (1.25) acima é assumido ser resolvido somente de maneira *aproximada*, providenciando na iteração n um vetor h_n^{ap} que será o passo do IRGN inexato. Esse passo será então adicionado ao vetor corrente x_n^δ para determinar a atualização x_{n+1}^δ . Novamente o princípio da discrepância (1.5) será aplicado para encerrar a iteração.

Desse modo, teremos que o passo h_n^{ap} do IRGN inexato será dado por

$$[\gamma_n I + A_n^* A_n] h_n^{ap} \approx (A_n^* b_n^\delta + \gamma_n (x_0 - x_n^\delta)).$$

Assumindo que a aproximação h_n^{ap} possui uma qualidade apropriada, isto é, assumindo que a norma $\|h_n^{ap} - h_n\|$ da diferença entre a solução exata e a solução aproximada de (1.25) pode ser "controlada", é possível provar que o IRGN inexato produz soluções estáveis para a equação (1.1). O algoritmo a seguir codifica o método com uma escolha a priori da sequência (γ_n) .

Algoritmo 3 (IRGN Inexato) Dados $(x_0; F; y^\delta; (\gamma_n); F'; \tau; \delta)$

```

 $n := 0;$ 
 $x_0^\delta := x_0;$ 
 $b_n^\delta := y^\delta - F(x_n^\delta);$ 
 $A_n := F'(x_n^\delta);$ 
Enquanto  $\|b_n^\delta\| > \tau\delta$ 
     $h_n^{ap} \approx [\gamma_n I + A_n^* A_n]^{-1} (A_n^* b_n^\delta + \gamma_n (x_0 - x_n^\delta));$ 
     $x_{n+1}^\delta := x_n^\delta + h_n^{ap};$ 
     $n := n + 1;$ 
     $b_n^\delta := y^\delta - F(x_n^\delta);$ 
     $A_n := F'(x_n^\delta);$ 
Fim
 $\bar{x} = x_n^\delta.$ 

```

Assumindo condições apropriadas sobre a sequência (γ_n) e sobre a não linearidade de F , o algoritmo acima termina com uma solução estável $\bar{x} = x_{N(\delta)}^\delta$ para a equação (1.1). Assumindo condições de fonte, é possível provar taxas de convergência. No capítulo 3, provaremos a propriedade (1.6) e taxas de convergência, substituindo as condições de fonte do tipo Hölder (1.21) por condições de fonte mais gerais (igualdade (3.2)).

Capítulo 2

Algoritmo REGINN

2.1 Apresentação

As principais ideias desse capítulo podem ser obtidas no artigo [32], com exceção da última seção, a qual possui ideias de [30] e [31]. As ideias básicas sobre o funcionamento do REGINN foram apresentadas na subseção 1.4.1.

Vamos assumir as condições (1.1), (1.2), (1.3) e a notação $A := F'(x^+)$, além das já usadas $A_n := F'(x_n^\delta)$ e $b_n^\delta := y^\delta - F(x_n^\delta)$.

Conforme as ideias apresentadas na subseção 1.4.1, o algoritmo REGINN resolve de maneira inexata e estável em cada passo n , a equação linearizada 1.24 através da geração de uma *sequência regularizante* $(s_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ e da determinação de um parâmetro m_n apropriado, o que define o passo do algoritmo. Em seguida, o vetor corrente é atualizado somando o passo s_{n,m_n} obtido.

Para utilizar uma técnica de regularização visando resolver (1.24) de forma estável, podemos tomar por exemplo

$$s_{n,m} = g_m(A_n^* A_n) A_n^* b_n^\delta, \quad (2.1)$$

onde $g_m : [0, \|A_n\|^2] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua por partes satisfazendo as propriedades (C.7)¹. Assim, teremos que determinar em

¹Veja o apêndice C para uma explicação do significado de (2.1). Consulte o apêndice A para uma definição precisa do operador $g_m(A_n^* A_n) : X \rightarrow X$.

cada iteração n , um parâmetro m_n de modo que s_{n,m_n} substitua s_n na equação (1.24) e de modo que possamos ganhar estabilidade no processo. É importante notar porém que a sequência $(s_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ não precisa ser definida necessariamente por (2.1). Vamos usar aqui uma abordagem mais geral e que abrange também esse caso. Na prática procede-se da seguinte forma: com o parâmetro n fixado, gera-se uma sequência $(s_{n,m})_{m \in \mathbb{N}} \subset X$ de vetores com determinadas propriedades que iremos especificar mais adiante (a princípio esta sequência pode ser gerada de qualquer maneira, mas é conveniente termos sempre em mente que ela terá as propriedades de uma sequência gerada por um método de regularização, como por exemplo $s_{n,m} = g_m(A_n^* A_n) A_n^* b_n^\delta$, com g_m satisfazendo (C.7)) e se determina um número $\mu_n \in (0, 1]$. Provaremos que se a sequência $(s_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ e o parâmetro μ_n forem escolhidos convenientemente em conjunto com restrições apropriadas sobre a não linearidade da função F , então existirá um número $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|A_n s_{n,j} - b_n^\delta\| < \mu_n \|b_n^\delta\|.$$

Tome $j = m_n \in \mathbb{N}$ o menor natural satisfazendo esta desigualdade, isto é

$$m_n := \min_{m \in \mathbb{N}} \{ \|A_n s_{n,m} - b_n^\delta\| < \mu_n \|b_n^\delta\| \} \quad (2.2)$$

e defina finalmente o passo $h_n := s_{n,m_n}$. Por conveniência definimos $s_{n,0} := 0$.

O algoritmo 1 apresentado na subseção 1.4.1, codifica o método com uma escolha a priori da sequência (μ_n) . Também é possível definir a sequência (μ_n) a posteriori, escolhendo o parâmetro μ_k somente após a determinação de x_k^δ na k -ésima iteração.

Iniciemos nosso estudo exigindo algumas propriedades da sequência regularizante $(s_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} \langle A_n s_{n,m}; b_n^\delta \rangle &> 0, \quad \forall m \geq 1 \text{ se } A_n^* b_n^\delta \neq 0; \\ \lim_{m \rightarrow \infty} A_n s_{n,m} &= P_{\overline{R(A_n)}} b_n^\delta; \\ \|A_n s_{n,m}\| &\leq \Theta \|b_n^\delta\|, \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ e algum } \Theta \geq 1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

A figura 1.1 ilustra a situação da igualdade em (2.3) acima (compare essa igualdade com a observação 20, apêndice C).

Se definirmos $s_{n,m}$ como em (2.1), então esta sequência satisfaz as três propriedades em (2.3) acima com $\Theta \leq C_g$. De fato, se $y := A_n^* b_n^\delta \neq 0$, como o operador $g_m(A_n^* A_n)$ é positivo para $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} \langle A_n s_{n,m}; b_n^\delta \rangle &= \langle A_n g_m(A_n^* A_n) A_n^* b_n^\delta; b_n^\delta \rangle \\ &= \langle g_m(A_n^* A_n) A_n^* b_n^\delta; A_n^* b_n^\delta \rangle = \langle g_m(A_n^* A_n) y; y \rangle > 0. \end{aligned}$$

Ainda, a igualdade

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_n s_{n,m} = P_{\overline{R(A_n)}} b_n^\delta$$

segue da observação 20. Por fim, usamos a igualdade (C.10) para obter

$$\begin{aligned} \|A_n s_{n,m}\| &= \|A_n g_m(A_n^* A_n) A_n^* b_n^\delta\| = \|A_n A_n^* g_m(A_n A_n^*) b_n^\delta\| \\ &\leq \sup_{\lambda \in \sigma(A_n A_n^*)} |\lambda g_m(\lambda)| \cdot \|b_n^\delta\| \leq C_g \|b_n^\delta\|, \end{aligned}$$

onde $\sigma(A_n A_n^*)$ representa o espectro do operador auto-adjunto $A_n A_n^*$.

Quando utilizamos (2.1) para gerar a sequência $(s_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$, estamos utilizando uma *técnica de regularização* na iteração interna do REGINN. É importante porém notar que esta sequência pode ser gerada de qualquer maneira, desde que as propriedades dela exigidas (2.3) sejam satisfeitas. Estas propriedades é que serão utilizadas para demonstrar a convergência do método. Alguns métodos não lineares e que não podem ser representados por filtros de regularização, como os métodos da máxima descida (veja [14] e [5]) e do gradiente conjugado (veja [20] e [12]), também podem ser usados para gerar a sequência $(s_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ satisfazendo (2.3) (as demonstrações podem ser obtidas em [32, apêndice A]).

Definição 2 *Seja X um espaço vetorial. Dizemos que o vetor $h \in X$ é direção de descida para o funcional $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ a partir do vetor $x_0 \in X$ se existe $\bar{\lambda} > 0$ tal que para $x_\lambda := x_0 + \lambda h$ com $0 < \lambda \leq \bar{\lambda}$ temos $\varphi(x_\lambda) < \varphi(x)$.*

Lema 1 *Sejam X um espaço de Hilbert real, $h, x_0 \in X$ e $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Se $\langle \nabla \varphi(x_0), h \rangle < 0$, então o vetor h é direção de descida para o funcional φ a partir do vetor x_0 .*

Demonstração: Como $\langle \nabla \varphi(x_0), h \rangle < 0$, então $h \neq 0$. O vetor $h_1 :=$

$\frac{1}{\|h\|}h$ é unitário, portanto (veja [26, páginas 341 e 342]),

$$0 > \frac{1}{\|h\|} \langle \nabla \varphi(x_0), h \rangle = \langle \nabla \varphi(x_0), h_1 \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x_0 + \lambda h_1) - \varphi(x_0)}{\lambda}.$$

Portanto, existe $\bar{\lambda} > 0$ tal que se $0 < \lambda \leq \|h\| \bar{\lambda}$, então

$$\frac{\varphi(x_0 + \lambda h_1) - \varphi(x_0)}{\lambda} < 0.$$

Logo, $\varphi(x_0 + \lambda h_1) < \varphi(x_0)$ para $0 < \lambda \leq \|h\| \bar{\lambda}$. Tomando $\lambda_1 := \frac{\lambda}{\|h\|}$, vemos que $0 < \lambda_1 \leq \bar{\lambda}$ e além disso, $\varphi(x_0 + \lambda_1 h) = \varphi(x_0 + \lambda h_1) < \varphi(x_0)$, o que implica que o vetor h é direção de descida para o funcional φ a partir do vetor x_0 . ■

Vamos provar a partir de agora, algumas propriedades da sequência $(s_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$, obtidas através de (2.3).

Lema 2 *Assuma (2.3). Então para todo $m, n \in \mathbb{N}$ com $A_n^* b_n^\delta \neq 0$, o vetor $s_{n,m}$ é direção de descida a partir de x_n^δ para o funcional*

$$\varphi(x) := \frac{1}{2} \|y^\delta - F(x)\|^2. \quad (2.4)$$

Demonstração: Como

$$\nabla \varphi(x_n^\delta) = -A_n^* b_n^\delta,$$

$$\langle \nabla \varphi(x_n^\delta), s_{n,m} \rangle = -\langle b_n^\delta, A_n s_{n,m} \rangle < 0$$

pela primeira linha de (2.3). Portanto $\langle \nabla \varphi(x_n^\delta), s_{n,m} \rangle < 0$ e o resultado segue do lema anterior. ■

Lema 3 *Assuma (2.3). Se $\|P_{R(A_n)^\perp} b_n^\delta\| < \|b_n^\delta\|$ então o intervalo $J_n := \left(\frac{\|P_{R(A_n)^\perp} b_n^\delta\|}{\|b_n^\delta\|}, 1 \right]$ é não vazio e para qualquer tolerância $\mu_n \in J_n$, o índice de parada m_n em (2.2) está bem definido.*

Demonstração:

$$\|P_{R(A_n)^\perp} b_n^\delta\| < \|b_n^\delta\| \implies \frac{\|P_{R(A_n)^\perp} b_n^\delta\|}{\|b_n^\delta\|} < 1 \implies J_n \neq \emptyset.$$

Tome $\mu_n \in J_n$. Pela segunda linha de (2.3),

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (A_n s_{n,m} - b_n^\delta) = P_{R(A_n)} b_n^\delta - b_n^\delta = P_{R(A_n)^\perp} b_n^\delta.$$

Logo,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\|A_n s_{n,m} - b_n^\delta\|}{\|b_n^\delta\|} = \frac{\|P_{R(A_n)^\perp} b_n^\delta\|}{\|b_n^\delta\|} < \mu_n$$

e portanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|A_n s_{n,m} - b_n^\delta\| < \mu_n \|b_n^\delta\|$, o que é suficiente para garantir a existência de m_n . ■

Observação 1 Se $b_n^\delta \notin R(A_n)^\perp$ então $\|P_{R(A_n)^\perp} b_n^\delta\| < \|b_n^\delta\|$ e o lema acima é assegurado, mas se $b_n^\delta \in R(A_n)^\perp$ então $\|P_{R(A_n)^\perp} b_n^\delta\| = \|b_n^\delta\|$ e é impossível encontrar $\mu_n \in (0, 1]$ tal que $\|P_{R(A_n)^\perp} b_n^\delta\| < \mu_n \|b_n^\delta\|$. Nesse caso o algoritmo REGINN não fica bem definido (Veja a figura 1.1).

Vamos agora impor uma nova condição sobre a sequência $(s_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$. Seja $s_{n,0} := 0$, fixe $n \in \mathbb{N}$ e assumamos que para cada $m \in \{1, 2, \dots, m_n\}$ existe $v_{n,m-1} \in Y$ tal que

$$s_{n,m} = s_{n,m-1} + A_n^* v_{n,m-1}. \quad (2.5)$$

Observação 2 A condição acima exige que a sequência $(s_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ seja gerada iterativamente, de modo que um vetor dessa sequência seja igual ao vetor anterior somado a um vetor pertencente a $R(A_n^*)$. Como $s_{n,0} = 0 \in R(A_n^*)$, teremos que $s_{n,m} \in R(A_n^*)$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Essa propriedade será necessária para utilizarmos a condição (2.6) abaixo. Além disso, ela será importante na demonstração da convergência do REGINN no caso livre de ruídos: $x_n \rightarrow x^+$, $n \rightarrow \infty$ (lema 10, abaixo).

Perceba que se a sequência $(s_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ for gerada por (2.1), então pela igualdade (C.10), segue que a propriedade (2.5) acima é satisfeita porque nesse caso,

$$s_{n,m} - s_{n,m-1} = A_n^* [(g_m(A_n A_n^*) - g_{m-1}(A_n A_n^*)) b_n^\delta] = A_n^* v_{n,m-1},$$

com $v_{n,m-1} := (g_m(A_n A_n^*) - g_{m-1}(A_n A_n^*)) b_n^\delta$.

Iremos agora impor algumas condições sobre a não linearidade da função F para garantir que o algoritmo termina, isto é, que existe $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que o princípio da discrepância (1.5) é satisfeito. Com este objetivo, tome $x_0 \in D(F)$ com $\|F(x_0) - y^\delta\| > \delta$ e defina o conjunto de nível

$$\mathcal{L}(x_0) := \{x \in D(F) : \|F(x) - y^\delta\| \leq \|F(x_0) - y^\delta\|\}.$$

Repare que por (1.3), $x^+ \in \mathcal{L}(x_0)$.

Dados dois vetores $v, w \in D(F)$, definimos o erro de linearização

$$E(v, w) := F(v) - F(w) - F'(w)(v - w),$$

e impomos a seguinte condição sobre a função não linear F ,

$$\|E(v, w)\| \leq L \|F'(w)(v - w)\|, \text{ para algum } L < 1 \quad (2.6)$$

e para todo $v, w \in \mathcal{L}(x_0)$ com $v - w \in N(F'(w))^\perp$.

Uma desigualdade parecida com (2.6) é a condição do cone tangencial dada por

$$\|E(v, w)\| \leq \omega \|F(w) - F(v)\|, \quad (2.7)$$

para todo $v, w \in \mathcal{L}(x_0)$. De (2.6) decorre a condição (2.7) para todo $v, w \in \mathcal{L}(x_0)$ com $v - w \in N(F'(w))^\perp$, onde $\omega := \frac{L}{1-L} > L$. De fato, pela desigualdade triangular reversa, decorre de (2.6) que

$$\|F(v) - F(w)\| \geq (1 - L) \|F'(w)(v - w)\|.$$

Usando novamente (2.6) e o fato de que $L < 1$,

$$\|E(v, w)\| \leq L \frac{1}{1-L} \|F(v) - F(w)\|,$$

que é a condição (2.7) com $\omega = \frac{L}{1-L}$. Se (2.7) é satisfeito com $\omega < 1$ então (2.6) é também satisfeito com $L = \frac{\omega}{1-\omega} < \omega$.

A figura 2.1 apresenta geometricamente o erro de linearização $E(v, w)$, $F(w) - F(v)$ e $F'(w)(v - w)$, comparados em (2.6) e (2.7).

Vamos agora assumir uma nova condição sobre a não linearidade

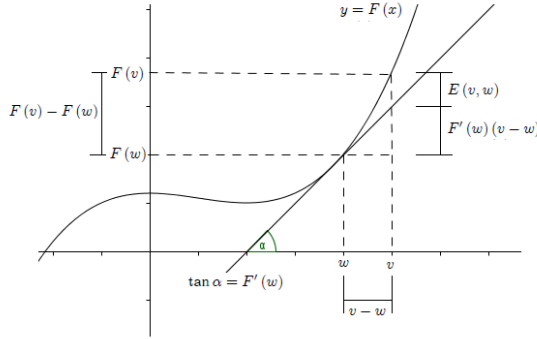


Figura 2.1: Erro de linearização $E(v, w)$ comparado com $F(w) - F(v)$ e $F'(w)(v - w)$.

de F . Assuma a existência de $\varrho \in [0, 1)$ tal que

$$\left\| P_{R(F'(u))^\perp} (F(x^+) - F(u)) \right\| \leq \varrho \|F(x^+) - F(u)\|, \quad (2.8)$$

para todo $u \in \mathcal{L}(x_0)$.

Em particular, (2.8) implica que se $u \in \mathcal{L}(x_0)$ e $F(u) \neq y$, então $(y - F(u)) \notin R(F'(u))^\perp$, condição normalmente exigida nos problemas não lineares que são resolvidos por linearização porque se $(y - F(u)) \in R(F'(u))^\perp$ então $F'(u)s = y - F(u) \implies s = 0$ e portanto o passo de Newton s será sempre o vetor nulo (veja também a observação (1)).

A condição (2.8) pode ser provada a partir de (2.6) para os vetores $u \in \mathcal{L}(x_0)$ tais que $x^+ - u \in N(F'(u))^\perp$, caso L seja pequeno suficiente, conforme o resultado do próximo lema.

Lema 4 Assuma (2.6) com $L < \frac{1}{2}$. Então (2.8) é válido com

$$\varrho = \frac{L}{1 - L} < 1$$

para os vetores $u \in \mathcal{L}(x_0)$ tais que $x^+ - u \in N(F'(u))^\perp$.

Demonstração: Seja $u \in \mathcal{L}(x_0)$ com $x^+ - u \in N(F'(u))^\perp$. Como o vetor $F'(u)(x^+ - u)$ pertence a imagem de $F'(u)$, segue que o vetor

$P_{R(F'(u))^{\perp}}(F'(u)(x^+ - u))$ é nulo. Portanto

$$\begin{aligned} \left\| P_{R(F'(u))^{\perp}}(F(x^+) - F(u)) \right\| &= \left\| P_{R(F'(u))^{\perp}}E(x^+, u) \right\| \\ &\leq \|E(x^+, u)\| \\ &\leq L \|F'(u)(x^+ - u)\|, \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde a última desigualdade decorre de (2.6). Além disso,

$$\begin{aligned} \|F'(u)(x^+ - u)\| &\leq \|E(x^+, u)\| + \|F(x^+) - F(u)\| \\ &\leq L \|F'(u)(x^+ - u)\| + \|F(x^+) - F(u)\| \end{aligned}$$

implica em

$$\|F'(u)(x^+ - u)\| \leq \frac{1}{1-L} \|F(x^+) - F(u)\|.$$

Substituindo esta desigualdade em (2.9), obtemos o resultado desejado.

■

Observação 3 Observe que se assumirmos a condição (2.6) com $L < \frac{1}{2}$, então assumindo (2.8) teremos obrigatoriamente pelo lema acima, que $\varrho \leq \frac{L}{1-L} < 1$, válido para todo $u \in \mathcal{L}(x_0)$.

O próximo teorema explica como escolher a constante $\tau > 1$ e a sequência (μ_n) . Antes de enunciar-lo, vamos obter alguns resultados preliminares. Observe que se existir $\Lambda < 1$ tal que as constantes em (2.3), (2.6) e (2.8) satisfazem

$$\Theta L + \varrho < \Lambda, \quad (2.10)$$

então $0 < \Lambda - \Theta L - \varrho < 1$ e portanto escolhendo

$$\tau > \frac{1 + \varrho}{\Lambda - \Theta L - \varrho}, \quad (2.11)$$

teremos que $\tau > 1$.

Desse modo, podemos definir

$$\mu_{\min} := \frac{(1 + \varrho)\delta}{\|b_n^\delta\|} + \varrho \quad (2.12)$$

e enquanto o princípio da discrepância (1.5) não for satisfeito, isto é, enquanto $\|b_n^\delta\| > \tau\delta$ teremos

$$\begin{aligned}\mu_{\min} &= (1 + \varrho) \left[\frac{\delta}{\|b_n^\delta\|} \right] + \varrho \\ &< (1 + \varrho) \left[\frac{1}{\tau} \right] + \varrho \\ &< \Lambda - \Theta L,\end{aligned}\tag{2.13}$$

por (2.11), o que mostra que enquanto o princípio da discrepância não é satisfeito, o intervalo $(\mu_{\min}; \Lambda - \Theta L]$ não é vazio e podemos escolher $\mu_n \in (\mu_{\min}; \Lambda - \Theta L] \subset (0, 1]$.

Observação 4 Para o caso livre de ruídos $\delta = 0$, temos simplesmente $\mu_{\min} := \varrho < 1$ e a constante τ não precisa ser definida. Nesse caso, (2.13) é satisfeito imediatamente se assumirmos (2.10).

Temos subsídios suficientes para garantir que o REGINN terminará após um número finito de iterações.

Teorema 5 Sejam $D(F)$ aberto e $x_0 \in D(F)$. Sejam $(s_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ uma sequência satisfazendo (2.5) e (2.3) e F uma função satisfazendo (2.6) e (2.8) com as constantes satisfazendo (2.10). Escolha $\tau > 1$ conforme (2.11) e selecione $\mu_n \in (\mu_{\min}; \Lambda - \Theta L]$ onde $\mu_{\min}$ está definido em (2.12). Então existe $N = N(\delta)$ tal que as iterações $\{x_1^\delta, x_2^\delta, \dots, x_{N(\delta)}^\delta\}$ do REGINN estão bem definidas e se mantêm em $\mathcal{L}(x_0)$. Além disso, somente a última iteração satisfaz o princípio da discrepância

$$\left\| y^\delta - F\left(x_{N(\delta)}^\delta\right) \right\| \leq \tau\delta\tag{2.14}$$

e os resíduos b_n^δ decrescem linearmente segundo a taxa

$$\frac{\|b_{n+1}^\delta\|}{\|b_n^\delta\|} < \mu_n + L\theta_n \leq \Lambda < 1, \quad n = 0, 1, \dots, N(\delta) - 1,\tag{2.15}$$

onde $\theta_n := \frac{\|A_n s_{n,m_n}\|}{\|b_n^\delta\|}$.

Demonstração: Vamos usar indução para provar o teorema. Claro que x_0 está bem definido e pertence ao conjunto $\mathcal{L}(x_0)$. Vamos supor que as iterações $\{x_1^\delta, x_2^\delta, \dots, x_n^\delta\}$ estão bem definidas e pertencem ao

conjunto $\mathcal{L}(x_0)$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Se $\|b_n^\delta\| \leq \tau\delta$ então o REGINN termina com $N(\delta) = n$. Caso contrário, $\|b_n^\delta\| > \tau\delta$ e conforme a argumentação imediatamente acima ao enunciado do teorema, podemos tomar $\mu_n \in (\mu_{\min}; \Lambda - \Theta L]$ e teremos por (1.3), (2.8) e pela definição de $\mu_{\min}$ (2.12),

$$\begin{aligned}
\frac{\|P_{R(A_n)^\perp} b_n^\delta\|}{\|b_n^\delta\|} &= \frac{\|P_{R(A_n)^\perp} (y^\delta - F(x_n^\delta) + y - y)\|}{\|b_n^\delta\|} \\
&\leq \frac{\delta + \|P_{R(A_n)^\perp} (F(x^+) - F(x_n^\delta))\|}{\|b_n^\delta\|} \\
&\leq \frac{\delta + \varrho \|F(x^+) - F(x_n^\delta)\|}{\|b_n^\delta\|} \\
&= \frac{\delta + \varrho \|F(x^+) - F(x_n^\delta) + y^\delta - y^\delta\|}{\|b_n^\delta\|} \\
&\leq \frac{(1 + \varrho)\delta + \varrho \|b_n^\delta\|}{\|b_n^\delta\|} = \mu_{\min}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Logo, $(\mu_{\min}; \Lambda - \Theta L] \subset \left(\frac{\|P_{R(A_n)^\perp} b_n^\delta\|}{\|b_n^\delta\|}; 1 \right]$ e tomando tomando $\mu_n \in (\mu_{\min}; \Lambda - \Theta L]$, temos pelo lema 3 que o parâmetro m_n em (2.2) está bem definido e por consequência, tanto o passo $h_n = s_{n,m_n}$ quanto a atualização $x_{n+1}^\delta = x_n^\delta + h_n$ estão bem definidos. Vamos mostrar agora que $x_{n+1}^\delta \in \mathcal{L}(x_0)$. Inicialmente verifiquemos que $h_n = s_{n,m_n}$ é direção de descida para o funcional (2.4) a partir de x_n^δ . Se $A_n^* b_n^\delta = 0$ então $b_n^\delta \in N(A_n^*) = R(A_n)^\perp$ e portanto

$$\frac{\|P_{R(A_n)^\perp} b_n^\delta\|}{\|b_n^\delta\|} = 1,$$

contradizendo (2.16). Logo $A_n^* b_n^\delta \neq 0$ e o lema 2 implica no resultado desejado. Como $D(F)$ é aberto, segue da definição 2 que existe $\lambda > 0$ tal que $x_{n,\lambda} := x_n^\delta + \lambda h_n$ pertence a $D(F)$ e

$$\|y^\delta - F(x_{n,\lambda})\| < \|y^\delta - F(x_n^\delta)\| \leq \|y^\delta - F(x_0)\|.$$

Então $x_{n,\lambda} \in \mathcal{L}(x_0)$. Além disso, segue da observação 2 que $x_{n,\lambda} - x_n^\delta = \lambda h_n \in R(A_n^*) \subset N(A_n)^\perp$. É claro que podemos supor que $\lambda \leq 1$.

Agora, vamos usar (2.6) para obter

$$\begin{aligned}
\|y^\delta - F(x_{n,\lambda})\| &= \tag{2.17} \\
&= \|b_n^\delta - \lambda A_n h_n - (F(x_{n,\lambda}) - F(x_n^\delta) - \lambda A_n h_n)\| \\
&\leq \|b_n^\delta - \lambda A_n h_n\| + L \|\lambda A_n h_n\| \\
&\leq \|(1-\lambda)b_n^\delta + \lambda(b_n^\delta - A_n h_n)\| + L\lambda\theta_n \|b_n^\delta\| \\
&< (1-\lambda)\|b_n^\delta\| + \lambda\mu_n \|b_n^\delta\| + L\lambda\theta_n \|b_n^\delta\| \\
&= (1-\lambda(1-\mu_n-L\theta_n))\|b_n^\delta\|,
\end{aligned}$$

onde usamos (2.2) na desigualdade estrita. Perceba agora que por (2.3) temos que $\theta_n \leq \Theta$ e portanto

$$\begin{aligned}
\mu_n &\in (\mu_{\min}; \Lambda - \Theta L] \implies \\
\mu_n &\leq \Lambda - \Theta L \leq \Lambda - \theta_n L \implies \\
\mu_n + L\theta_n &\leq \Lambda.
\end{aligned}$$

Logo, Da desigualdade (2.17) acima decorre que

$$\|y^\delta - F(x_{n,\lambda})\| < (1 - \lambda(1 - \Lambda))\|b_n^\delta\|. \tag{2.18}$$

Defina agora

$$\lambda_{\max} := \sup \{\lambda \in (0, 1] : x_{n,\lambda} \in \mathcal{L}(x_0)\}.$$

Gostaríamos de mostrar que $\lambda_{\max} = 1$, obtendo daí que

$$x_{n+1}^\delta = x_n^\delta + \lambda_{\max} h_n = x_{n,\lambda_{\max}} \implies x_{n+1}^\delta \in \mathcal{L}(x_0).$$

Suponha então que $\lambda_{\max} < 1$, isto é, que $x_{n,\lambda_{\max}}$ pertence a fronteira de $\mathcal{L}(x_0) \subset D(F)$. Mas,

$$\begin{aligned}
0 &< \Lambda < 1 \implies 0 < 1 - \Lambda < 1 \implies \\
0 &< \lambda_{\max}(1 - \Lambda) < 1 \implies 0 < 1 - \lambda_{\max}(1 - \Lambda) < 1
\end{aligned}$$

Usando a continuidade de F , obtemos de (2.18),

$$\begin{aligned}
\|y^\delta - F(x_{n,\lambda_{\max}})\| &\leq (1 - \lambda_{\max}(1 - \Lambda))\|b_n^\delta\| \\
&< \|b_n^\delta\| \leq \|y^\delta - F(x_0)\|,
\end{aligned}$$

porque $x_n^\delta \in \mathcal{L}(x_0)$. Mas isso implica que $x_{n, \lambda_{\max}}$ não pertence a fronteira de $\mathcal{L}(x_0)$ pois

$$\partial \mathcal{L}(x_0) = \{x \in D(F) : \|y^\delta - F(x)\| = \|y^\delta - F(x_0)\|\},$$

o que é uma contradição. Logo $\lambda_{\max} = 1$ e segue o resultado desejado. Agora tomando $\lambda = 1$ em (2.17),

$$\|b_{n+1}^\delta\| < (\mu_n + L\theta_n) \|b_n^\delta\|,$$

provando (2.15). Finalmente, como $\mu_n + L\theta_n \leq \Lambda < 1$, temos que $\|b_n^\delta\| < \Lambda \|b_{n-1}^\delta\| < \dots < \Lambda^n \|b_0^\delta\|$. Logo, existe $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $\|b_n^\delta\| \leq \tau\delta$. Isto mostra que a desigualdade (2.14) é em algum momento verificada, o que encerra o algoritmo. ■

Observação 5 O teorema acima pode ser feito para o caso livre de ruídos sem muitas alterações. Devemos substituir b_n^δ por $b_n^0 := y - F(x_n)$. A hipótese $\|b_n^\delta\| > \tau\delta$ deve ser substituída por $\|b_n^0\| \neq 0$. Então todos os resultados do teorema serão válidos para esse caso, com exceção de (2.14) que deve ser substituído por $\|b_n^0\| = \|y - F(x_n)\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Em particular, (2.15) é válido para $\delta = 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|b_n^0\| \neq 0$.

2.2 Convergência do Método

Usando as desigualdades (2.14) e (1.3) obtemos $\|y - F(x_{N(\delta)}^\delta)\| \leq (\tau + 1)\delta$, veja (1.7), o que mostra que $F(x_{N(\delta)}^\delta) \rightarrow y = F(x^+)$ e ainda, $\|y - F(x_{N(\delta)}^\delta)\| = O(\delta)$ quando $\delta \rightarrow 0$. No entanto, isso não é suficiente para provarmos a convergência da sequência $(x_{N(\delta)}^\delta)$ quando $\delta \rightarrow 0$. O último teorema da seção anterior prova que para cada nível de ruído $\delta > 0$, o REGINN termina fornecendo um vetor $x_{N(\delta)}^\delta$. O objetivo dessa seção será provar que, sob condições adequadas, tem-se convergência da sequência $(x_{N(\delta)}^\delta)_\delta$ para x^+ quando $\delta \rightarrow 0$.

Infelizmente não podemos assumir que o conjunto de nível $\mathcal{L}(x_0)$ é compacto ou mesmo limitado (o que poderia facilitar uma análise

global de convergência). Ao contrário, em problemas mal postos espera-se que $\mathcal{L}(x_0)$ seja ilimitado pois é possível que tenhamos uma sequência (x_n) tal que $\|y^\delta - F(x_n)\| \leq \|y^\delta - F(x_0)\|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e ao mesmo tempo $\|x_n\| \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$. Estudaremos a convergência da sequência $(x_{N(\delta)}^\delta)_\delta$ apenas localmente. Para isso, precisaremos ainda assumir uma quinta propriedade da sequência $(s_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$.

Hipótese 1 *Suponha que existe uma função contínua e monotona-mente crescente $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $t \leq \Psi(t)$, $t \in [0, 1]$ tal que se $e_n := x^+ - x_n^\delta$ é o erro na n -ésima iteração e*

$$\beta_n := \frac{\|A_n e_n - b_n^\delta\|}{\|b_n^\delta\|} < 1,$$

então definindo $z_{n,m} := \Psi(\beta_n) - \frac{\|A_n s_{n,m-1} - b_n^\delta\|}{\|b_n^\delta\|}$ temos

$$\|s_{n,m} - e_n\|^2 - \|s_{n,m-1} - e_n\|^2 < C_M \|b_n^\delta\| \cdot \|v_{n,m-1}\| z_{n,m}$$

para $m \in \{1, 2, \dots, m_n\}$, onde $C_M > 0$ é uma constante e $s_{n,m} = s_{n,m-1} + A_n^* v_{n,m-1}$ (veja a condição (2.5)).

Observação 6 *Uma consequência imediata e bastante importante da hipótese 1 é o seguinte resultado de monotonia: Se n está fixado e*

$$\Psi(\beta_n) \leq \frac{\|A_n s_{n,m-1} - b_n^\delta\|}{\|b_n^\delta\|},$$

então

$$\begin{aligned} \|s_{n,m} - e_n\|^2 - \|s_{n,m-1} - e_n\|^2 &< 0 \implies \\ \|s_{n,m} - e_n\| &< \|s_{n,m-1} - e_n\|, \end{aligned}$$

para $m \in \{1, 2, \dots, m_n\}$. Daí, como $s_{n,0} = 0$,

$$\begin{aligned} \|x^+ - x_{n+1}^\delta\| &= \|e_n - s_{n,m_n}\| \\ &< \|e_n - s_{n,m_n-1}\| < \|e_n - s_{n,m_n-2}\| \\ &< \dots < \|e_n - s_{n,0}\| = \|e_n\| = \|x^+ - x_n^\delta\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|x^+ - x_{n+1}^\delta\| < \|x^+ - x_n^\delta\|.$$

Segundo [32], alguns métodos que satisfazem a hipótese 1 acima são: Landweber e Máxima Descida com $\Psi(t) = 2t$, gradiente conjugado com $\Psi(t) = \sqrt{2t}$, entre outros.

Conforme mencionado acima, nos concentraremos em convergência local. Para um primeiro passo, vamos provar a monotonia do erro $\|e_n\| = \|x^+ - x_n^\delta\|$, restringindo as condições (2.6) e (2.8) a uma bola de raio $\rho > 0$ e de centro em x^+ . Em particular, (2.6) deve ser substituído por

$$\|E(v, w)\| \leq L \|F'(w)(v - w)\|, \text{ para algum } L < 1 \quad (2.19)$$

e para todo $v, w \in B_\rho(x^+) \subset D(F)$.

Observação 7 Como $F(x) = y$ tem uma única solução $x = x^+$ na bola $B_\rho(x^+)$ (1.2), da desigualdade (2.19) acima decorre que $N(F'(x^+)) = N(A) = \{0\}$. De fato, se existir $v \neq 0$ tal que $v \in N(A)$ então tomando $t \in \mathbb{R}$ não nulo tal que $u := (x^+ + tv) \in B_\rho(x^+)$ teremos, devido a (2.19),

$$\begin{aligned} \|F(u) - y\| &\leq \|F(u) - F(x^+) - A(u - x^+)\| + \|A(u - x^+)\| \\ &= \|E(u, x^+)\| + |t| \cdot \|Av\| \\ &\leq (L + 1) |t| \cdot \|Av\| = 0, \end{aligned}$$

o que implica que u é solução de $F(x) = y$. Mas isso não pode ocorrer pois $u \neq x^+$. Logo, $N(A) = \{0\}$.

Repare que se assumirmos que as constantes em (2.3) e (2.19) satisfazem

$$\Psi\left(\frac{L}{1-L}\right) + \Theta L < \Lambda, \quad (2.20)$$

para algum $\Lambda < 1$, então a definição

$$\mu_{\min} := \Psi\left(\left(\frac{1}{\tau} + L\right) \frac{1}{1-L}\right), \quad (2.21)$$

implica, pela continuidade de Ψ que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mu_{\min} = \Psi \left(\frac{L}{1-L} \right) < \Lambda - \Theta L.$$

Logo, existe $\tau > 1$ tal que

$$\mu_{\min} < \Lambda - \Theta L, \quad (2.22)$$

o que mostra que o intervalo $[\mu_{\min}; \Lambda - \Theta L] \subset (0, 1]$ é não vazio e podemos portanto escolher $\mu_n \in [\mu_{\min}; \Lambda - \Theta L]$ em qualquer iteração.

Observação 8 *Para o caso livre de ruídos tomamos simplesmente $\mu_{\min} := \Psi \left(\frac{L}{1-L} \right)$ e então a desigualdade (2.22) é imediatamente satisfeita se assumirmos (2.20).*

Teorema 6 *Assuma (2.3), (2.5) e a hipótese 1. Suponha que (2.8) é verdadeiro em $B_\rho(x^+)$ onde $\rho > 0$ e assumo (2.19) com L satisfazendo (2.20). Defina $\mu_{\min}$ conforme (2.21) com $\tau > \frac{1+\varrho}{1-\varrho}$ de modo que (2.22) seja satisfeito. Restrinja todas as tolerâncias μ_n ao intervalo não vazio $[\mu_{\min}; \Lambda - \Theta L] \subset (0, 1]$ e comece com $x_0 \in B_\rho(x^+)$. Então existe $N = N(\delta)$ tal que as iterações $\{x_1^\delta, x_2^\delta, \dots, x_{N(\delta)}^\delta\}$ do REGINN estão bem definidas e se mantém na bola $B_\rho(x^+)$. Ainda, há uma redução no erro estritamente monótona:*

$$\|x^+ - x_n^\delta\| < \|x^+ - x_{n-1}^\delta\|, \quad n = 1, 2, \dots, N(\delta). \quad (2.23)$$

Apenas a última iteração satisfaz o princípio da discrepância (2.14) e os resíduos decrescem linearmente na taxa (2.15).

Demonstração: *A argumentação imediatamente acima do enunciado do teorema mostra que $\mu_n \in (0, 1]$ está bem definido. Vamos argumentar mais uma vez por indução. x_0 está bem definido e pertence a bola $B_\rho(x^+)$ por hipótese. Suponha que para algum $n \in \mathbb{N}$, as iterações $\{x_1^\delta, x_2^\delta, \dots, x_n^\delta\}$ estão bem definidas e pertencem a bola $B_\rho(x^+)$. Se $\|b_n^\delta\| \leq \tau\delta$ então o REGINN é encerrado com $N(\delta) = n$. Caso contrário, teremos $\|b_n^\delta\| > \tau\delta$ e obtemos como em (2.16) e (2.13)*

$$\frac{\|P_{R(A_n)^\perp} b_n^\delta\|}{\|b_n^\delta\|} \leq (1 + \varrho) \left[\frac{\delta}{\|b_n^\delta\|} \right] + \varrho < \frac{1 + \varrho}{\tau} + \varrho. \quad (2.24)$$

Como $\varrho < 1$, para $\tau > \frac{1+\varrho}{1-\varrho}$ teremos que $0 < \frac{1+\varrho}{\tau} + \varrho < 1$. Da hipótese 1 segue que

$$\frac{1+\varrho}{\tau} + \varrho \leq \Psi \left(\frac{1+\varrho}{\tau} + \varrho \right). \quad (2.25)$$

Como $\Theta \geq 1$, da condição (2.20) e porque $t \leq \Psi(t)$ para $0 \leq t \leq 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{L}{1-L} + L &\leq \frac{L}{1-L} + \Theta L \leq \Psi \left(\frac{L}{1-L} \right) + \Theta L < 1 \\ \implies L &< \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pela observação 3 e usando o fato de que Ψ é crescente,

$$\begin{aligned} \varrho &\leq \frac{L}{1-L} \implies \\ 1 + \varrho &\leq 1 + \frac{L}{1-L} = \frac{1}{1-L} \implies \\ \frac{1+\varrho}{\tau} + \varrho &\leq \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{1-L} \right) + \frac{L}{1-L} = \left(\frac{1}{\tau} + L \right) \frac{1}{1-L} \implies \\ \Psi \left(\frac{1+\varrho}{\tau} + \varrho \right) &\leq \Psi \left(\left(\frac{1}{\tau} + L \right) \frac{1}{1-L} \right) = \mu_{\min}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Daí, por (2.24) e (2.25),

$$\frac{\|P_{R(A_n)^\perp} b_n^\delta\|}{\|b_n^\delta\|} < \frac{1+\varrho}{\tau} + \varrho \leq \Psi \left(\frac{1+\varrho}{\tau} + \varrho \right) \leq \mu_{\min}$$

e segue do lema 3 que o passo do REGINN h_n e por consequência a atualização $x_{n+1}^\delta = x_n^\delta + h_n$ estão bem definidos. Agora usando (2.19),

$$\begin{aligned} \|A_n e_n - b_n^\delta\| &= \|F'(x_n^\delta)(x^+ - x_n^\delta) - (y^\delta - F(x_n^\delta))\| \\ &\leq \|y - y^\delta\| + \|E(x^+, x_n^\delta)\| \\ &\leq \delta + L \|A_n e_n\|. \end{aligned}$$

Como $\|b_n^\delta\| > \tau\delta$, temos que $\delta < \frac{1}{\tau} \|b_n^\delta\|$ e então

$$\|A_n e_n - b_n^\delta\| < \frac{1}{\tau} \|b_n^\delta\| + L (\|A_n e_n - b_n^\delta\| + \|b_n^\delta\|).$$

Resulta que

$$\beta_n := \frac{\|A_n e_n - b_n^\delta\|}{\|b_n^\delta\|} < \left(\frac{1}{\tau} + L\right) \frac{1}{1-L},$$

que pela monotonia de Ψ implica em

$$\Psi(\beta_n) < \Psi\left(\left(\frac{1}{\tau} + L\right) \frac{1}{1-L}\right) = \mu_{\min} \leq \mu_n. \quad (2.27)$$

Agora, da definição de m_n (2.2),

$$\|A_n s_{n,m-1} - b_n^\delta\| \geq \mu_n \|b_n^\delta\|, \quad m = 1, 2, \dots, m_n$$

implica que

$$\Psi(\beta_n) < \frac{\|A_n s_{n,m-1} - b_n^\delta\|}{\|b_n^\delta\|}.$$

Segue da observação 6 que

$$\|x^+ - x_{n+1}^\delta\| < \|x^+ - x_n^\delta\| < \rho,$$

o que prova (2.23) e também que $x_{n+1}^\delta \in B_\rho(x^+)$. Para provar (2.15) e que existe $N = N(\delta)$, basta aplicar um raciocínio análogo ao usado em (2.17) com $\lambda = 1$. ■

Perceba que nesse caso a escolha da sequência (μ_n) pode ser feita a priori. Devemos escolher $\tau > 1$ de modo que tenhamos simultaneamente $\tau > \frac{1+\varrho}{1-\varrho}$ e

$$\mu_{\min} := \Psi\left(\left(\frac{1}{\tau} + L\right) \frac{1}{1-L}\right) < \Lambda - \Theta L,$$

e em seguida tomar $(\mu_n) \subset [\mu_{\min}; \Lambda - \Theta L]$.

Observação 9 Este teorema também pode ser provado para o caso livre de ruídos sem muitas alterações. Substitua b_n^δ por b_n^0 e tome $\mu_{\min} := \Psi\left(\frac{L}{1-L}\right)$. A desigualdade (2.24) ficará simplesmente

$$\frac{\|P_{R(A_n)^\perp} b_n^\delta\|}{\|b_n^\delta\|} < \varrho < 1.$$

Como $\varrho < 1$ e Ψ é crescente, (2.26) fica,

$$\begin{aligned} \varrho &\leq \frac{L}{1-L} \implies \\ \frac{\|P_{R(A_n)^\perp} b_n^\delta\|}{\|b_n^\delta\|} &< \varrho < \Psi(\varrho) \leq \Psi\left(\frac{L}{1-L}\right) = \mu_{\min}. \end{aligned}$$

Para provar (2.27) fazemos

$$\begin{aligned} \|A_n e_n - b_n^0\| &= \|F'(x_n)(x^+ - x_n) - (y - F(x_n))\| \\ &\leq L \|A_n e_n\| \leq L (\|A_n e_n - b_n^0\| + \|b_n^0\|), \end{aligned}$$

o que implica em

$$\beta_n = \frac{\|A_n e_n - b_n^0\|}{\|b_n^0\|} < \frac{L}{1-L}$$

e portanto

$$\Psi(\beta_n) < \Psi\left(\frac{L}{1-L}\right) = \mu_{\min} \leq \mu_n. \quad (2.28)$$

Em particular, (2.23) fica

$$\|x^+ - x_{n+1}\| < \|x^+ - x_n\|, \quad (2.29)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|b_n^0\| \neq 0$, o que implica ainda que todas as iterações ficam na bola $B_\rho(x^+)$.

Com o teorema 6 acima, podemos mostrar a convergência $x_{N(\delta)}^\delta \longrightarrow x^+$ quando $\delta \longrightarrow 0$, mas apenas numa norma mais fraca do que a norma padrão em X ou num sentido mais fraco de convergência. Para esse fim, definimos um operador fracamente sequencialmente fechado.

Definição 3 Uma função $F : D(F) \longrightarrow Y$, onde $D(F) \subset X$ e X e Y são espaços normados, é dita ser fracamente sequencialmente fechada se para cada sequência $(x_n) \subset D(F)$ com x_n convergindo fracamente para $x \in X$ (ou seja, $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ para todo funcional linear e limitado f) e com $F(x_n) \longrightarrow y \in Y$, tivermos que $x \in D(F)$ e $F(x) = y$.

Para provar convergência fraca da sequência $(x_{N(\delta)}^\delta)_\delta$, vamos

supor que F é fracamente sequencialmente fechado.

Corolário 7 *Assuma todas as hipóteses e notações do teorema 6. Assuma ainda que F é fracamente sequencialmente fechado e seja (δ_j) uma sequência de números positivos convergindo a zero. Então qualquer subsequência de $(x_{N(\delta_j)}^{\delta_j})_{j \in \mathbb{N}}$ possui ela própria uma subsequência que converge fracamente para x^+ .*

Demonstração: Pelo teorema 6, qualquer subsequência de $(x_{N(\delta_j)}^{\delta_j})_{j \in \mathbb{N}}$ está contida na bola $B_\rho(x^+)$, sendo portanto limitada. Logo, qualquer subsequência de $(x_{N(\delta_j)}^{\delta_j})_{j \in \mathbb{N}}$ possui ela própria uma subsequência, que denotaremos por $(x_{N(\delta_{j_k})}^{\delta_{j_k}})_{k \in \mathbb{N}}$, que converge fracamente a um elemento $\xi \in X$. Assim,

$$x_{N(\delta_{j_k})}^{\delta_{j_k}} \rightharpoonup \xi \text{ quando } k \longrightarrow \infty.$$

Mas, por (1.7),

$$\left\| F \left(x_{N(\delta_{j_k})}^{\delta_{j_k}} \right) - y \right\| \leq (\tau + 1) \delta_{j_k} \longrightarrow 0 \text{ quando } k \longrightarrow \infty,$$

ou seja,

$$F \left(x_{N(\delta_{j_k})}^{\delta_{j_k}} \right) \longrightarrow y \text{ quando } k \longrightarrow \infty.$$

Pela hipótese de que F é fracamente sequencialmente fechado, segue que $\xi \in D(F)$ e $F(\xi) = y$. Pela unicidade da solução do sistema $F(x) = y$ (referência (1.2)), segue que $\xi = x^+$. Assim,

$$x_{N(\delta_{j_k})}^{\delta_{j_k}} \rightharpoonup x^+ \text{ quando } k \longrightarrow \infty.$$

■

Para o próximo resultado de convergência, defina para cada $x \in X$, $\|x\|_A := \|Ax\|$. Então utilizando a observação 7, podemos provar que $\|\cdot\|_A$ é uma norma. Nessa norma temos convergência.

Corolário 8 *Assuma todas as hipóteses do teorema 6. Então*

$$\left\| x^+ - x_{N(\delta)}^\delta \right\|_A \leq \frac{1 + \tau}{1 - L} \delta.$$

Demonstração: Para facilitar a notação façamos $x_{N(\delta)}^\delta := x_N$. (2.19)
e a desigualdade triangular reversa implicam na desigualdade

$$\begin{aligned}
\|x^+ - x_N\|_A &= \|F'(x^+) (x^+ - x_N)\| \\
&\geq \frac{1}{L} \|F(x_N) - F(x^+) - F'(x^+) (x_N - x^+)\| \\
&\geq \frac{1}{L} (-\|y - F(x_N)\| + \|F'(x^+) (x_N - x^+)\|) \\
&= -\frac{1}{L} \|y - F(x_N)\| + \frac{1}{L} \|x^+ - x_N\|_A,
\end{aligned}$$

que por sua vez implica que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{L} - 1\right) \|x^+ - x_N\|_A &\leq \frac{1}{L} \|y - F(x_N)\| \implies \\
\|x^+ - x_N\|_A &\leq \frac{1}{1 - L} \|y - F(x_N)\|.
\end{aligned}$$

O resultado desejado segue de (1.7). ■

A propriedade de regularização (1.6) é portanto válida para convergência na norma $\|\cdot\|_A$. Para provarmos essa propriedade para a norma padrão em Y , vamos assumir uma propriedade de estabilidade da sequência $(s_{n,m})$. Para deixar mais claro, vamos representar por $(s_{n,m}^\delta)$ a sequência gerada pelo algoritmo REGINN quando utilizamos o vetor y^δ satisfazendo (1.3) e simplesmente por $(s_{n,m})$ a sequência gerada por este algoritmo no caso livre de ruídos ($\delta = 0$), isto é, quando utilizamos o vetor exato y . No segundo caso, o algoritmo gera uma sequência (x_n) de tal modo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^+ - x_n\| = 0,$$

conforme será mostrado no lema 10 adiante. A propriedade exigida é que para cada $n = 0, 1, \dots, N(\delta) - 1$, a sequência $(s_{n,m})_{0 \leq m \leq m_n}$ satisfaça

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} s_{n,m}^\delta = s_{n,m}, \text{ para cada } m \leq m_n \text{ fixado.} \quad (2.30)$$

Segundo [32], os mesmos métodos que satisfazem a hipótese (1) (Landwebwer, máxima descida, gradiente conjugado, etc.), também satisfazem a propriedade (2.30) acima.

Assumindo a propriedade (2.30) e as hipóteses do teorema 6, seremos capazes de demonstrar o principal teorema dessa seção (teorema 9 abaixo), que garante que a propriedade de regularização (1.6) é satisfeita para a sequência gerada pelo REGINN.

Teorema 9 *Assuma (2.30) e as hipóteses do teorema 6. Entretanto, assumamos que $\mu_n \in [\underline{\mu}; \Lambda - \Theta L)$ para um $\underline{\mu} > \mu_{\min}$. Então a propriedade de regularização (1.6) é satisfeita.*

Para a demonstração desse teorema precisaremos demonstrar alguns lemas intermediários. Assumiremos até o final dessa seção, todas as hipóteses do teorema (9) acima.

Lema 10 *No caso livre de ruídos $\delta = 0$ temos convergência, isto é,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^+ - x_n\| = 0.$$

Demonstração: *Inicialmente perceba que, segundo as observações 5 e 9, as desigualdades (2.15) e (2.29) são válidas no caso livre de ruídos $\delta = 0$. Se $F(x_n) = y$ para algum $n \in \mathbb{N}$ então o REGINN termina com $x_n = x^+$ (veja o algoritmo 2). Vamos mostrar que caso isso não ocorra, então a sequência gerada $(x_n) \subset X$ é de Cauchy e portanto converge, já que X é completo. Em seguida mostraremos que este limite é x^+ . Seja portanto $l, p \in \mathbb{N}$ com $l > p$. Defina $e_n := x^+ - x_n$ e perceba que*

$$\begin{aligned} \|x_l - x_p\|^2 &= \|e_l - e_p\|^2 \\ &= 2 \langle e_l - e_p, e_l \rangle + \|e_p\|^2 - \|e_l\|^2. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Mas pela condição (2.5),

$$e_l - e_p = - \sum_{i=p}^{l-1} s_{i,m_i} = - \sum_{i=p}^{l-1} A_i^* \bar{v}_i, \text{ onde } \bar{v}_i := - \sum_{k=1}^{m_i} v_{i,k-1}.$$

Então

$$\langle e_l - e_p, e_l \rangle = \left\langle \sum_{i=p}^{l-1} A_i^* \bar{v}_i, e_l \right\rangle = \sum_{i=p}^{l-1} \langle \bar{v}_i, A_i e_l \rangle \leq \sum_{i=p}^{l-1} \|\bar{v}_i\| \cdot \|A_i e_l\|.$$

Vamos estimar $\|A_i e_l\|$ aplicando a condição (2.19) e um raciocínio

análogo ao utilizado no corolário 8,

$$\begin{aligned}
\|A_i e_l\| &= \|F'(x_i)(x^+ - x_l)\| \\
&\leq \|F'(x_i)(x^+ - x_i)\| + \|F'(x_i)(x_l - x_i)\| \\
&\leq \frac{1}{1-L} (\|y - F(x_i)\| + \|F(x_i) - F(x_l)\|) \\
&\leq \frac{1}{1-L} (\|y - F(x_i)\| + \|F(x_i) - y\| + \|y - F(x_l)\|) \\
&\leq \frac{3}{1-L} \|y - F(x_i)\|,
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade decorre de $i \leq l$ e da monotonia do resíduo (2.15). Portanto,

$$\langle e_l - e_p, e_l \rangle \leq \frac{3}{1-L} \sum_{i=p}^{l-1} \|\bar{v}_i\| \cdot \|y - F(x_i)\|. \quad (2.32)$$

Para estimar $\|\bar{v}_i\| \cdot \|y - F(x_i)\|$, levamos em consideração que

$$\|b_n^0 - A_n s_{n,m-1}\| \geq \mu_n \|b_n^0\|$$

para qualquer $m = 1, 2, \dots, m_n$ e aplicamos a hipótese 1. Usando a desigualdade

$$\|s_{n,m} - e_n\|^2 - \|s_{n,m-1} - e_n\|^2 < C_M \|b_n^0\| \cdot \|v_{n,m-1}\| z_{n,m}$$

com $n = i$ e somando ambos os lados de $m = 1$ até m_i obtemos

$$\|s_{i,m_i} - e_i\|^2 - \|e_i\|^2 < C_M \|b_i^0\| \sum_{m=1}^{m_i} \|v_{i,m-1}\| (\Psi(\beta_i) - \mu_i).$$

Lembremos que $\Psi(\beta_i) \leq \mu_{\min}$ (2.28) e portanto,

$$\Psi(\beta_i) \leq \mu_{\min} < \underline{\mu} \leq \mu_i \implies \mu_{\min} - \underline{\mu} \leq \Psi(\beta_i) - \mu_i < 0.$$

Decorre que

$$\begin{aligned} \|e_i\|^2 - \|s_{i,m_i} - e_l\|^2 &> C_M (\underline{\mu} - \mu_{\min}) \sum_{m=l}^{m_i} \|v_{i,m-1}\| \cdot \|b_i^0\| \implies \\ \sum_{m=l}^{m_i} \|v_{i,m-1}\| \cdot \|b_i^0\| &< \frac{\|e_i\|^2 - \|s_{i,m_i} - e_l\|^2}{C_M (\underline{\mu} - \mu_{\min})}. \end{aligned}$$

Lembremos agora que $b_i^0 = y - F(x_i)$ e que $e_{i+1} = e_i - s_{i,m_i}$. Usando a definição de $\bar{v}_i$,

$$\begin{aligned} \|\bar{v}_i\| \cdot \|y - F(x_i)\| &= \left\| - \sum_{m=1}^{m_i} v_{i,m-1} \right\| \cdot \|y - F(x_i)\| \\ &\leq \sum_{m=1}^{m_i} \|v_{i,m-1}\| \cdot \|b_i^0\| \\ &< \frac{\|e_i\|^2 - \|s_{i,m_i} - s_l^e\|^2}{C_M (\underline{\mu} - \mu_{\min})}. \end{aligned}$$

Substituindo em (2.32),

$$\begin{aligned} \langle e_l - e_p, e_l \rangle &< \frac{3}{(1-L) C_M (\underline{\mu} - \mu_{\min})} \sum_{i=p}^{l-1} (\|e_i\|^2 - \|s_{i,m_i} - e_l\|^2) \\ &\leq \frac{3}{(1-L) C_M (\underline{\mu} - \mu_{\min})} (\|e_p\|^2 - \|e_l\|^2). \end{aligned}$$

Substituindo agora em (2.31),

$$\|x_l - x_p\|^2 = \left(\frac{6}{(1-L) C_M (\underline{\mu} - \mu_{\min})} + 1 \right) (\|e_p\|^2 - \|e_l\|^2).$$

Observe que a sequência $(\|e_n\|)$ é limitada inferiormente por zero e monotonamente decrescente (2.29), logo converge. Como $p < l$, segue que $\|e_p\|^2 - \|e_l\|^2 \rightarrow 0$ quando $p \rightarrow \infty$. Isso prova que $\|x_l - x_p\|$ pode se tornar arbitrariamente pequeno com o aumento de p , logo (x_n) é Cauchy e portanto converge, digamos $x_n \rightarrow b$ quando $n \rightarrow \infty$. Como F é contínua, $F(x_n) \rightarrow F(b)$. Mas $\|y - F(x_n)\| \rightarrow 0$, o que implica que $F(x_n) \rightarrow y$ e portanto $F(b) = y$. Portanto b é a única

solução do sistema $F(x) = y$, o que implica $b = x^+$, ou seja, $x_n \longrightarrow x^+$ quando $n \longrightarrow \infty$. ■

Observação 10 Se tomarmos $\beta_n \in [\underline{\mu}; \Lambda - \Theta L)$ e tivermos em algum momento

$$\|A_n s_{n,m} - b_n^\delta\| \leq \beta_n \|b_n^\delta\|,$$

podemos certamente escolher $\mu_n \in [\underline{\mu}; \Lambda - \Theta L)$ com $\mu_n > \beta_n$ e daí teremos

$$\|A_n s_{n,m} - b_n^\delta\| < \mu_n \|b_n^\delta\|.$$

Isso significa que se definirmos

$$m_{n0} := \min_{m \in \mathbb{N}} \|A_n s_{n,m} - b_n^\delta\| \leq \mu_n \|b_n^\delta\|,$$

então para qualquer $m' \in \{m_{n0}, \dots, m_n\}$, o teorema 6 e o lema 10 serão verdadeiros com m' no lugar de m_n (definido em (2.2)) desde que o intervalo $[\mu_{\min}; \Lambda - \Theta L]$ seja substituído pelo intervalo $[\mu_{\min}; \Lambda - \Theta L)$ no teorema 6.

Para enunciar e provar o próximo lema, precisaremos definir recursivamente alguns conjuntos. Seja $X_0 := \{x_0\}$ e defina X_{n+1} a partir de X_n da seguinte forma: para cada $\xi_n \in X_n$, tome $\mu_n \in [\underline{\mu}; \Lambda - \Theta L)$ e defina

$$\begin{aligned} m_{n1} &: = \min_{m \in \mathbb{N}} \{ \|F'(\xi_n) s_{n,m} - b_{\xi_n}\| \leq \mu_n \|b_{\xi_n}\| \} \text{ e} \\ m_{n2} &: = \min_{m \in \mathbb{N}} \{ \|F'(\xi_n) s_{n,m} - b_{\xi_n}\| < \mu_n \|b_{\xi_n}\| \}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde $b_{\xi_n} := (y - F(\xi_n))$.

Claro que $m_{n1} \leq m_{n2}$. Agora defina X_{n+1} como sendo o conjunto de todos os elementos da forma $\xi_n + s_{n,M}$ onde $M \in \mathbb{N}$ satisfaz $m_{n1} \leq M \leq m_{n2}$. Dizemos que ξ_n é o *predecessor* de $\xi_n + s_{n,M}$ e que estes são os *sucessores* de ξ_n .

Segundo esta definição, teremos que todo conjunto X_n será finito. Além disso, para dados exatos ($\delta = 0$), teremos que $x_0 \in X_0$ e por consequência, $x_1 = x_0 + s_{1,m_1} = x_0 + s_{1,m_{n2}} \in X_1$. De um modo geral, $x_n \in X_n$ para todo n .

Por exemplo, se numa situação hipotética tivermos em algum

momento $X_n = \{x_n\}$ e ocorrer

$$\begin{aligned} \|A_n s_{n,m} - b_n^0\| &> \mu_n \|b_n^0\|, \text{ para } m = 1, 2, 3, \\ \|A_n s_{n,4} - b_n^0\| &= \mu_n \|b_n^0\|, \\ \|A_n s_{n,5} - b_n^0\| &= \mu_n \|b_n^0\| \text{ e} \\ \|A_n s_{n,6} - b_n^0\| &< \mu_n \|b_n^0\|, \end{aligned}$$

teremos então $m_{n1} = 4$ e $m_{n2} = m_n = 6$. Daí,

$$X_{n+1} = \{x_n + s_{n,4}, x_n + s_{n,5}, x_n + s_{n,6}\} = \{x_n + s_{n,4}, x_n + s_{n,5}, x_{n+1}\}$$

terá 3 elementos e para $j \geq n+1$, teremos que X_j terá pelo menos 3 elementos.

Pela observação 10 e pela desigualdade (2.29) na observação 9, decorre que

$$\|x^+ - \xi_{n+1}\| < \|x^+ - \xi_n\| \quad (2.34)$$

para qualquer $\xi_{n+1} \in X_{n+1}$ sucessor de $\xi_n \in X_n$.

Estamos em condições de enunciar o próximo lema.

Lema 11 *Seja $n \in \mathbb{N}$ com $n \leq N(\delta)$ para $\delta \geq 0$ suficientemente pequeno. Então $x_n^\delta \rightarrow X_n$ quando $\delta \rightarrow 0$. Mais precisamente, se $(\delta_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $0 \leq \delta_j \leq \delta$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\delta_j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$ então a sequência $(x_n^{\delta_j})_{j \in \mathbb{N}}$ se divide em subsequências convergentes, sendo que o limite de cada uma dessas subsequências é um elemento de X_n .*

Demonstração: Vamos usar indução sobre n . Para $n = 0$, $X_0 = \{x_0\}$ e como x_0 independe de δ , a afirmação é verdadeira para esse caso. Suponha agora que a afirmação seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$ fixado, isto é, suponha que $x_n^\delta \rightarrow X_n$ quando $\delta \rightarrow 0$ e que $n+1 \leq N(\delta)$ para $\delta \geq 0$ suficientemente pequeno. Como o conjunto X_n é finito, ele pode ser escrito na forma $X_n = \{\xi_n(1), \dots, \xi_n(l)\}$, para algum $l \in \mathbb{N}$. Seja $(\delta_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \delta_j \leq \delta$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\delta_j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$. Pela hipótese de indução, $(x_n^{\delta_j})_{j \in \mathbb{N}}$ se divide em subsequências $(x_n^{\delta_{j_k(p)}})_{k(p) \in \mathbb{N}}$, cada uma delas convergindo a um elemento de X_n , isto é, $x_n^{\delta_{j_k(p)}} \rightarrow \xi_n(p)$ quando $k(p) \rightarrow \infty$, $p = 1, 2, \dots, l$. Pre-

cisamos provar que $\left(x_{n+1}^{\delta_j}\right)_{j \in \mathbb{N}}$ se divide em subsequências convergentes e de modo que os seus limites pertençam a X_{n+1} . É suficiente provar que $\left(x_n^{\delta_{jk(p)}}\right)_{k(p) \in \mathbb{N}}$ se divide em subsequências que convergem para elementos de X_{n+1} com $p = 1, 2, \dots, l$. Para isso, fixe $p \in \{1, 2, \dots, l\}$. Temos então que $x_n^{\delta_{jk(p)}} \rightarrow \xi_n(p)$ quando $k(p) \rightarrow \infty$. Para facilitar a notação vamos escrever simplesmente $\lim_{k \rightarrow \infty} x_n^{\delta_k} = \xi_n \in X_n$ e provar que $x_{n+1}^{\delta_k} \rightarrow X_{n+1}$ quando $k \rightarrow \infty$.

Defina $b_n^{\delta_k} := y^{\delta_k} - F(x_n^{\delta_k})$ e $A_n^{\delta_k} := F'(x_n^{\delta_k})$. Pela continuidade de F e de F' ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_n^{\delta_k}) = F(\xi_n)$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_n^{\delta_k} = F'(\xi_n).$$

Agora, como $\|y^{\delta_k} - y\| \leq \delta_k$, e $\delta_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, temos que $y^{\delta_k} \rightarrow y$ quando $k \rightarrow \infty$ e mais uma vez pela continuidade de F , temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [y^{\delta_k} - F(x_n^{\delta_k})] = y - F(\xi_n) =: b_{\xi_n}.$$

Dessa igualdade obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|b_n^{\delta_k}\| = \|b_{\xi_n}\|,$$

e usando agora (2.30) obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A_n^{\delta_k} s_{n,m}^{\delta_k} - b_n^{\delta_k}\| = \|F'(\xi_n) s_{n,m} - b_{\xi_n}\|, \quad m \in \{0, 1, \dots, m_{n2}\}.$$

Mas da definição (2.33),

$$\|F'(\xi_n) s_{n,m_{n2}} - b_{\xi_n}\| < \mu_n \|b_{\xi_n}\|$$

e teremos portanto para k suficientemente grande que

$$\|A_n^{\delta_k} s_{n,m_{n2}}^{\delta_k} - b_n^{\delta_k}\| < \mu_n \|b_n^{\delta_k}\|. \quad (2.35)$$

Definindo

$$m_n^{\delta_k} := \min_{m \in \mathbb{N}} \{ \|A_n^{\delta_k} s_{n,m}^{\delta_k} - b_n^{\delta_k}\| < \mu_n \|b_n^{\delta_k}\| \},$$

vemos por (2.35) que $m_n^{\delta_k} \leq m_{n2}$ para k suficientemente grande. Vamos agora comparar $\mu_n \|b_n^{\delta_k}\|$ e $\|F'(\xi_n) s_{n,m_{n2}-1} - b_{\xi_n}\|$. Temos duas opções:

Caso $\mu_n \|b_n^{\delta_k}\| < \|F'(\xi_n) s_{n,m_{n2}-1} - b_{\xi_n}\|$, teremos para k suficientemente grande que

$$\mu_n \|b_n^{\delta_k}\| < \|A_n^{\delta_k} s_{n,m_{n2}-1} - b_n^{\delta_k}\| \implies m_{n2} - 1 < m_n^{\delta_k}.$$

Logo $m_{n2} - 1 < m_n^{\delta_k} \leq m_{n2}$, implicando em $m_n^{\delta_k} = m_{n2}$ para k suficientemente grande. Portanto, por (2.30),

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} s_{n,m_{n2}}^{\delta_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} s_{n,m_{n2}}^{\delta_k} = s_{n,m_{n2}} \implies \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n+1}^{\delta_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[x_n^{\delta_k} + s_{n,m_{n2}}^{\delta_k} \right] = \xi_n + s_{n,m_{n2}} \in X_{n+1}. \end{aligned}$$

Mas se $\mu_n \|b_n^{\delta_k}\| = \|F'(\xi_n) s_{n,m_{n2}-1} - b_{\xi_n}\|$, ou seja, caso a segunda opção seja verdadeira teremos que

$$\mu_n \|b_{\xi_n}\| < \|F'(\xi_n) s_{n,m_{n1}-1} - b_{\xi_n}\|$$

e

$$\mu_n \|b_{\xi_n}\| = \|F'(\xi_n) s_{n,M} - b_{\xi_n}\|,$$

para $M = m_{n1}, m_{n1} + 1, \dots, m_{n2} - 1$. Argumentando como acima, teremos para k suficientemente grande,

$$m_{n1} - 1 < m_n^{\delta_k} \leq m_{n2} \implies m_n^{\delta_k} \in \{m_{n1}, \dots, m_{n2}\}.$$

Assim, vemos que para k suficientemente grande, a sequência $(m_n^{\delta_k})_k$ pode ser dividida em subsequências constantes $m_n^{\delta_{k_j(0)}} = m_{n1}, m_n^{\delta_{k_j(1)}} = m_{n1} + 1, \dots, m_n^{\delta_{k_j(p)}} = m_{n2}$, onde $p = m_{n2} - m_{n1}$. Daí, para $l \in$

$\{0, 1, \dots, p\}$ fixo,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n+1}^{\delta_{k_j(l)}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[x_n^{\delta_{k_j(l)}} + s_{n, m_{n_2}}^{\delta_{k_j(l)}} \right] = \xi_n + s_{n, m_{n_1}+l} \in X_{n+1}.$$

Isso significa que a sequência $\left(x_{n+1}^{\delta_k}\right)_k$ pode ser dividida em subsequências, onde cada uma dessas subsequências converge a um elemento de X_{n+1} , o que prova que $x_{n+1}^{\delta_k} \rightarrow X_{n+1}$ quando $k \rightarrow \infty$, conforme queríamos. ■

Com o auxílio do próximo lema, seremos capazes de provar o teorema 9. Este lema mostra que os conjuntos X_n convergem uniformemente para x^+ .

Lema 12 Para qualquer $\eta > 0$, existe $M(\eta) \in \mathbb{N}$ tal que $\|x^+ - \xi_n\| < \eta$ para todo $n \geq M(\eta)$ e para todo $\xi_n \in X_n$.

Demonstração: Vamos supor que a afirmação não é verdadeira e derivar uma contradição. Suponha então que existe $\eta > 0$ tal que para qualquer $M \in \mathbb{N}$ fixado, $\|x^+ - \xi_n\| \geq \eta$ para algum $n \geq M$ e algum $\xi_n \in X_n$. Isso significa que existe $\eta > 0$ e uma sequência estritamente crescente $(j_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tal que $\|x^+ - \xi_{j_n}\| \geq \eta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que fixado $n \in \mathbb{N}$, $\|x^+ - \xi_{j_n}\| \geq \eta$ e então o predecessor de j_n também satisfaz essa desigualdade pois por (2.34),

$$\|x^+ - \xi_{j_n-1}\| > \|x^+ - \xi_{j_n}\| \geq \eta.$$

Portanto, podemos incluir $j_n - 1$ na sequência original $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Esse raciocínio nos leva a concluir que podemos assumir sem perda de generalidade que $j_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e também que ξ_{n-1} é o predecessor de ξ_n para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Logo, existe $M > 0$ e uma sequência (ξ_n) com $\xi_n \in X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que ξ_{n-1} é o predecessor de ξ_n para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e $\|x^+ - \xi_n\| \geq \eta$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso implica que a sequência gerada pelo algoritmo REGINN quando substituímos m_n por m' com $m' \in \{m_{n_0}, \dots, m_n\}$ e

$$m_{n_0} := \min_{n \in \mathbb{N}} \|A_n s_{n, m} - b_n^\delta\| \leq \mu_n \|b_n^\delta\|,$$

é uma sequência divergente. Mas isso é uma contradição (veja observação 10). ■

Estamos aptos a provar o teorema 9.

Demonstração: Seja $(\delta_j) \subset \mathbb{R}_+$ uma sequência satisfazendo $\delta_j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$. Suponha inicialmente que $\lim_{j \rightarrow \infty} N(\delta_j) = n \in \mathbb{N}$. Pelo lema 11, a sequência $(x_n^{\delta_j})_{j \in \mathbb{N}}$ se divide em subsequências $(x_n^{\delta_{j_{k(l)}}})_{k(l) \in \mathbb{N}}$, $l \in \{0, 1, \dots, h\}$, algum $h \in \mathbb{N}$, onde cada uma dessas subsequências converge a um elemento de X_n , ou seja, $x_n^{\delta_{j_{k(l)}}} \rightarrow \xi(l) \in X_n$ quando $k(l) \rightarrow \infty$. Para l fixo, devido a (1.7) obtemos

$$\left\| y - F(x_n^{\delta_{j_{k(l)}}}) \right\| < (R+1) \delta_{j_{k(l)}} \rightarrow 0 \text{ quando } k(l) \rightarrow \infty,$$

o que implica que $\|y - F(\xi(l))\| = 0$. Mas $X_n \subset B_\rho(x^+)$ pois as iterações do REGINN não saem da bola $B_\rho(x^+)$ (veja (2.23)). Como x^+ é a única solução da equação $F(x) = y$ nessa bola, temos que $F(x^+) = y = F(\xi(l)) \Rightarrow x^+ = \xi(l)$ para todo l fixado. Isso implica que todas as subsequências $(x_n^{\delta_{j_{k(l)}}})_{k(l) \in \mathbb{N}}$ de $(x_n^{\delta_j})_{j \in \mathbb{N}}$ convergem a x^+ quando $j \rightarrow \infty$. Como $N(\delta_j) \in \mathbb{N}$ para todo j e $N(\delta_j) \rightarrow n$, segue que $N(\delta_j) = n$ para j suficientemente grande. Daí,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_{N(\delta_j)}^{\delta_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} x_n^{\delta_j} = x^+.$$

Agora, se ao invés de termos $\lim_{j \rightarrow \infty} N(\delta_j) = n \in \mathbb{N}$, tivermos somente $(N(\delta_j))_{j \in \mathbb{N}}$ limitada, então esta sequência se divide em subsequências $(N(\delta_{j_{k(l)}}))_{k(l) \in \mathbb{N}}$ tais que $\lim_{k(l) \rightarrow \infty} N(\delta_{j_{k(l)}}) = n(l) \in \mathbb{N}$. Podemos então argumentar como acima para concluir que $\lim_{k(l) \rightarrow \infty} x_n^{\delta_{j_{k(l)}}} = x^+$, para todo l , o que implica em $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{N(\delta_j)}^{\delta_j} = x^+$.

Num último caso, se $\lim_{j \rightarrow \infty} N(\delta_j) = \infty$, para qualquer $\eta > 0$ fixado, existe $n = n(\eta) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\xi_n \in X_n$, $\|x^+ - \xi_n\| \leq \frac{\eta}{2}$ (lema 12). Pelo lema 11, existe $J(\eta) \in \mathbb{N}$ tal que se $j \geq J(\eta)$ então existe $\xi_n(j) \in X_n$ satisfazendo $\left\| \xi_n(j) - x_n^{\delta_j} \right\| < \frac{\eta}{2}$. Portanto podemos escolher $j \geq J(\eta)$ suficientemente grande de modo que $N(\delta_j) > n(\eta)$

(porque $N(\delta_j) \longrightarrow \infty$) e daí, novamente por (2.23),

$$\left\|x^+ - x_{N(\delta_j)}^{\delta_j}\right\| < \left\|x^+ - x_n^{\delta_j}\right\| \leq \left\|x^+ - \xi_n(j)\right\| + \left\|\xi_n(j) - x_n^{\delta_j}\right\| < \eta,$$

para uma escolha apropriada de $\xi_n(j) \in X_n$.

Logo, em qualquer caso, $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{N(\delta_j)}^{\delta_j} = x^+$. Como a escolha da sequência (δ_j) foi arbitrária, segue que $\lim_{\delta \rightarrow 0} x_{N(\delta)}^\delta = x^+$, ou seja, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\|x_{N(\delta)}^\delta - x^+\right\| = 0$. ■

2.3 Taxas de Convergência

Taxas de convergência para o algoritmo REGINN ainda não foram provadas levando-se em conta o contexto mais geral apresentado nas duas seções anteriores. Porém, essas taxas foram obtidas para casos especiais, quando a sequência $(s_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ é gerada na iteração interna pelo método do gradiente conjugado por exemplo (veja referência [33]). Também foram obtidas taxas de convergência quando a sequência em questão é gerada por *filtros lineares* (referências [30] e [31]). Nessa seção, estudaremos taxas de convergência para esse segundo caso, isto é, vamos supor que a sequência $(s_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ é gerada da seguinte maneira: na iteração n , deixamos o parâmetro n fixo e definimos²

$$s_{n,m} := g_m(A_n^* A_n) A_n^* b_n^\delta, \quad (2.36)$$

onde $g_m : J \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua por partes³, $J := [0, \|A_n\|^2]$ e $m \in \mathbb{N}$ é chamado de parâmetro de regularização. Supomos que $g_0 := 0$ e para facilitar a notação definimos

$$p_m(t) := 1 - t g_m(t). \quad (2.37)$$

²Veja a discussão no apêndice C.

³A definição do operador $g_m(A_n^* A_n)$ é dada no apêndice A.

Supomos ainda que existem constantes positivas C_g , C_p e α tais que

$$\begin{aligned} (a) \quad & \sup_{t \in J} |g_m(t)| \leq C_g m^\alpha; \\ (b) \quad & \sup_{t \in J} |tp_m(t)| \leq C_p m^{-\alpha}; \\ (c) \quad & \sup_{t \in J} |p_m(t)| = 1. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Observe que da desigualdade triangular reversa obtemos $|p_m(t)| = |1 - tg(t)| \geq |tg(t)| - 1$, para todo $t \in J$ e para todo $m \in \mathbb{N}$. Da condição (c) acima decorre que $1 = \sup_{t \in J} |p_m(t)| \geq \sup_{t \in J} |tg_m(t)| - 1$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\tilde{C}_g := \sup_{m \in \mathbb{N}} \sup_{t \in J} t |g_m(t)| \leq 2. \tag{2.39}$$

Observação 11 *Das condições (2.38) podemos provar as condições (C.7). De fato, de (2.38) (b), temos para todo $t \in J$, com $t > 0$ e $m \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} |tp_m(t)| &\leq C_p m^{-\alpha} \\ \implies |t - t^2 g_m(t)| &\leq C_p m^{-\alpha} \\ \implies t^2 |g_m(t)| - t &\leq C_p m^{-\alpha} \\ \implies \lim_{m \rightarrow \infty} [t^2 |g_m(t)| - t] &\leq 0 \\ \implies \lim_{m \rightarrow \infty} t^2 |g_m(t)| &\leq t \\ \implies \lim_{m \rightarrow \infty} |g_m(t)| &\leq \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

Por um raciocínio análogo, porém substituindo a terceira linha pela desigualdade

$$t - t^2 |g_m(t)| \leq C_p m^{-\alpha},$$

obtemos $\lim_{m \rightarrow \infty} |g_m(t)| \geq \frac{1}{t}$ e portanto $\lim_{m \rightarrow \infty} |g_m(t)| = \frac{1}{t}$. Como $t > 0$, $\frac{1}{t} > 0$ e assim,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(t) = \frac{1}{t}, \quad t > 0.$$

A condição

$$|tg_m(t)| \leq C_g, \quad t > 0$$

é imediatamente satisfeita aplicando-se (2.39). Isso significa que a tese do lema 35 apêndice C, é válida se assumirmos (2.38).

Para esse caso que estamos estudando, o algoritmo REGINN se torna, para uma escolha a priori da sequência (μ_n) ,

Algoritmo 4 Dados $(x_0; F; y^\delta; (\mu_n); F'; \tau; \delta; (g_m))$

```

 $n := 0;$ 
 $x_0^\delta := x_0;$ 
 $b_n^\delta := y^\delta - F(x_n^\delta);$ 
 $A_n := F'(x_n^\delta);$ 
Enquanto  $\|b_n^\delta\| > \tau\delta$ 
     $m := 0;$ 
     $s_{n,0} = 0;$ 
    Enquanto  $\|A_n s_{n,m} - b_n^\delta\| \geq \mu_n \|b_n^\delta\|$ 
         $m := m + 1;$ 
         $s_{n,m} := g_m(A_n^* A_n) A_n^* b_n^\delta;$ 
    Fim
     $x_{n+1}^\delta := x_n^\delta + s_{n,m};$ 
     $n := n + 1;$ 
     $b_n^\delta := y^\delta - F(x_n^\delta);$ 
     $A_n := F'(x_n^\delta);$ 
Fim
 $x_{N(\delta)}^\delta = x_n^\delta.$ 

```

Compare esse algoritmo com o algoritmo 1 mais geral.

No artigo [31], o autor foi capaz de mostrar que sob condições adequadas, o algoritmo 4 acima termina com uma aproximação $x_{N(\delta)}^\delta$ para x^+ e que a condição de fonte do tipo Hölder

$$x^+ - x_0 \in R\left((A^* A)^{\frac{1}{2}}\right),$$

implica na existência de um número $\lambda \in [0, 1)$ tal que

$$\|x_{N(\delta)}^\delta - x^+\| = O\left(\delta^{\frac{1-\lambda}{2}}\right), \delta \longrightarrow 0,$$

onde, como antes, $A := F'(x^+)$.

Utilizaremos porém, a abordagem utilizada no artigo [30], onde esta condição de fonte será relaxada. Mais precisamente, provaremos

que existe um número positivo $\lambda_{\min} < 1$ tal que a condição de fonte do tipo Hölder

$$x^+ - x_0 \in R \left((A^* A)^{\frac{\lambda}{2}} \right) \text{ para } \lambda \in (\lambda_{\min}, 1], \quad (2.40)$$

implica na taxa de convergência

$$\left\| x_{N(\delta)}^\delta - x^+ \right\| = O \left(\delta^{\frac{\lambda - \lambda_{\min}}{1 + \lambda}} \right), \delta \longrightarrow 0.$$

Para obtermos taxas de convergência, vamos substituir as condições de não linearidade da função F (2.6) e (2.8) pelas seguintes condições:

$$\|F'(v)\| \leq 1, \forall v \in D(F). \quad (2.41)$$

Suponha que existe $Q : X \times X \longrightarrow \mathcal{L}(Y, Y)$ tal que

$$\begin{aligned} F'(v) &= Q(v, w) F'(w) \text{ e} \\ \|I - Q(v, w)\| &\leq C_Q \|v - w\|, \end{aligned} \quad (2.42)$$

para todo $v, w \in B_\rho(x^+)$, para algum $\rho > 0$ (compare essa condição com a condição mais relaxada apresentada em (1.20)).

Observação 12 *Por (2.42) acima*

$$\|Q(v, w)\| - 1 = \|Q(v, w)\| - \|I\| \leq \|Q(v, w) - I\| \leq C_Q \|v - w\|,$$

que implica , para todo $v, w \in B_\rho(x^+)$,

$$\|Q(v, w)\| \leq 1 + C_Q \|v - w\| \leq 1 + C_Q 2\rho.$$

A condição (2.42) é uma restrição forte, da qual podemos derivar a condição do cone tangencial (2.7) caso $C_Q \rho < 1$. De fato se $v, w \in$

$B_\rho(x^+)$ e $C_Q\rho < 1$,

$$\begin{aligned}
\|E(v, w)\| &= \|F(v) - F(w) - F'(w)(v - w)\| \\
&= \left\| \int_0^1 [F'(w + t(v - w)) - F'(w)](v - w) dt \right\| \\
&= \left\| \int_0^1 [Q(w + t(v - w), w) - I] F'(w)(v - w) dt \right\|,
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|E(v, w)\| &\leq \|F'(w)(v - w)\| \int_0^1 C_Q t \|v - w\| dt \\
&= \frac{1}{2} C_Q \|v - w\| \cdot \|F'(w)(v - w)\| \\
&\leq \frac{1}{2} C_Q 2\rho \|F'(w)(v - w)\|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|E(v, w)\| \leq C_Q\rho \|F'(w)(v - w)\|. \quad (2.43)$$

Observe que para $L := C_Q\rho < 1$, a condição (2.6) é satisfeita para todos os vetores $v, w \in B_\rho(x^+)$. Ainda, se caso $C_Q\rho < \frac{1}{2}$, pelo lema 4, decorre que (2.8) é satisfeita.

Procedemos agora como em (2.7). Pela desigualdade triangular reversa,

$$\|F(v) - F(w)\| \geq (1 - C_Q\rho) \|F'(w)(v - w)\|. \quad (2.44)$$

De (2.43) e (2.44) acima e usando $C_Q\rho < 1$,

$$\|E(v, w)\| \leq C_Q\rho \frac{1}{1 - C_Q\rho} \|F(v) - F(w)\|.$$

Daí,

$$\|E(v, w)\| \leq \omega \|F(v) - F(w)\|, \quad \forall v, w \in B_\rho(x^+), \quad (2.45)$$

onde $\omega = \frac{C_Q\rho}{1 - C_Q\rho}$.

Note que para $C_Q\rho < \frac{1}{2}$,

$$1 - C_Q\rho > \frac{1}{2} \implies \frac{1}{1 - C_Q\rho} < 2 \implies \omega = \frac{C_Q\rho}{1 - C_Q\rho} < 2C_Q\rho < 1.$$

Defina $b_n^\epsilon := y - F(x_n^\delta) - E(x^+, x_n^\delta)$ e $d_n := \|b_n^\delta\|$. Então $A_n e_n = b_n^\epsilon$ com $e_n := x^+ - x_n^\delta$ e por (2.45),

$$\begin{aligned} \|b_n^\delta - b_n^\epsilon\| &= \|y^\delta - F(x_n^\delta) - y + F(x_n^\delta) + E(x^+, x_n^\delta)\| \quad (2.46) \\ &\leq \delta + \|E(x^+, x_n^\delta)\| \leq \delta + \omega \|F(x^+) - F(x_n^\delta)\| \\ &\leq \delta + \omega (\|y - y^\delta\| + \|y^\delta - F(x_n^\delta)\|) \\ &\leq \delta + \omega\delta + \omega \|b_n^\delta\| = (1 + \omega)\delta + \omega d_n =: \epsilon(x_n^\delta, \delta). \end{aligned}$$

Lema 13 *Seja (g_m) uma sequência satisfazendo (2.38) e suponha que (2.42) é satisfeito com $C_Q\rho < \frac{1}{2}$. Fixe $n \in \mathbb{N}$, assumo que $x_n^\delta \in B_\rho(x^+)$ e defina $\omega = \frac{C_Q\rho}{1 - C_Q\rho} < 1$. Se $\tau \geq \frac{1+\omega}{1-\omega}$, então o parâmetro m_n definido em (2.2) é finito para qualquer $\mu_n \in \left(\omega + \frac{(1+\omega)\delta}{d_n}, 1\right]$.*

Demonstração: Enquanto o princípio da discrepância não é satisfeito, isto é, enquanto $d_n > \tau\delta$, teremos

$$\frac{\delta}{d_n} < \frac{1}{\tau} \implies \omega + \frac{(1+\omega)\delta}{d_n} < \omega + \frac{(1+\omega)}{\tau}.$$

Por hipótese,

$$\tau \geq \frac{1+\omega}{1-\omega} \implies \frac{1}{\tau} \leq \frac{1-\omega}{1+\omega}.$$

Daí,

$$\omega + \frac{(1+\omega)\delta}{d_n} < \omega + \frac{(1+\omega)(1-\omega)}{(1+\omega)} = 1,$$

o que implica que o intervalo $J_n := \left(\omega + \frac{(1+\omega)\delta}{d_n}, 1\right]$ é não vazio. Tomando $\mu_n \in J_n$, teremos

$$\mu_n > \omega + \frac{(1+\omega)\delta}{d_n} \implies (1+\omega)\delta + \omega d_n < \mu_n d_n.$$

Agora, (2.42) e $C_Q\rho < \frac{1}{2}$ implicam em (2.46) e portanto

$$\|b_n^\delta - b_n^\epsilon\| \leq (1+\omega)\delta + \omega d_n < \mu_n d_n.$$

Mas $\|b_n^\delta - b_n^\epsilon\| = \|A_n e_n - b_n^\delta\|$. Logo

$$\|A_n e_n - b_n^\delta\| < \mu_n \|b_n^\delta\|. \quad (2.47)$$

Repare agora que pela definição (2.36) e por (C.8) (veja observação 11) decorre que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|A_n s_{n,m} - b_n^\delta\| \leq \|A_n e_n - b_n^\delta\| < \mu_n \|b_n^\delta\|.$$

Logo, para $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande,

$$\|A_n s_{n,m} - b_n^\delta\| < \mu_n \|b_n^\delta\|,$$

o que prova que o parâmetro m_n definido em (2.2) está bem definido. ■

Para o próximo passo, vamos estimar para n fixo, a norma do vetor s_{n,m_n} . Utilizando a definição de s_{n,m_n} (referência (2.36)), o teorema 30 do apêndice A e as condições (2.38) obtemos

$$\begin{aligned} \|s_{n,m_n}\|^2 &= \|g_{m_n}(A_n^* A_n) A_n^*(y^\delta - F(x_n^\delta))\|^2 \\ &\leq \|g_{m_n}(A_n^* A_n)\|^2 \|A_n^*\|^2 \|y^\delta - F(x_n^\delta)\|^2 \\ &= \|A_n^* A_n\| \cdot \|g_{m_n}(A_n^* A_n)\| \cdot \|g_{m_n}(A_n^* A_n)\| \cdot d_n^2 \\ &\leq \sup_{t \in [0, \|A_n\|^2]} t |g_{m_n}(t)| \sup_{t \in [0, \|A_n\|^2]} |g_{m_n}(t)| \cdot d_n^2 \\ &\leq \tilde{C}_g C_g m_n^\alpha d_n^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|s_{n,m_n}\| \leq \sqrt{\tilde{C}_g C_g m_n^{\frac{\alpha}{2}} d_n}. \quad (2.48)$$

Vamos estimar m_n e d_n individualmente. Para facilitar a notação, vamos definir $\tau_n := \frac{\mu_n d_n}{\epsilon(x_n^\delta, \delta)}$. Pelas hipóteses do lema 13, m_n está bem definido e para $\mu_n \in \left(\omega + \frac{(1+\omega)\delta}{d_n}, 1\right]$,

$$\mu_n > \omega + \frac{(1+\omega)\delta}{d_n} \implies \mu_n d_n > \omega d_n + (1+\omega)\delta = \epsilon(x_n^\delta, \delta).$$

Logo, $\tau_n > 1$. Agora, se $m_n \geq 2$, utilizamos a definição de m_n (2.2),

de s_{n,m_n} (2.36), de p_{m_n} (2.37) e de $\epsilon(x_n^\delta, \delta)$ (2.46), juntamente com (2.38) (c), novamente (2.46) e a definição de b_n^ϵ para obter

$$\begin{aligned}
\tau_n \epsilon(x_n^\delta, \delta) &= \mu_n d_n \leq \|A_n s_{n,m_n-1} - b_n^\delta\| \\
&= \|(A_n g_{m_n-1} (A_n^* A_n) A_n^* - I) b_n^\delta\| \\
&= \|(A_n A_n^* g_{m_n-1} (A_n A_n^*) - I) b_n^\delta\| \\
&= \|p_{m_n-1} (A_n A_n^*) b_n^\delta\| \\
&\leq \|p_{m_n-1} (A_n A_n^*) b_n^\epsilon\| + \|p_{m_n-1} (A_n A_n^*) (b_n^\delta - b_n^\epsilon)\| \\
&\leq \|p_{m_n-1} (A_n A_n^*) b_n^\epsilon\| + \|p_{m_n-1} (A_n A_n^*)\| \cdot \|b_n^\delta - b_n^\epsilon\| \\
&\leq \|p_{m_n-1} (A_n A_n^*) A_n e_n\| + \epsilon(x_n^\delta, \delta),
\end{aligned}$$

onde utilizamos (C.10) na terceira igualdade. Portanto,

$$(\tau_n - 1) \epsilon(x_n^\delta, \delta) \leq \|p_{m_n-1} (A_n A_n^*) A_n e_n\|.$$

Para facilitar a notação, vamos tomar simplesmente $p := p_{m_n-1} (A_n A_n^*)$, $g^j := g_{m_j} (A_j A_j^*)$, $Q_{\infty,n} := Q(x^+, x_n^\delta)$, $Q_{j,n} := Q(x_j^\delta, x_n^\delta)$ e $|T| = (T^* T)^{\frac{1}{2}}$. Então a inequação acima se torna

$$(\tau_n - 1) \epsilon(x_n^\delta, \delta) \leq \|p A_n e_n\|. \quad (2.49)$$

Vamos agora enunciar um lema que será bastante utilizado. A demonstração está no apêndice B.

Lema 14 (Desigualdade de Interpolação) *Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $0 < r \leq q$ então*

$$\|(T^* T)^r x\| \leq \|(T^* T)^q x\|^{\frac{r}{q}} \|x\|^{1-\frac{r}{q}}, \text{ para todo } x \in X.$$

Vamos assumir a condição de fonte

$$e_0 = x^+ - x_0 = |A|^\lambda w, \quad w \in X \text{ e } \lambda \in [0, 1]. \quad (2.50)$$

Usando a definição de $s_{n,m}$ (2.36) e (C.10) ,

$$\begin{aligned}
e_n &= x^+ - x_n^\delta = x^+ - (x_{n-1}^\delta + s_{n-1,m_{n-1}}) = \dots \\
&= x^+ - \left(x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} s_{j,m_j} \right) = e_0 - \sum_{j=0}^{n-1} s_{j,m_j} \\
&= e_0 - \sum_{j=0}^{n-1} A_j^* g^j b_j^\delta.
\end{aligned}$$

Usando agora a condição de fonte (2.50) acima,

$$e_n = |A|^\lambda w - w_n, \text{ com } w_n := \sum_{j=0}^{n-1} A_j^* g^j b_j^\delta. \quad (2.51)$$

Usaremos este resultado para estimar o lado direito em (2.49) .

$$pA_n e_n = pA_n |A|^\lambda w - pA_n w_n. \quad (2.52)$$

Vamos estimar a norma de cada um dos termos no lado direito de (2.52) acima. Usando (2.42) , o fato de que o operador p é auto-adjunto e a desigualdade de interpolação (lema 14),

$$\begin{aligned}
\left\| pA_n |A|^\lambda w \right\| &= \left\| pA_n |Q_{\infty,n} A_n|^\lambda w \right\| \\
&\leq \left\| \left(pA_n |Q_{\infty,n} A_n|^\lambda \right)^* \right\| \cdot \|w\| \\
&\leq \left\| |Q_{\infty,n} A_n|^\lambda A_n^* p \right\| \cdot \|w\| \\
&\leq \| |Q_{\infty,n} A_n| A_n^* p \|^\lambda \cdot \|A_n^* p\|^{1-\lambda} \|w\|.
\end{aligned} \quad (2.53)$$

Mas

$$\begin{aligned}
|||Q_{\infty,n}A_n|A_n^*p||^2 &= \langle |Q_{\infty,n}A_n|^2 A_n^*p, A_n^*p \rangle \\
&= \langle A_n^*Q_{\infty,n}^*Q_{\infty,n}A_nA_n^*p, A_n^*p \rangle \\
&= \langle Q_{\infty,n}^*Q_{\infty,n}A_nA_n^*p, A_nA_n^*p \rangle \\
&\leq ||Q_{\infty,n}^*Q_{\infty,n}A_nA_n^*p|| \cdot ||A_nA_n^*p|| \\
&\leq ||Q_{\infty,n}^*Q_{\infty,n}|| \cdot ||A_nA_n^*p||^2 \\
&= ||Q_{\infty,n}||^2 ||A_nA_n^*p||^2
\end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned}
||A_n^*p||^{1-\lambda} &= (\langle p, A_nA_n^*p \rangle)^{\frac{1-\lambda}{2}} \\
&\leq (||p|| \cdot ||A_nA_n^*p||)^{\frac{1-\lambda}{2}} \\
&\leq ||A_nA_n^*p||^{\frac{1-\lambda}{2}},
\end{aligned}$$

por (2.38) (c). Substituindo esses dois últimos resultados em (2.53) obtemos,

$$\left| \left| pA_n |A|^\lambda w \right| \right| \leq ||Q_{\infty,n}||^\lambda ||A_nA_n^*p||^{\frac{1+\lambda}{2}} ||w||.$$

Seja $\tilde{C}_Q$ uma cota para $||Q||$ em $B_\rho(x^+)$, isto é, $||Q(v, z)|| \leq \tilde{C}_Q$ para todo $v, z \in B_\rho(x^+)$ (veja observação 12). Então, usando a condição (2.38) (b),

$$\begin{aligned}
\left| \left| pA_n |A|^\lambda w \right| \right| &\leq \tilde{C}_Q^\lambda \left(C_p(m_n - 1)^{-\alpha} \right)^{\frac{1+\lambda}{2}} ||w|| \quad (2.54) \\
&= \frac{\tilde{C}_Q^\lambda C_p^{\frac{1+\lambda}{2}}}{(m_n - 1)^{\alpha \frac{1+\lambda}{2}}} ||w||.
\end{aligned}$$

Vamos estimar agora a norma do segundo termo no lado direito

de (2.52). Pela definição de w_n (2.51),

$$\begin{aligned} \|pA_n w_n\| &= \left\| pA_n \sum_{j=0}^{n-1} A_j^* g^j b_j^\delta \right\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \|pA_n A_j^* g^j b_j^\delta\|. \end{aligned}$$

Mas por (2.42), $A_n = Q_{\infty,j} A_j$. Também vale a igualdade $A_j A_j^* = |A_j^*|^2 = |A_j^*|^{1+\lambda} |A_j^*|^{1-\lambda}$. Assim,

$$\begin{aligned} \|pA_n w_n\| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \left\| pQ_{n,j} |A_j^*|^2 g^j b_j^\delta \right\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \left\| pQ_{n,j} |A_j^*|^{1+\lambda} \right\| \cdot \left\| |A_j^*|^{1-\lambda} g^j b_j^\delta \right\|. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Agora, como p e $|A_j^*|^{1+\lambda}$ são auto-adjuntos, podemos utilizar o lema 14 e a igualdade $A_j^* Q_{n,j}^* = A_n^*$ para conseguir

$$\begin{aligned} \left\| pQ_{n,j} |A_j^*|^{1+\lambda} \right\| &= \left\| |A_j^*|^{1+\lambda} Q_{n,j}^* p \right\| \\ &= \left\| (A_j A_j^*)^{\frac{1+\lambda}{2}} Q_{n,j}^* p \right\| \\ &\leq \left\| (A_j A_j^*) Q_{n,j}^* p \right\|^{\frac{1+\lambda}{2}} \left\| Q_{n,j}^* p \right\|^{\frac{1-\lambda}{2}} \\ &\leq \left\| [A_j] A_n^* p \right\|^{\frac{1+\lambda}{2}} \left\| Q_{n,j}^* p \right\|^{\frac{1-\lambda}{2}} \|p\|^{\frac{1-\lambda}{2}}. \end{aligned}$$

Dai,

$$\begin{aligned} \left\| pQ_{n,j} |A_j^*|^{1+\lambda} \right\| &\leq \left\| [Q_{\infty,n} A_n] A_n^* p \right\|^{\frac{1+\lambda}{2}} \tilde{C}_Q^{\frac{1-\lambda}{2}} .1 \\ &\leq \|Q_{\infty,n}\|^{\frac{1+\lambda}{2}} \|A_n A_n^* p\|^{\frac{1+\lambda}{2}} \tilde{C}_Q^{\frac{1-\lambda}{2}} \\ &\leq \tilde{C}_Q^{\frac{1+\lambda}{2}} \left[C_p (m_n - 1)^{-\alpha} \right]^{\frac{1+\lambda}{2}} \tilde{C}_Q^{\frac{1-\lambda}{2}} \\ &= \tilde{C}_Q C_p^{\frac{1+\lambda}{2}} (m_n - 1)^{-\alpha \frac{1+\lambda}{2}}. \end{aligned}$$

Substituindo em (2.55),

$$\|pA_n w_n\| \leq \frac{\tilde{C}_Q C_p^{\frac{1+\lambda}{2}}}{(m_n - 1)^{\alpha \frac{1+\lambda}{2}}} \sum_{j=1}^{n-1} \left\| |A_j^*|^{1-\lambda} g^j b_j^\epsilon \right\|.$$

Substituindo agora esse resultado e o resultado obtido em (2.54) em (2.52) conseguimos

$$\begin{aligned} \|pA_n e_n\| &\leq \frac{\tilde{C}_Q^\lambda C_p^{\frac{1+\lambda}{2}}}{(m_n - 1)^{\alpha \frac{1+\lambda}{2}}} \|w\| \\ &\quad + \frac{\tilde{C}_Q C_p^{\frac{1+\lambda}{2}}}{(m_n - 1)^{\alpha \frac{1+\lambda}{2}}} \sum_{j=0}^{n-1} \left\| |A_j^*|^{1-\lambda} g^j b_j^\delta \right\|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|pA_n e_n\| \leq C_w \frac{W(n)}{(m_n - 1)^{\alpha \frac{1+\lambda}{2}}}, \quad (2.56)$$

onde

$$C_w := C_p^{\frac{1+\lambda}{2}} \max \left\{ \tilde{C}_Q^\lambda, \tilde{C}_Q \right\}$$

e

$$W(n) := \|w\| + \sum_{j=0}^{n-1} \left\| |A_j^*|^{1-\lambda} g^j b_j^\delta \right\|. \quad (2.57)$$

Finalmente, de (2.49) decorre que

$$(\tau_n - 1) \epsilon(x_n^\delta, \delta) \leq C_w \frac{W(n)}{(m_n - 1)^{\alpha \frac{1+\lambda}{2}}}. \quad (2.58)$$

Com essa limitação, seremos capazes de limitar o parâmetro $m_n \in \mathbb{N}$.

Lema 15 *Seja (g_m) uma sequência satisfazendo (2.38). Assuma (2.41) e (2.42) com $C_Q \rho < \frac{1}{2}$ e suponha que as k primeiras iterações $\{x_1^\delta, \dots, x_k^\delta\}$ do REGINN estão bem definidas e se mantêm na bola $B_\rho(x^+)$. Além disso, suponha que $x_0 \in B_\rho(x^+)$ satisfaz a condição de fonte (2.50) para algum $\lambda \in [0, 1]$. Então existe uma constante $C_I > 0$ independente de*

n e k tal que

$$m_n \leq C_I \left(\frac{W(n)}{\tau_n - 1} \right)^{\frac{2}{\alpha(1+\lambda)}} \epsilon(x_n^\delta, \delta)^{-\frac{2}{\alpha(1+\lambda)}}, \text{ para } n = 0, \dots, k. \quad (2.59)$$

Demonstração: Inicialmente consideremos $m_n \geq 2$. Nesse caso, usando (2.58),

$$\begin{aligned} 2m_n - m_n &\leq 2m_n - 2 \implies 2 \leq m_n \leq 2(m_n - 1) \implies \\ (m_n)^{\alpha \frac{(1+\lambda)}{2}} &\leq 2^{\alpha \frac{(1+\lambda)}{2}} (m_n - 1)^{\alpha \frac{(1+\lambda)}{2}} \\ &\leq 2^{\alpha \frac{(1+\lambda)}{2}} C_w \frac{W(n)}{(\tau_n - 1) \epsilon(x_n^\delta, \delta)} \implies \\ m_n &\leq 2 [C_w]^{\frac{2}{\alpha(1+\lambda)}} \left[\frac{W(n)}{(\tau_n - 1) \epsilon(x_n^\delta, \delta)} \right]^{\frac{2}{\alpha(1+\lambda)}} \implies \\ m_n &\leq C_{I_1} \left[\frac{W(n)}{\tau_n - 1} \right]^{\frac{2}{\alpha(1+\lambda)}} \epsilon(x_n^\delta, \delta)^{-\frac{2}{\alpha(1+\lambda)}}, \end{aligned}$$

com $C_{I_1} := 2 [C_w]^{\frac{2}{\alpha(1+\lambda)}}$. Agora, se $m_n = 1$, temos pela definição de τ_n , (2.46) e pela definição de b_n^ϵ que

$$\tau_n \epsilon(x_n^\delta, \delta) = \mu_n \|b_n^\delta\| \leq \|b_n^\delta\| \leq \|b_n^\delta - b_n^\epsilon\| + \|b_n^\epsilon\| \leq \epsilon(x_n^\delta, \delta) + \|A_n e_n\|.$$

Usando agora (2.51), a condição (2.41), a definição de w_n e a condição (2.42) conseguimos

$$\begin{aligned} (\tau_n - 1) \epsilon(x_n^\delta, \delta) &\leq \|A_n e_n\| \leq \|A_n\| \cdot \left\| |A|^\lambda \right\| \cdot \|w\| + \|A_n w_n\| \\ &\leq \|w\| + \left\| A_n \sum_{j=0}^{n-1} A_j^* g^j b_j^\delta \right\| \\ &\leq \|w\| + \sum_{j=0}^{n-1} \|Q_{n,j}\| \cdot \left\| |A_j^*|^{1+\lambda} \right\| \cdot \left\| |A_j^*|^{1-\lambda} g^j b_j^\delta \right\| \\ &\leq \|w\| + \tilde{C}_Q \sum_{j=0}^{n-1} \left\| |A_j^*|^{1-\lambda} g^j b_j^\delta \right\| \\ &\leq C_{w_1} W(n), \end{aligned}$$

onde $C_{w_1} := \max \left\{ 1, \widetilde{C}_Q \right\}$. Logo,

$$\begin{aligned} (\tau_n - 1) \epsilon \left(x_n^\delta, \delta \right) &\leq C_{w_1} W(n) \implies \\ 1^{\alpha \frac{(1+\lambda)}{2}} &= 1 \leq C_{w_1} \frac{W(n)}{\tau_n - 1} \epsilon \left(x_n^\delta, \delta \right)^{-1} \implies \\ m_n &= 1 \leq C_{I_2} \left(\frac{W(n)}{\tau_n - 1} \right)^{\frac{2}{\alpha(1+\lambda)}} \epsilon \left(x_n^\delta, \delta \right)^{-\frac{2}{\alpha(1+\lambda)}}, \end{aligned}$$

onde $C_{I_2} = (C_{w_1})^{\frac{2}{\alpha(1+\lambda)}}$. O resultado desejado segue tomando $C_I := \max \{C_{I_1}, C_{I_2}\}$. ■

Lembre que estamos tentando estimar $\|s_{n,m_n}\|$ em (2.48), por isso, precisamos estimar m_n e d_n . Para concluir a estimativa de m_n , precisamos entender o comportamento de $W(n)$ no lema acima. Com as hipóteses desse lema, vamos provar que

$$W(n) \leq \|w\| + C_k \sum_{j=0}^{n-1} W(j), \text{ para } n = 0, 1, \dots, k, \quad (2.60)$$

onde $C_k > 0$ é uma constante. Por indução, provaremos então que

$$W(n) \leq \Lambda_k^n \|w\|, \text{ para } n = 0, 1, \dots, k \text{ e } \Lambda_k := 1 + C_k. \quad (2.61)$$

Vamos usar o seguinte resultado: Suponha que $x_n^\delta, x_j^\delta \in B_\rho(x^+)$ e $C_Q \rho < \frac{1}{2}$. Então vale a desigualdade

$$\left\| |A_j|^{-\lambda} |A_n|^\lambda \right\| \leq C_\lambda, \text{ para todo } \lambda \in [0, 1], \quad (2.62)$$

onde $C_\lambda := (1 - 2C_Q \rho)^\lambda > 0$. Esse resultado foi provado em [19, lema 2.2].

Passemos a prova de (2.60). Numa tentativa de estimar a norma no somatório em (2.57), usamos o fato de que $A_j e_j = b_j^\epsilon$ e a desigualdade triangular para obter

$$\begin{aligned} \left\| |A_j^*|^{1-\lambda} g^j b_j^\delta \right\| &\leq \left\| |A_j^*|^{1-\lambda} g^j (b_j^\delta - b_j^\epsilon) \right\| \\ &\quad + \left\| |A_j^*|^{1-\lambda} g^j A_j e_j \right\|. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Vamos estimar os termos no lado direito de (2.63) individualmente. Para a primeira norma, utilizamos a desigualdade de interpolação (lema 14), (2.46), (2.38), (2.39) e (2.59),

$$\left\| |A_j^*|^{1-\lambda} g^j (b_j^\delta - b_j^\epsilon) \right\| \leq \left\| |A_j^*|^{1-\lambda} g^j \right\| \cdot \|b_j^\delta - b_j^\epsilon\|$$

que é menor ou igual a

$$\begin{aligned} \left\| |A_j^*|^2 g^j \right\|^{\frac{1-\lambda}{2}} \|g^j\|^{\frac{1+\lambda}{2}} \epsilon(x_j^\delta, \delta) &\leq \widetilde{C}_g^{\frac{1-\lambda}{2}} C_g^{\frac{1+\lambda}{2}} m_j^{\alpha \frac{1+\lambda}{2}} \epsilon(x_j^\delta, \delta) \\ &\leq \widetilde{C}_g^{\frac{1-\lambda}{2}} C_g^{\frac{1+\lambda}{2}} C_I^{\frac{\alpha(1+\lambda)}{2}} \frac{W(j)}{\tau_j - 1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left\| |A_j^*|^{1-\lambda} g^j (b_j^\delta - b_j^\epsilon) \right\| \leq \widetilde{C}_g^{\frac{1-\lambda}{2}} C_g^{\frac{1+\lambda}{2}} C_I^{\frac{\alpha(1+\lambda)}{2}} \frac{W(j)}{\tau_j - 1}.$$

Para a segunda norma, usamos (2.51) para conseguir

$$\left\| |A_j^*|^{1-\lambda} g^j A_j e_j \right\| \leq \left\| |A_j^*|^{1-\lambda} g^j A_j |A|^\lambda w \right\| + \left\| |A_j^*|^{1-\lambda} g^j A_j w_j \right\|$$

mas pela definição de w_j , (2.39), o lado direito deve ser menor ou igual a

$$\begin{aligned} &\left\| |A_j^*|^{1-\lambda} g^j A_j |A_j|^\lambda |A_j|^{-\lambda} |A|^\lambda \right\| \cdot \|w\| \\ &+ \left\| |A_j^*|^{1-\lambda} g^j A_j \sum_{i=0}^{j-1} A_i^* g^i b_i^\delta \right\| \end{aligned}$$

que pelo lema 15 é menor ou igual a

$$\begin{aligned} &\left\| A_j A_j^* \right\|^{\frac{1-\lambda}{2}} \|g^j\| \cdot \|A_j\| \cdot \left\| A_j^* A_j \right\|^{\frac{\lambda}{2}} \left\| |A_j|^{-\lambda} |A|^\lambda \right\| \cdot \|w\| \\ &+ \sum_{i=0}^{j-1} \left\| |A_j^*|^{1-\lambda} g^j A_j A_i^* g^i b_i^\delta \right\| \end{aligned}$$

igual a

$$\begin{aligned} & \left(\|A_j A_j^*\| \cdot \|g^j\| \right) \left\| |A_j|^{-\lambda} |A|^\lambda \right\| \cdot \|w\| \\ & + \sum_{i=0}^{j-1} \left\| \left(|A_j^*|^{1-\lambda} g^j A_j |A_i|^\lambda \right) \left(|A_i|^{-\lambda} A_i^* g^i b_i^\delta \right) \right\| \end{aligned}$$

menor ou igual a

$$\tilde{C}_g C_\lambda \|w\| + \sum_{i=0}^{j-1} \left\| |A_j^*|^{1-\lambda} g^j A_j |A_i|^\lambda \right\| \cdot \left\| |A_i|^{-\lambda} A_i^* g^i b_i^\delta \right\|.$$

Mas, dado $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, para todo $b \in D\left((T^*T)^{\frac{1}{2}}\right)$,

$$\begin{aligned} \left\| (T^*T)^{\frac{1}{2}} b \right\|^2 &= \left\langle (T^*T)^{\frac{1}{2}} b, (T^*T)^{\frac{1}{2}} b \right\rangle \\ &= \langle T^*Tb, b \rangle = \langle Tb, Tb \rangle = \|Tb\|^2 \end{aligned}$$

e de modo análogo, dado $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, para todo $b \in D\left((TT^*)^{\frac{1}{2}}\right)$

$$\left\| (TT^*)^{\frac{1}{2}} b \right\| = \|T^*b\|, \quad (2.64)$$

logo,

$$\left\| |A_i|^{-\lambda} A_i^* g_{m_i} (A_i A_i^*) b_i^\delta \right\| = \left\| |A_i|^{1-\lambda} g_{m_i} (A_i A_i^*) b_i^\delta \right\|.$$

Ainda, os operadores g^j e $|A_j^*|^{1-\lambda}$ comutam. Logo,

$$\begin{aligned} \left\| |A_j^*|^{1-\lambda} g^j A_j |A_i|^\lambda \right\| &= \left\| g^j |A_j^*|^{1-\lambda} A_j |A_i|^\lambda \right\| \\ &\leq \left\| g^j |A_j^*|^2 \right\| \cdot \left\| |A_j^*|^{-\lambda-1} A_j |A_i|^\lambda \right\| \\ &\leq \left(\|g^j\| \cdot \|A_j A_j^*\| \right) \left\| |A_j^*|^{-\lambda} |A_i|^\lambda \right\| \\ &\leq \tilde{C}_g C_\lambda. \end{aligned}$$

Portanto, de (2.63) segue que

$$\begin{aligned}
\left\| |A_j^*|^{1-\lambda} g^j b_j^\delta \right\| &\leq \tilde{C}_g^{\frac{1-\lambda}{2}} C_g^{\frac{1+\lambda}{2}} C_I^{\frac{\alpha(1+\lambda)}{2}} \frac{W(j)}{\tau_j - 1} + \tilde{C}_g C_\lambda \|w\| \\
&\quad + \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{C}_g C_\lambda \left\| |A_i^*|^{1-\lambda} g_{m_i} (A_i A_i^*) b_i^\delta \right\| \\
&= \frac{\tilde{C}_g^{\frac{1-\lambda}{2}} C_g^{\frac{1+\lambda}{2}} C_I^{\frac{\alpha(1+\lambda)}{2}}}{\tau_j - 1} W(j) \\
&\quad + \tilde{C}_g C_\lambda \left(\|w\| + \sum_{i=0}^{j-1} \left\| |A_i^*|^{1-\lambda} g_{m_i} (A_i A_i^*) b_i^\delta \right\| \right) \\
&= C_{w,j} W(j),
\end{aligned}$$

com

$$C_{w,j} := \frac{\tilde{C}_g^{\frac{1-\lambda}{2}} C_g^{\frac{1+\lambda}{2}} C_I^{\frac{\alpha(1+\lambda)}{2}}}{\tau_j - 1} + \tilde{C}_g C_\lambda.$$

Substituindo este resultado na definição de $W(n)$ (2.57),

$$W(n) \leq \|w\| + \sum_{j=0}^{n-1} C_{w,j} W(j) \leq \|w\| + C_k \sum_{j=0}^{n-1} W(j),$$

onde

$$C_k := \max_{0 \leq j \leq k-1} C_{w,j} = \frac{\tilde{C}_g^{\frac{1-\lambda}{2}} C_g^{\frac{1+\lambda}{2}} C_I^{\frac{\alpha(1+\lambda)}{2}}}{t_k - 1} + \tilde{C}_g C_\lambda \quad (2.65)$$

e $t_k := \min \{\tau_0, \dots, \tau_{k-1}\} > 1$. Portanto, (2.60) é satisfeito.

Vamos enunciar esses resultados no próximo lema, onde provaremos (2.61).

Lema 16 *Seja (g_m) uma sequência satisfazendo (2.38). Suponha (2.42) e que as k primeiras iterações $\{x_1^\delta, \dots, x_k^\delta\}$ do REGINN estejam bem definidas e permaneçam na bola $B_\rho(x^+)$. Além disso, suponha que $x_0 \in B_\rho(x^+)$ seja escolhido de modo que a condição de fonte (2.50) seja satisfeita para algum $\lambda \in [0, 1]$. Se $C_{Q\rho} < \frac{1}{2}$ então a desigualdade (2.61) é satisfeita, ou seja*

$$W(n) \leq \Lambda_k^n \|w\|, \text{ para } n = 0, 1, \dots, k \text{ e } \Lambda_k := 1 + C_k. \quad (2.66)$$

Demonstração: Vamos usar indução sobre n . Para $n = 1$, usamos a desigualdade (2.57) para obter

$$W(1) \leq \|w\| + C_k W(0) = \|w\| + C_k \|w\| = \|w\| (1 + C_k) = \Lambda_k^1 \|w\|.$$

Suponha agora que a propriedade é válida para $j = 1, \dots, n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Então, novamente por (2.57),

$$\begin{aligned} W(n+1) &\leq \|w\| + C_k \sum_{j=0}^n W(j) \\ &\leq \|w\| + C_k \sum_{j=0}^n \Lambda_k^j \|w\| \\ &= \left(1 + C_k \sum_{j=0}^n \Lambda_k^j \right) \|w\| \\ &= \left(1 + C_k \left[\frac{1 - \Lambda_k^{n+1}}{1 - \Lambda_k} \right] \right) \|w\| \\ &= \left(1 + (1 + C_k)^{n+1} - 1 \right) \|w\| = \Lambda_k^{n+1} \|w\|, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. ■

Usando os resultados dos lemas 15 e 16, juntamente com a estimativa (2.48), seremos capazes de provar que o passo s_{n,m_n} diminui geometricamente em n ((2.72) abaixo). Com o auxílio desse resultado, vamos provar nos próximos dois teoremas que todas as iterações do REGINN ficam na bola $B_\rho(x^+)$ e o algoritmo termina com uma aproximação $x_{N(\delta)}^\delta$ para x^+ . Além disso, a propriedade de regularização (1.6) será provada e taxas de convergência serão obtidas.

Teorema 17 *Seja (g_m) uma sequência satisfazendo (2.38) e suponha que (2.42) é satisfeito com $C_Q \rho < \frac{1}{2}$. Seja $R > 1$ e defina a constante Λ , independente de λ ,*

$$\Lambda := \sup_{\lambda \in [0,1]} \left[\frac{\tilde{C}_g^{\frac{1-\lambda}{2}} C_g^{\frac{1+\lambda}{2}} C_I^{\frac{\alpha(1+\lambda)}{2}}}{R-1} + \tilde{C}_g C_\lambda \right] + 1 > 1.$$

Defina $\omega := \frac{C_{Q\rho}}{1-C_{Q\rho}}$ e suponha que

$$\omega < \frac{\eta}{\eta + (1 + R)}, \text{ onde } \eta > 0 \text{ e } \eta\Lambda < 1.$$

Assuma ainda que $x_0 \in B_{\rho/2}(x^+)$ é escolhido de modo que a condição de fonte (2.50) seja verdadeira para $\lambda \in \left(\log_{1/\eta}\Lambda, 1\right]$ e que o produto $\|w\| \cdot \|y^\delta - F(x_0)\|$ seja suficientemente pequeno. Se $\delta > 0$, tome

$$\tau \geq \frac{R(1 + \omega)}{\eta - \omega(\eta + (1 + R))}$$

e

$$\mu_k \in \left[R \left(\omega + \frac{(1 + \omega)\delta}{d_k} \right), \eta - (1 + \eta)\omega \right]$$

para $k \geq 0$. Então existe $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que todas as iterações $\{x_1^\delta, \dots, x_{N(\delta)}^\delta\}$ estão bem definidas e ficam na bola $B_\rho(x^+)$. Além disso, somente a última iteração satisfaz o princípio da discrepância (1.5), isto é, $d_{N(\delta)} \leq \tau\delta$. Ainda, se $d_0 > \tau\delta$, então

$$N(\delta) \leq \log_\eta \left(\frac{\tau\delta}{d_0} \right) + 1. \quad (2.67)$$

Demonstração: Inicialmente perceba que como $C_{Q\rho} < \frac{1}{2}$, a condição do cone tangencial (2.45) é satisfeita com $\omega = \frac{C_{Q\rho}}{1-C_{Q\rho}} < 1$. Perceba ainda que $\omega < \frac{\eta}{\eta + (1 + R)}$ é satisfeito por exemplo, se ρ for suficientemente pequeno. Note agora que

$$R > 1 \implies R \left(\omega + \frac{(1 + \omega)\delta}{d_k} \right) > \omega + \frac{(1 + \omega)\delta}{d_k}.$$

Mais,

$$\begin{aligned} \Lambda > 1, \eta > 0 \text{ e } \eta\Lambda < 1 &\implies 0 < \eta < 1 \implies \frac{\eta - 1}{\eta + 1} < 0 \leq \omega \implies \\ \eta - 1 &\leq \omega(\eta + 1) \implies \eta - (1 + \eta)\omega \leq 1. \end{aligned}$$

Logo

$$\left[R \left(\omega + \frac{(1+\omega)\delta}{d_k} \right), \eta - (1+\eta)\omega \right] \subset \left(\omega + \frac{(1+\omega)\delta}{d_k}, 1 \right]. \quad (2.68)$$

Repare que $R > 1 > \eta > \eta - (1+\eta)\omega$. Portanto,

$$\begin{aligned} \eta - (1+\eta)\omega - R\omega &< R - R\omega \implies \\ \eta - (1+\eta+R)\omega &< R(1-\omega). \end{aligned}$$

Mas por hipótese, $\omega < \frac{\eta}{\eta+(1+R)}$ e portanto, $\eta - \omega(\eta + 1 + R) > 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\omega} &< \frac{R}{\eta - (1+\eta+R)\omega} \implies \\ \frac{1+\omega}{1-\omega} &< \frac{R(1+\omega)}{\eta - (1+\eta+R)\omega}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\tau \geq \frac{R(1+\omega)}{\eta - \omega(\eta + (1+R))} > \frac{1+\omega}{1-\omega}.$$

Dessa desigualdade e de (2.68) acima, vemos que o lema 13 é válido. Vamos usar mais uma vez indução. Como $x_0 \in B_\rho(x^+)$ por hipótese, o resultado é válido para $k = 0$. Assuma que para $k \in \mathbb{N}$, as iterações $\{x_1^\delta, \dots, x_k^\delta\}$ estão bem definidas sob as hipóteses do teorema e ficam na bola $B_\rho(x^+)$. Então para $j = 0, \dots, k-1$,

$$\begin{aligned} F(x_{j+1}^\delta) - y^\delta &= A_j s_{j,m_j} - b_j^\delta + (F(x_{j+1}^\delta) - F(x_j^\delta) - A_j s_{j,m_j}) \\ &= A_j s_{j,m_j} + F(x_j^\delta) - y^\delta + E(x_{j+1}^\delta, x_j^\delta). \end{aligned}$$

Logo, por (2.45),

$$\begin{aligned} d_{j+1} &= \|F(x_{j+1}^\delta) - y^\delta\| \leq \|A_j s_{j,m_j} - b_n^\delta\| + \|E(x_{j+1}^\delta, x_j^\delta)\| \\ &\leq \mu_j \|F(x_j^\delta) - y^\delta\| + \omega \|F(x_{j+1}^\delta) - F(x_j^\delta)\| \\ &\leq \mu_j \|F(x_j^\delta) - y^\delta\| + \omega (\|F(x_{j+1}^\delta) - y^\delta\| + \|y^\delta - F(x_j^\delta)\|) \\ &= \mu_j d_j + \omega (d_{j+1} + d_j). \end{aligned}$$

Então, como $\omega < 1$, e $\mu_j \leq \eta - (1 + \eta)\omega$,

$$\begin{aligned} d_{j+1} - \omega d_{j+1} &\leq \mu_j d_j + \omega d_j \implies \\ \frac{d_{j+1}}{d_j} &\leq \frac{\mu_j + \omega}{1 - \omega} \leq \frac{\eta - \eta\omega}{1 - \omega} = \eta \end{aligned} \quad (2.69)$$

e daí,

$$d_{j+1} \leq \eta d_j, \text{ para } j = 0, \dots, k-1.$$

Recursivamente obtemos

$$d_n \leq \eta^n d_0, \text{ para } n = 0, \dots, k. \quad (2.70)$$

Se $d_k \leq \tau\delta$, então pelo princípio da discrepância (1.5), teremos $N(\delta) = k$. Caso contrário, temos pelo lema 13 que s_{k,m_k} está bem definido. Agora, por (2.48), (2.59) e (2.66),

$$\begin{aligned} \|s_{k,m_k}\| &\leq \sqrt{\tilde{C}_g C_g m_k^{\frac{\alpha}{2}}} d_k \\ &\leq \sqrt{\tilde{C}_g C_g C_I^\alpha} \left(\frac{W(k)}{\tau_k - 1} \right)^{\frac{1}{1+\lambda}} \epsilon(x_k^\delta, \delta)^{-\frac{1}{1+\lambda}} d_k \\ &\leq \sqrt{\tilde{C}_g C_g C_I^\alpha} \left(\frac{\|w\|}{\tau_k - 1} \right)^{\frac{1}{1+\lambda}} \Lambda_k^{\frac{k}{1+\lambda}} \epsilon(x_k^\delta, \delta)^{-\frac{1}{1+\lambda}} d_k. \end{aligned}$$

Mas, para $n = 0, \dots, k$,

$$\begin{aligned} \mu_n &\geq R \left(\omega + \frac{(1 + \omega)\delta}{d_n} \right) \\ \implies 1 &< R \leq \frac{\mu_n}{\omega + \frac{(1 + \omega)\delta}{d_n}} = \tau_n \\ \implies \frac{1}{\tau_n - 1} &\leq \frac{1}{R - 1} \\ \implies \max_{0 \leq n \leq k} \left\{ \frac{1}{\tau_n - 1} \right\} &\leq \frac{1}{R - 1}. \end{aligned}$$

Logo (veja (2.65)),

$$C_k \leq \frac{\tilde{C}_g^{\frac{1-\lambda}{2}} C_g^{\frac{1+\lambda}{2}} C_I^{\frac{\alpha(1+\lambda)}{2}}}{R - 1} + \tilde{C}_g C_\lambda, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Daí,

$$\Lambda_k = C_k + 1 \leq \sup_{\lambda \in [0,1]} \left[\frac{\tilde{C}_g^{\frac{1-\lambda}{2}} C_g^{\frac{1+\lambda}{2}} C_I^{\frac{\alpha(1+\lambda)}{2}}}{R-1} + \tilde{C}_g C_\lambda \right] + 1 = \Lambda. \quad (2.71)$$

Usando a desigualdade

$$\frac{R\omega}{\epsilon(x_k^\delta, \delta)} \leq \frac{1}{d_k}$$

e $\tau_k \geq R$, tem-se

$$\begin{aligned} \|s_{k,m_k}\| &\leq \frac{\sqrt{\tilde{C}_g C_g C_I^\alpha}}{(\tau_k - 1)^{\frac{1}{1+\lambda}}} \|w\|^{\frac{1}{1+\lambda}} \frac{(R\omega)^{\frac{1}{1+\lambda}}}{(R\omega)^{\frac{1}{1+\lambda}}} \Lambda_k^{\frac{k}{1+\lambda}} \epsilon(x_k^\delta, \delta)^{-\frac{1}{1+\lambda}} d_k \\ &\leq \frac{\sqrt{\tilde{C}_g C_g C_I^\alpha}}{((R-1)R\omega)^{\frac{1}{1+\lambda}}} \|w\|^{\frac{1}{1+\lambda}} \left(\frac{R\omega}{\epsilon(x_k^\delta, \delta)} \right)^{\frac{1}{1+\lambda}} \Lambda_k^{\frac{k}{1+\lambda}} d_k \\ &\leq C_s \|w\|^{\frac{1}{1+\lambda}} \Lambda_k^{\frac{k}{1+\lambda}} \frac{d_k}{d_k^{\frac{1}{1+\lambda}}} = C_s \|w\|^{\frac{1}{1+\lambda}} \Lambda_k^{\frac{k}{1+\lambda}} d_k^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}, \end{aligned}$$

onde

$$C_s := \frac{\sqrt{\tilde{C}_g C_g C_I^\alpha}}{((R-1)R\omega)^{\frac{1}{1+\lambda}}}.$$

Usando (2.70) decorre que

$$\begin{aligned} \|s_{k,m_k}\| &\leq C_s \|w\|^{\frac{1}{1+\lambda}} \Lambda_k^{\frac{k}{1+\lambda}} (d_0 \eta^k)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} \\ &= C_s \|w\|^{\frac{1}{1+\lambda}} \left[(\Lambda \eta^\lambda)^{\frac{1}{1+\lambda}} \right]^k d_0^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|s_{k,m_k}\| \leq C_s \|w\|^{\frac{1}{1+\lambda}} \sigma(\lambda)^k d_0^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}, \quad (2.72)$$

com

$$\sigma(\lambda) := (\Lambda \eta^\lambda)^{\frac{1}{1+\lambda}}. \quad (2.73)$$

Agora, como $\eta > 0$, $\Lambda > 1$ e $\eta\Lambda < 1$, temos que

$$\begin{aligned} 1 &< \Lambda < \frac{1}{\eta} \\ \implies \log_{1/\eta} \Lambda &< \log_{1/\eta} \frac{1}{\eta} = 1 \\ \implies \left(\log_{1/\eta} \Lambda, 1 \right] &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Tomando $\lambda \in \left(\log_{1/\eta} \Lambda, 1 \right]$ teremos

$$\lambda > \log_{1/\eta} \Lambda \implies \left(\frac{1}{\eta} \right)^\lambda > \Lambda \implies \Lambda \eta^\lambda < 1 \implies \sigma(\lambda) < 1.$$

Suponha agora que o produto $\|w\| \cdot \|y^\delta - F(x_0)\|$ seja suficientemente pequeno de modo que

$$a(\delta) := \frac{C_s \|w\|^{\frac{1}{1+\lambda}} \|y^\delta - F(x_0)\|^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}}{1 - \sigma(\lambda)} \leq \frac{\rho}{2}. \quad (2.74)$$

Então, de (2.72) acima,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \|s_{j,m_j}\| &\leq C_s \|w\|^{\frac{1}{1+\lambda}} d_0^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} \sum_{j=0}^k \sigma(\lambda)^j \\ &\leq C_s \|w\|^{\frac{1}{1+\lambda}} d_0^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} \frac{1}{1 - \sigma(\lambda)} = a(\delta) \leq \frac{\rho}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|x^+ - x_{k+1}^\delta\| &= \left\| x^+ - x_0 - \sum_{j=0}^k s_{j,m_j} \right\| \\ &\leq \|x^+ - x_0\| + \sum_{j=0}^k \|s_{j,m_j}\| \leq \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho, \end{aligned}$$

o que implica que $x_{k+1}^\delta \in B_\rho(x^+)$.

Note que, como $\eta < 1$, por (2.70) temos que $d_n < \tau\delta$ para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, o que mostra a existência de N (veja (1.5)).

Por fim, teremos pelo princípio da discrepância (1.5) e por (2.70) que

$$d_{N-1} \geq \tau\delta \implies d_0\eta^{N-1} \geq \tau\delta \implies \eta^{N-1} \geq \frac{\tau\delta}{d_0}.$$

Como $\eta < 1$,

$$N - 1 \leq \log_{\eta} \left(\frac{\tau\delta}{d_0} \right) \implies N \leq \log_{\eta} \left(\frac{\tau\delta}{d_0} \right) + 1,$$

o que prova (2.67) e conclui a demonstração. ■

Corolário 18 *Assuma as hipóteses do teorema 17 acima. Então para $n = 0, \dots, N(\delta) - 1$,*

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\|y^\delta - F(x_{n+1}^\delta)\|}{\|y^\delta - F(x_n^\delta)\|} \leq \min \left\{ \frac{\mu_n + \omega}{1 - \omega}, \mu_n + C_D \sigma(\lambda)^n \right\},$$

onde $C_D := C_Q C_s \|w\|^{\frac{1}{1+\lambda}} \|y^\delta - F(x_0)\|^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} > 0$ e $\sigma(\lambda)$ está definido na demonstração do teorema anterior em (2.73).

Demonstração: A desigualdade

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} \leq \frac{\mu_n + \omega}{1 - \omega}$$

foi mostrada em (2.69). É portanto suficiente mostrar que

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} \leq \mu_n + C_D \sigma(\lambda)^n.$$

Para isso, perceba que a integral

$$\int_0^1 (F'(x_n^\delta + ts_{n,m_n}) - F'(x_n^\delta)) s_{n,m_n} dt$$

é igual a

$$\begin{aligned} [F(x_n^\delta + ts_{n,m_n}) - tA_n s_{n,m_n}]_0^1 &= F(x_n^\delta + s_{n,m_n}) - A_n s_{n,m_n} - F(x_n^\delta) \\ &= F(x_{n+1}^\delta) - A_n s_{n,m_n} - F(x_n^\delta). \end{aligned}$$

Defina $z_n := A_n s_{n,m_n} + F(x_n^\delta) - y^\delta$. Então

$$\int_0^1 (F'(x_n^\delta + t s_{n,m_n}) - F'(x_n^\delta)) s_{n,m_n} dt + z_n = F(x_{n+1}^\delta) - y^\delta.$$

Mas se $v, w \in B_\rho(x^+)$ e $h \in X$, segue de (2.42) que,

$$\begin{aligned} \|(F'(v) - F'(w))h\| &= \|(Q(v, w) - I)F'(w)h\| \\ &\leq \|Q(v, w) - I\| \cdot \|F'(w)h\| \\ &\leq C_Q \|v - w\| \cdot \|F'(w)h\|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|F(x_{n+1}^\delta) - y^\delta\| &\leq \int_0^1 \|(F'(x_n^\delta + t s_{n,m_n}) - F'(x_n^\delta)) s_{n,m_n}\| dt + \|z_n\| \\ &\leq \int_0^1 C_Q \|x_n^\delta + t s_{n,m_n} - x_n^\delta\| \cdot \|A_n s_{n,m_n}\| dt + \|z_n\| \\ &= C_Q \|A_n s_{n,m_n}\| \int_0^1 t \|s_{n,m_n}\| dt + \|z_n\| \\ &= \frac{1}{2} C_Q \|s_{n,m_n}\| \cdot \|A_n s_{n,m_n}\| + \|z_n\|. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \|z_n\| &= \|A_n s_{n,m_n} - (y^\delta - F(x_n^\delta))\| \\ &< \mu_n \|y^\delta - F(x_n^\delta)\| \leq \|y^\delta - F(x_n^\delta)\| = d_n. \end{aligned}$$

Dai,

$$\|A_n s_{n,m_n}\| \leq \|A_n s_{n,m_n} - (y^\delta - F(x_n^\delta))\| + d_n < 2d_n$$

e segue de (2.72) que

$$\begin{aligned}
d_{n+1} &\leq \frac{1}{2}C_Q \|s_{n,m_n}\| \cdot \|A_n s_{n,m_n}\| + \|z_n\| \\
&< \frac{1}{2}C_Q \|s_{n,m_n}\| 2d_n + \mu_n d_n \\
&= (C_Q \|s_{n,m_n}\| + \mu_n) d_n \\
&\leq \left(C_Q C_s \|w\|^{\frac{1}{1+\lambda}} d_0^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} \sigma(\lambda)^n + \mu_n \right) d_n \\
&= (C_D \sigma(\lambda)^n + \mu_n) d_n.
\end{aligned}$$

■

Observação 13 Como $0 < \sigma(\lambda) < 1$, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(\lambda)^n = 0$. Portanto, para n grande teremos $C_D \sigma(\lambda)^n + \mu_n \approx \mu_n$. Repare que $\mu_n \leq \frac{\mu_n + \omega}{1 - \omega}$ e portanto para n é grande, $\min \left\{ \frac{\mu_n + \omega}{1 - \omega}, \mu_n + C_D \sigma(\lambda)^n \right\} \approx \mu_n$. Isso significa que podemos esperar que a razão entre os resíduos $\frac{d_{n+1}}{d_n}$ se aproxime de μ_n conforme as iterações ocorrem.

Nosso interesse a partir de agora é provar que $\left\| x^+ - x_{N(\delta)}^\delta \right\| = O\left(\delta^{\frac{\lambda - \lambda_{\min}}{1 + \lambda}}\right)$ quando $\delta \rightarrow 0$, onde

$$\lambda_{\min} := \log_{1/\eta} \Lambda. \quad (2.75)$$

Para isso, fazemos uso de (2.51) para obter

$$\left\| x^+ - x_n^\delta \right\|^2 = \langle e_n, e_n \rangle = \left\langle e_n, |A|^\lambda w \right\rangle - \sum_{j=0}^{n-1} \left\langle e_n, A_j^* g^j b_j^\delta \right\rangle.$$

Para majorar o primeiro termo usamos (2.42) e o lema 14 para conseguirmos

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle e_n, |A|^\lambda w \right\rangle \right| &= \left| \left\langle e_n, |Q_{\infty,n} A_n|^\lambda w \right\rangle \right| \\
&= \left| \left\langle |Q_{\infty,n} A_n|^\lambda e_n, w \right\rangle \right| \\
&\leq \left\| |Q_{\infty,n} A_n|^\lambda e_n \right\| \cdot \|w\| \\
&\leq \| |Q_{\infty,n} A_n| e_n \|^\lambda \|e_n\|^{1-\lambda} \|w\|.
\end{aligned}$$

Mas, conforme raciocínio já aplicado anteriormente,

$$\begin{aligned}
|||Q_{\infty,n}A_n|e_n||^2 &= \langle |Q_{\infty,n}A_n|e_n, |Q_{\infty,n}A_n|e_n \rangle \\
&= \langle |Q_{\infty,n}A_n|^2 e_n, e_n \rangle \\
&= \langle A_n^* Q_{\infty,n}^* Q_{\infty,n} A_n e_n, e_n \rangle \\
&= \langle Q_{\infty,n}^* Q_{\infty,n} A_n e_n, A_n e_n \rangle \\
&\leq |||Q_{\infty,n}^* Q_{\infty,n}|| \cdot ||A_n e_n|| \cdot ||A_n e_n|| \\
&= ||Q_{\infty,n}||^2 ||A_n e_n||^2 \\
&\leq \tilde{C}_Q^2 ||A_n e_n||^2
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left| \langle e_n, |A|^\lambda w \rangle \right| \leq \tilde{C}_Q^\lambda ||A_n e_n||^\lambda ||e_n||^{1-\lambda} ||w||.$$

Agora vamos majorar o segundo termo usando a igualdade (2.64),

$$\begin{aligned}
|\langle e_n, A_j^* g^j b_j^\delta \rangle| &= \left| \langle |A_j|^\lambda e_n, |A_j|^{-\lambda} A_j^* g^j b_j^\delta \rangle \right| \\
&\leq \left| |A_j|^\lambda e_n \right| \cdot \left| |A_j|^{-\lambda} A_j^* g^j b_j^\delta \right| \\
&= \left| |A_j|^\lambda e_n \right| \cdot \left| |A_j|^{1-\lambda} g^j b_j^\delta \right| \\
&\leq ||Q_{j,n}A_n|e_n||^\lambda ||e_n||^{1-\lambda} \left| |A_j|^{1-\lambda} g^j b_j^\delta \right|,
\end{aligned}$$

onde utilizamos (2.42) e o lema 14 na última desigualdade. Com o mesmo raciocínio usado acima obtemos então

$$|\langle e_n, A_j^* g^j b_j^\delta \rangle| \leq \tilde{C}_Q^\lambda ||A_n e_n||^\lambda ||e_n||^{1-\lambda} \left| |A_j|^{1-\lambda} g^j b_j^\delta \right|.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
||x^+ - x_n^\delta||^2 &\leq \left| \langle e_n, |A|^\lambda w \rangle \right| + \sum_{j=0}^{n-1} |\langle e_n, A_j^* g^j b_j^\delta \rangle| \\
&\leq \tilde{C}_Q^\lambda ||A_n e_n||^\lambda ||e_n||^{1-\lambda} \left[||w|| + \sum_{j=0}^{n-1} \left| |A_j|^{1-\lambda} g^j b_j^\delta \right| \right] \\
&= \tilde{C}_Q^\lambda ||A_n e_n||^\lambda ||e_n||^{1-\lambda} W(n).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\|e_n\|^2 = \|x^+ - x_n^\delta\|^2 \leq \tilde{C}_Q^\lambda \|A_n e_n\|^\lambda \|e_n\|^{1-\lambda} W(n),$$

que implica em

$$\|e_n\| \leq \tilde{C}_Q^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} \|A_n e_n\|^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} W(n)^{\frac{1}{1+\lambda}}. \quad (2.76)$$

Com esses resultados, somos capazes de provar o principal teorema dessa seção.

Teorema 19 *Adote todas as hipóteses do teorema 17. Suponha que a condição de fonte (2.50) seja válida para $\lambda \in (\lambda_{\min}, 1]$, com $\lambda_{\min}$ definido em (2.75). Suponha ainda que $a(0) < \frac{\rho}{2}$ (referência (2.74)). Se $d_0 > \tau\delta > 0$, então*

$$\left\|x^+ - x_{N(\delta)}^\delta\right\| = O\left(\delta^{\frac{\lambda - \lambda_{\min}}{1+\lambda}}\right) \text{ quando } \delta \longrightarrow 0.$$

No caso livre de ruídos $\delta = 0$, tem-se

$$\left\|x^+ - x_n\right\| = O(\sigma(\lambda)^n) \text{ quando } n \longrightarrow \infty,$$

com $\sigma(\lambda) < 1$ definido em (2.73).

Demonstração: Note que a função $a : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definida em (2.74) é contínua. Como $a(0) < \frac{\rho}{2}$ por hipótese, $a(\delta) < \frac{\rho}{2}$ para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, isto é, existe $\bar{\delta} > 0$ tal que $a(\delta) < \frac{\rho}{2}$ para $0 < \delta \leq \bar{\delta}$. Portanto, $\{x_n^\delta : 0 < \delta \leq \bar{\delta}, n = 1, \dots, N(\delta)\} \subset B_\rho(x^+)$ (veja (2.74) e o final da demonstração do teorema 17). Agora, conforme (1.7),

$$\left\|y - F\left(x_{N(\delta)}^\delta\right)\right\| \leq (\tau + 1)\delta$$

e portanto, podemos usar (2.76), (2.44) e (2.66) para obter

$$\begin{aligned}
\left\| x^+ - x_{N(\delta)}^\delta \right\| &\leq \tag{2.77} \\
&\leq \frac{\tilde{C}_Q^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}}{(1 - C_Q \rho)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}} W(N(\delta))^{\frac{1}{1+\lambda}} \left\| y - F\left(x_{N(\delta)}^\delta\right) \right\|^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} \\
&\leq \frac{\tilde{C}_Q^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} (\tau + 1)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}}{(1 - C_Q \rho)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}} W(N(\delta))^{\frac{1}{1+\lambda}} \delta^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} \\
&\leq \frac{\tilde{C}_Q^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} (\tau + 1)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}}{(1 - C_Q \rho)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}} \|w\|^{\frac{1}{1+\lambda}} \Lambda^{\frac{N(\delta)}{1+\lambda}} \delta^{\frac{\lambda}{1+\lambda}},
\end{aligned}$$

onde utilizamos na última desigualdade o fato de que $\Lambda_{N(\delta)} \leq \Lambda$ (veja (2.71)). Definindo a constante

$$C_1 := \frac{\tilde{C}_Q^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} (\tau + 1)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}}{(1 - C_Q \rho)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}} \|w\|^{\frac{1}{1+\lambda}} > 0,$$

independente de δ , teremos

$$\left\| x^+ - x_{N(\delta)}^\delta \right\| \leq C_1 \left(\Lambda^{N(\delta)} \delta^\lambda \right)^{\frac{1}{1+\lambda}}.$$

Mas por (2.67), $N(\delta) \leq \log_\eta \left(\frac{\tau \delta}{d_0} \right) + 1$ e como $\Lambda > 1$, decorre que

$$\Lambda^{N(\delta)} \leq \Lambda^{\log_\eta \left(\frac{\tau \delta}{d_0} \right) + 1} = \Lambda \Lambda^{\log_\eta \left(\frac{\tau \delta}{d_0} \right)}.$$

Perceba que

$$\begin{aligned}
\log_\eta \left(\frac{\tau \delta}{d_0} \right) \log_\eta \Lambda &= \log_\eta \Lambda \log_\eta \left(\frac{\tau \delta}{d_0} \right) \implies \\
\log_\eta \Lambda^{\log_\eta \left(\frac{\tau \delta}{d_0} \right)} &= \log_\eta \left(\frac{\tau \delta}{d_0} \right)^{\log_\eta \Lambda} \implies \\
\Lambda^{\log_\eta \left(\frac{\tau \delta}{d_0} \right)} &= \left(\frac{\tau \delta}{d_0} \right)^{\log_\eta \Lambda}.
\end{aligned}$$

Ainda, $\log_\eta \Lambda = -\log_{1/\eta} \Lambda = -\lambda_{\min}$. Daí,

$$\Lambda^{N(\delta)} \leq \Lambda \Lambda^{\log_\eta \left(\frac{\tau\delta}{d_0}\right)} = \Lambda \left(\frac{\tau\delta}{d_0}\right)^{\log_\eta \Lambda} = \Lambda \left(\frac{\tau}{d_0}\right)^{\log_\eta \Lambda} \delta^{-\lambda_{\min}}.$$

Portanto,

$$\left\|x^+ - x_{N(\delta)}^\delta\right\| \leq C_1 \left(\Lambda \left(\frac{\tau}{d_0}\right)^{\log_\eta \Lambda} \delta^{-\lambda_{\min}} \delta^\lambda\right)^{\frac{1}{1+\lambda}} = C_2 \delta^{\frac{\lambda - \lambda_{\min}}{1+\lambda}},$$

onde

$$C_2 := C_1 \Lambda \left(\frac{\tau}{d_0}\right)^{\frac{\log_\eta \Lambda}{1+\lambda}} > 0$$

é uma constante independente de δ .

Para o caso livre de ruídos $\delta = 0$, usamos um raciocínio similar ao usado em (2.77), no entanto substituímos a condição (1.7) pela condição (2.70),

$$\begin{aligned} \left\|x^+ - x_n\right\| &\leq \frac{\tilde{C}_Q^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}}{(1 - C_Q \rho)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}} W(n)^{\frac{1}{1+\lambda}} \|y - F(x_n)\|^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} \\ &\leq \frac{\tilde{C}_Q^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}}{(1 - C_Q \rho)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}} W(n)^{\frac{1}{1+\lambda}} (\eta^n \|y - F(x_0)\|)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} \\ &\leq \frac{\tilde{C}_Q^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}}{(1 - C_Q \rho)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}} \|w\|^{\frac{1}{1+\lambda}} \Lambda^{\frac{n}{1+\lambda}} (\eta^n \|y - F(x_0)\|)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} \\ &= \left[\frac{\tilde{C}_Q^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} \|w\|^{\frac{1}{1+\lambda}} \|y - F(x_0)\|^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}}{(1 - C_Q \rho)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}} \right] \left[(\Lambda \eta^\lambda)^{\frac{1}{1+\lambda}} \right]^n \\ &= C_3 \sigma(\lambda)^n, \end{aligned}$$

com

$$C_3 := \frac{\tilde{C}_Q^{\frac{\lambda}{1+\lambda}} \|w\|^{\frac{1}{1+\lambda}} \|y - F(x_0)\|^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}}{(1 - C_Q \rho)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}} > 0.$$

■

Capítulo 3

Método IRGN Inexato

3.1 Apresentação

As principais ideias desse capítulo foram encontradas no artigo [16] e na monografia [22].

Nesse capítulo, usaremos as seguintes notações: $A := F'(x^+)$, $A_n := F'(x_n^\delta)$, $T := A^*A$, $T_n := A_n^*A_n$, $b_n^\delta := y^\delta - F(x_n^\delta)$, $E(v, w) := F(v) - F(w) - F'(w)(v - w)$,

$$g_n(\lambda) := \frac{1}{\gamma_n + \lambda} \text{ e } p_n(\lambda) := 1 - \lambda g_n(\lambda). \quad (3.1)$$

A função g_n é chamada de filtro de regularização de Tikhonov (veja (C.9), apêndice C), onde (γ_n) é uma sequência satisfazendo (1.19).

O método IRGN foi apresentado na subseção 1.3.2. Sua convergência foi estudada em [3] e [18] mediante a condição (1.20) e taxas de convergência foram provadas usando as condições de fonte do tipo Hölder (1.21). Nesse capítulo, estudaremos o método IRGN *inexato*, que foi introduzido brevemente na subseção 1.4.2. O estudo desse método que será aqui apresentado, possui duas diferenças marcantes em relação ao IRGN (que chamaremos de IRGN clássico). A primeira delas, é que a condição de fonte do tipo Hölder será substituída pela condição de fonte mais geral

$$x_0 - x^+ = f(A^*A)w, \quad w \in X, \quad \|w\| \leq \rho, \quad (3.2)$$

onde $\rho > 0$ é uma constante e $f : [0, \|A\|^2] \longrightarrow [0, \infty)$ é uma *função índice*, isto é, uma função crescente, contínua e satisfazendo¹ $f(0) = 0$.

Observe que a condição de fonte do tipo Hölder (1.21) está incluída como um caso particular na condição de fonte mais geral (3.2) estudada nesse capítulo, onde $f(\lambda) = \lambda^v$.

A segunda diferença entre o IRGN clássico e o inexato, é que o sistema linear que define o método IRGN clássico, será resolvido apenas de maneira aproximada, isto é, ao invés de procuramos h_n no sistema linear (1.18), procuraremos h_n^{ap} , de modo que

$$h_n^{ap} \approx [\gamma_n I + A_n^* A_n]^{-1} (A_n^* b_n^\delta + \gamma_n (x_0 - x_n^\delta)), \quad (3.3)$$

sendo que (γ_n) é uma sequência satisfazendo (1.19). Depois, utilizamos a iteração

$$x_{n+1}^\delta := x_n^\delta + h_n^{ap} \quad (3.4)$$

ao invés da iteração (1.4) para obtermos a atualização.

É claro que precisamos explicar o que significa a aproximação (3.3). A ideia é: controlando a norma do *erro do sistema linear* $e_n^{ls} := h_n^{ap} - h_n$, provaremos que o IRGN inexato produz uma aproximação $x_{N(\delta)}^\delta$ para a solução do sistema (1.1) e essa solução obtida possui a propriedade de regularização (1.6).

O princípio da discrepância de Morozov (1.5) será aplicado na iteração (3.4) para encerrar o algoritmo. O algoritmo 3 apresentado na subseção 1.4.2 codifica o método.

Para obtermos convergência do IRGN inexato, precisamos impor algumas condições sobre a função índice f dada em (3.2). Essas condições serão usadas para estimar erros e os itens (b) e (c) do teorema 30, apêndice A, serão usados para esse fim. Vamos assumir que

$$\gamma_0 \leq \|A\|^2 \leq 1, \quad (3.5)$$

onde γ_0 é o primeiro termo da sequência (γ_n) definida em (1.19). Como (γ_n) é uma sequência positiva não crescente, decorre que $0 \leq \gamma_n \leq \|A\|^2$ para todo n . Portanto, $f(\gamma_n)$ está bem definido. Vamos também

¹Veja o apêndice A para uma definição precisa do operador $f(A^*A) : X \longrightarrow X$.

supor que f satisfaz a desigualdade

$$\sup_{0 < \lambda \leq \|A\|^2} |p_n(\lambda)| \sqrt{\lambda} f(\lambda) \leq c_f \sqrt{\gamma_n} f(\gamma_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.6)$$

onde $c_f > 0$ é uma constante.

Tomando $\gamma^{**} = c_f$ em (C.12), definição 6, apêndice C, vemos que a desigualdade acima exige que a regularização de Tikhonov tenha qualificação $u(\lambda) := \sqrt{\lambda} f(\lambda)$. Repare que u cobre f com constante $c = 1$ porque para $0 < \lambda \leq \|A\|^2$, a função $\lambda \mapsto \frac{u(\lambda)}{f(\lambda)} = \sqrt{\lambda}$ é não decrescente (veja a observação 24 no apêndice C). Pela condição (3.6) acima e pelo lema 36, também do apêndice C, segue que a regularização de Tikhonov possui ordem de qualificação f . Portanto

$$\sup_{0 < \lambda \leq \|A\|^2} |p_n(\lambda)| f(\lambda) \leq c_f f(\gamma_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.7)$$

Assumiremos ainda que

$$\frac{f(\gamma\lambda)}{f(\lambda)} \leq C_f, \quad \forall \lambda \in \left(0, \frac{\|A\|^2}{\gamma}\right], \quad (3.8)$$

onde $C_f > 0$ é uma constante e γ está definido em (1.19).

Perceba que $f : [0, \|A\|^2] \rightarrow [0, \infty)$ é uma função contínua definida num compacto e portanto limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que $f(\lambda) = |f(\lambda)| \leq M, \forall \lambda \in [0, \|A\|^2]$. Agora, se definirmos $\tilde{f} := \frac{1}{M} f$, teremos $\tilde{f}(\lambda) \leq 1, \forall \lambda \in [0, \|A\|^2]$ e além disso, (3.8) implica em

$$\frac{\tilde{f}(\gamma\lambda)}{\tilde{f}(\lambda)} = \frac{f(\gamma\lambda)}{f(\lambda)} \leq C_f, \quad \forall \lambda \in \left(0, \frac{\|A\|^2}{\gamma}\right].$$

Também, (3.6) e (3.7) são satisfeitos com a função $\tilde{f}$ no lugar da função f . Por fim, (3.2) é satisfeito com $\tilde{f}$ no lugar de f e com $\tilde{\rho} = M\rho$. Usando esse raciocínio, podemos supor sem perda de generalidade que

$$f(\lambda) \leq 1, \quad \text{para todo } \lambda \in \left(0, \|A\|^2\right]. \quad (3.9)$$

Essas condições exigidas de f são apropriadas, levando-se em

consideração que iremos decompor o erro total na soma de vários erros (igualdade (3.11) abaixo) e cada um desses erros terá sua norma estimada individualmente. Nesse momento aplicaremos essas propriedades, conforme já comentamos, com o auxílio do teorema 30.

Para a nossa análise, será extremamente necessária a condição (1.20) de fatoração do operador F .

3.2 Convergência do Método

Para iniciarmos nosso estudo de convergência do IRGN inexato, vamos definir os seguintes erros:

$$\begin{aligned}
e_{n+1} &: = x_{n+1}^\delta - x^+ \text{ (erro total);} \\
e_{n+1}^{ap} &: = p_n(T) f(T) w; \\
e_{n+1}^{noi} &: = g_n(T_n) A_n^* (y^\delta - y); \\
e_{n+1}^{nl} &: = (p_n(T_n) - p_n(T)) f(T) w; \\
e_{n+1}^{tay} &: = g_n(T_n) A_n^* E(x^+, x_n^\delta); \\
e_{n+1}^{ls} &: = h_n^{ap} - h_n.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Por um cálculo direto, podemos comprovar que o erro total é igual a soma dos demais. De fato, por (1.18) e a definição de e_{n+1}^{ls} ,

$$\begin{aligned}
e_{n+1} &= x_{n+1}^\delta - x^+ = (x_n^\delta - x^+) + h_n^{ap} = h_n + e_n + (h_n^{ap} - h_n) \\
&= (\gamma_n I + T_n)^{-1} [\gamma_n (x_0 - x_n^\delta) + A_n^* (y^\delta - F(x_n^\delta))] \\
&\quad + (\gamma_n I + T_n)^{-1} [T_n e_n + \gamma_n e_n] + e_{n+1}^{ls} \\
&= (\gamma_n I + T_n)^{-1} [\gamma_n (x_0 - x_n^\delta + x_n^\delta - x^+) + A_n^* (y^\delta - F(x_n^\delta))] \\
&\quad + (\gamma_n I + T_n)^{-1} T_n e_n + e_{n+1}^{ls},
\end{aligned}$$

logo, usando as definições (3.1) e as condições de fonte (3.2),

$$\begin{aligned}
e_{n+1} &= \gamma_n (\gamma_n I + T_n)^{-1} (x_0 - x^+) \\
&\quad + (\gamma_n I + T_n)^{-1} A_n^* (y^\delta - F(x_n^\delta) + A_n e_n) + e_{n+1}^{ls} \\
&= [p_n(T) + p_n(T_n) - p_n(T)] f(T) w \\
&\quad + g_n(T_n) A_n^* (y^\delta + (-y + F(x^+)) - F(x_n^\delta) + A_n e_n)
\end{aligned}$$

e portanto

$$e_{n+1} = (e_{n+1}^{ap} + e_{n+1}^{nl}) + (e_{n+1}^{noi} + e_{n+1}^{tay}) + e_{n+1}^{ls}. \quad (3.11)$$

Enunciaremos a seguir uma sequência de resultados e faremos suas respectivas demonstrações na seguinte ordem: com o auxílio de alguns lemas, estimaremos a norma de cada um dos erros em (3.10) (com exceção de e_{n+1}^{ls}) e das imagens desses erros obtidas através da aplicação do operador A . Em seguida usaremos estas estimativas e com uma exigência apropriada no comportamento do erro e_{n+1}^{ls} , seremos capazes de provar a convergência do método no caso livre de ruídos $\delta = 0$. Provaremos então mais alguns resultados intermediários para chegar ao principal teorema deste capítulo, o qual dará condições suficientes para a convergência do IRGN inexato, provará a propriedade da regularização (1.6) e também apresentará taxas de convergência. Na última seção mostraremos como o método do gradiente conjugado pode ser utilizado para resolver o sistema linear (3.3) de modo que o erro e_{n+1}^{ls} resultante do processo, satisfaça as propriedades dele exigidas.

O lema a seguir servirá como ferramenta para a demonstração do próximo. Para incluir todos os resultados em poucas linhas, convençionemos que $(A^*A)^0 := I$ e $s^s(1-s)^{1-s} := 1$ quando $s = 0$ ou $s = 1$.

Lema 20 *Sejam $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ com X e Y espaços de Hilbert, $s \in [0, 1]$ e (γ_n) uma sequência satisfazendo $\gamma_n > 0$ e $\gamma_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Então fixando $v \in X$ e definindo*

$$w_n(s) := \gamma_n^{1-s} \left\| (A^*A + \gamma_n I)^{-1} (A^*A)^s v \right\|$$

temos

$$w_n(s) \leq s^s (1-s)^{1-s} \|v\| \leq \|v\|.$$

Os mesmos resultados valem para

$$z_n(s) := \gamma_n^{1-s} \left\| (AA^* + \gamma_n I)^{-1} (AA^*)^s w \right\|, \text{ com } w \in Y.$$

Demonstração: Vamos fazer a demonstração apenas para a função $w_n(s)$. A demonstração para $z_n(s)$ é completamente análoga.

$T := A^*A$ é linear, limitado e auto-adjunto. Temos pelo teorema 28 que $\sigma(T) \subset [m, M]$ com

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle \text{ e } M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle.$$

Além disso, tomando $f(\lambda) = (\lambda + \gamma_n)^{-1} \lambda^s$ no item (c) do teorema 30, decorre que

$$\begin{aligned} w_n(s) &\leq \gamma_n^{1-s} \left\| (T + \gamma_n I)^{-1} T^s \right\| \cdot \|v\| = \gamma_n^{1-s} \|f(T)\| \cdot \|v\| \\ &\leq \sup_{m \leq \lambda \leq M} \gamma_n^{1-s} \left\| (\lambda + \gamma_n)^{-1} \lambda^s \right\| \cdot \|v\| \\ &= \gamma_n^{1-s} \sup_{m \leq \lambda \leq M} \frac{\lambda^s}{\lambda + \gamma_n} \|v\|. \end{aligned}$$

A função $g_n(\lambda) := \frac{\lambda^s}{\lambda + \gamma_n}$ é contínua em $[m, M]$ e se $s \in (0, 1)$, ela atinge seu máximo no ponto $\lambda_0 = \frac{s\gamma_n}{1-s}$. Portanto,

$$\begin{aligned} w_n(s) &\leq \gamma_n^{1-s} \|v\| g_n(\lambda_0) = \gamma_n^{1-s} \|v\| \frac{\left(\frac{s\gamma_n}{1-s}\right)^s}{\frac{s\gamma_n}{1-s} + \gamma_n} \\ &= \gamma_n^{1-s} \|v\| s^s \gamma_n^{s-1} (1-s)^{1-s} = s^s (1-s)^{1-s} \|v\|. \end{aligned}$$

Ainda,

$$s \in (0, 1) \implies s^s \leq 1 \text{ e } (1-s)^{1-s} \leq 1 \implies s^s (1-s)^{1-s} \|v\| \leq \|v\|.$$

Para $s = 0$ temos que $g_n(\lambda) := \frac{1}{\lambda + \gamma_n}$. Essa função é decrescente em λ

e atinge o seu máximo em $\lambda_0 = m$. Assim,

$$w_n(s) \leq \gamma_n^{1-s} \|v\| g_n(\lambda_0) = \gamma_n \|v\| \frac{1}{m + \gamma_n} \leq \|v\|.$$

Por fim, para $s = 1$ a função $g_n(\lambda) := \frac{\lambda}{\lambda + \gamma_n}$ é crescente em λ e atinge seu máximo no ponto $\lambda_0 = M$ e obtemos então

$$w_n(s) \leq \gamma_n^{1-s} \|v\| g_n(\lambda_0) = \|v\| \frac{M}{M + \gamma_n} \leq \|v\|,$$

completando a demonstração. ■

O próximo lema fornece estimativas para a norma de alguns operadores. Estes resultados serão necessários futuramente para estimarmos as normas dos erros definidos em (3.10).

Lema 21 *Seja $A \in \mathcal{L}(H, H)$ com H um espaço Hilbert e (γ_n) uma sequência como no lema 20. Definindo $V_n := \gamma_n I + A^* A$ temos que V_n*

é inversível e $\|V_n^{-1} A^\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\gamma_n}}$, $\|V_n^{-1}\| \leq \frac{1}{\gamma_n}$, $\|AV_n^{-1}\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\gamma_n}}$ e $\|AV_n^{-1} A^*\| \leq 1$.*

Demonstração: Usando o lema 20 com $s = 0$ em $w_n(s)$, temos que

$$\begin{aligned} w_n(0) &\leq \|v\|, \forall v \in H \implies \\ \gamma_n^{\frac{1}{2}} \|V_n^{-1} v\| &\leq \|v\|, \forall v \in H \implies \\ \sup_{\|v\|=1} \gamma_n \|V_n^{-1} v\| &\leq \sup_{\|v\|=1} \|v\| \implies \\ \|V_n^{-1}\| &\leq \frac{1}{\gamma_n}, \end{aligned}$$

o que mostra a segunda desigualdade. Para provar a terceira definimos $|A| := (A^* A)^{\frac{1}{2}}$ e usamos novamente o lema 20 mas agora com $s = \frac{1}{2}$ em $w_n(s)$, obtendo

$$\begin{aligned} w_n\left(\frac{1}{2}\right) &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{2}} \|v\|, \forall v \in H \implies \\ \gamma_n^{\frac{1}{2}} \left\| V_n^{-1} (A^* A)^{\frac{1}{2}} v \right\| &\leq \frac{1}{2} \|v\|, \forall v \in H \implies \\ \|V_n^{-1} |A| v\| &\leq \frac{1}{2\sqrt{\gamma_n}} \|v\|, \forall v \in H. \end{aligned}$$

Pela definição de $|A|$ decorre que este operador é auto-adjunto, positivo e que $|A|^2 = A^* A$. Além disso,

$$|A| V_n = |A| \left(\gamma_n I + |A|^2 \right) = \left(\gamma_n I + |A|^2 \right) |A| = V_n |A|,$$

o que implica em $V_n^{-1} |A| = |A| V_n^{-1}$. Portanto V_n^{-1} e $|A|$ comutam.

Segue que para todo $v \in H$,

$$\begin{aligned}
\|V_n^{-1} |A| v\|^2 &= \langle V_n^{-1} |A| v; V_n^{-1} |A| v \rangle \\
&= \langle V_n^{-1} v; |A|^2 V_n^{-1} v \rangle \\
&= \langle V_n^{-1} v; A^* A V_n^{-1} v \rangle \\
&= \langle A V_n^{-1} v; A V_n^{-1} v \rangle \\
&= \|A V_n^{-1} v\|^2
\end{aligned}$$

implicando que

$$\|A V_n^{-1} v\| = \|V_n^{-1} |A| v\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\gamma_n}} \|v\|, \forall v \in H.$$

Tomando o supremo entre todos os vetores com norma 1 em ambos os lados obtemos a terceira desigualdade.

Para provar a primeira desigualdade utilizamos um raciocínio similar. Definindo $M_n := \gamma_n I + A A^*$ e $D := (A A^*)^{\frac{1}{2}}$, utilizamos mais uma vez o lema 20 com $s = \frac{1}{2}$ mas agora em $z_n(s)$ obtendo

$$\|M_n^{-1} D w\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\gamma_n}} \|w\|, \forall w \in H.$$

Como acima, prova-se que $M_n^{-1} D = D M_n^{-1}$ e então que $\|M_n^{-1} D w\|^2 = \|A^* M_n^{-1} w\|^2, \forall w \in H$. Agora,

$$A^* M_n = A^* (\gamma_n I + A A^*) = (\gamma_n I + A^* A) A^* = V_n A^*,$$

implicando em $V_n^{-1} A^* = A^* M_n^{-1}$. Portanto

$$\|V_n^{-1} A^* w\| = \|A^* M_n^{-1} w\| = \|M_n^{-1} D w\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\gamma_n}} \|w\|, \forall w \in H.$$

Tomando o supremo entre todos os vetores com norma 1 em ambos os lados obtemos a primeira desigualdade.

Por fim, para a última desigualdade usamos o lema 20 com $s = 1$ em $z_n(s)$, obtendo $\|M_n^{-1} A A^* w\| \leq \|w\|, \forall w \in H$. Mas

$$M_n A = (\gamma_n I + A A^*) A = A (\gamma_n I + A^* A) = A V_n$$

o que implica em $AV_n^{-1} = M_n^{-1}A$. Portanto

$$\|AV_n^{-1}A^*w\| = \|M_n^{-1}AA^*w\| \leq \|w\|, \forall w \in H.$$

Isso prova a última desigualdade e conclui a demonstração. ■

Tome $x \in D(F)$. Como F é de classe $C^1(D(F))$, podemos usar o teorema fundamental do cálculo para obter

$$\|E(x, x^+)\| = \left\| \int_0^1 (F'(x^+ + t(x - x^+)) - F'(x^+))(x - x^+) dt \right\|.$$

Usando agora a fatoração da matriz F' (1.20), vemos que esta norma é igual a

$$\left\| \int_0^1 [(R - I)F'(x^+) + Q](x - x^+) dt \right\|$$

que por sua vez, é menor ou igual a

$$\int_0^1 \|R - I\| \cdot \|F'(x^+)(x - x^+)\| + \int_0^1 \|Q\| \cdot \|x - x^+\| dt.$$

onde $R := R(x^+ + t(x - x^+), x^+)$ e $Q := Q(x^+ + t(x - x^+), x^+)$.

Usando mais uma vez (1.20) obtemos

$$\|E(x, x^+)\| \leq C_R \|A(x - x^+)\| + C_Q \|A(x - x^+)\| \int_0^1 t dt,$$

o que resulta na importante desigualdade (compare com (2.43))

$$\|E(x, x^+)\| \leq \left(C_R + \frac{1}{2} C_Q \|x - x^+\| \right) \|A(x - x^+)\|. \quad (3.12)$$

A partir deste ponto, todas as hipóteses que forem assumidas num lema ou num teorema serão "acumulativas", ou seja, serão consideradas hipóteses nos lemas e teoremas seguintes. As demonstrações dos dois lemas seguintes são bastante técnicas e um tanto quanto longas

e por isso foram incluídas no apêndice B.

Lema 22 *Assuma (1.2), (1.3), (1.5), (1.18), (1.19), (1.20), (3.2), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.8), (3.9) e que $\|e_n\| \leq E$, para algum $E > 0$ e para*

$0 \leq n < N$. Então:

- (i) $\|e_{n+1}^{ap}\| \leq c_f f(\gamma_n) \rho;$
- (ii) $\|e_{n+1}^{noi}\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\gamma_n}} \delta;$
- (iii) $\|e_{n+1}^{nl}\| \leq C_R \frac{\|Ae_{n+1}^{ap}\|}{\sqrt{\gamma_n}} + \frac{3c_f}{2} C_Q \frac{\|Ae_n\|}{\sqrt{\gamma_n}} f(\gamma_n) \rho;$
- (iv) $\|e_{n+1}^{tay}\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\gamma_n}} (2C_R + \frac{3}{2} C_Q \|e_n\|) \|Ae_n\|;$
- (I) $\|Ae_{n+1}^{ap}\| \leq c_f \sqrt{\gamma_n} f(\gamma_n) \rho;$
- (II) $\|Ae_{n+1}^{noi}\| \leq \left(C_R + 1 + C_Q \frac{\|Ae_n\|}{2\sqrt{\gamma_n}} \right) \delta;$
- (III) $\|Ae_{n+1}^{nl}\| \leq (C_R + 1) [2C_R \|Ae_{n+1}^{ap}\| + C_Q \|e_{n+1}^{ap}\| \cdot \|Ae_n\|$
 $+ \frac{\|Ae_{n+1}^{ap}\|}{2\sqrt{\gamma_n}} C_Q \|Ae_n\|] + C_Q \|Ae_n\| \cdot \|e_{n+1}^{nl}\|;$
- (IV) $\|Ae_{n+1}^{tay}\| \leq \left(C_R + 1 + C_Q \frac{\|Ae_n\|}{2\sqrt{\gamma_n}} \right) (2C_R + \frac{3}{2} \|e_n\| C_Q) \|Ae_n\|.$

Lema 23 *Assuma todas as hipóteses do lema 22. Então se $\tau > 1$ é suficientemente grande, valem as seguintes desigualdades:*

- (i) $\|e_{n+1}\| \leq \|e_{n+1}^{ls}\| + (c_f + C_R c_f) \rho f(\gamma_n) + \frac{\bar{c}}{C_Q} \frac{\|Ae_n\|}{\sqrt{\gamma_n}};$
- (ii) $\|Ae_{n+1}\| \leq \|Ae_{n+1}^{ls}\| + \bar{a} \|Ae_{n+1}^{ap}\| + \bar{b} \|Ae_n\| + \frac{\bar{c}}{\sqrt{\gamma_n}} \|Ae_n\|^2;$
- (iii) $\underline{a} \|Ae_{n+1}^{ap}\| \leq \|Ae_{n+1}^{ls}\| + \|Ae_{n+1}\| + \bar{b} \|Ae_n\| + \frac{\bar{c}}{\sqrt{\gamma_n}} \|Ae_n\|^2,$

com constantes

$$\begin{aligned} \bar{a} &:= 1 + 2C_R (C_R + 1), \underline{a} := 1 - 2C_R (C_R + 1); \\ \bar{b} &:= (C_R + 1) \left(\frac{1 + C_R + \frac{1}{2} EC_Q}{\tau - 1} + (2C_R + \frac{3}{2} EC_Q) + C_Q \left(\frac{3c_f}{2} + C_R c_f \right) \rho \right); \\ \bar{c} &:= C_Q \left(\frac{1 + C_R + \frac{1}{2} EC_Q}{2(\tau - 1)} + \frac{3c_f}{2} C_Q \rho + \frac{1}{2} (2C_R + \frac{3}{2} EC_Q) \right). \end{aligned}$$

Com o auxílio desses lemas, seremos capazes de provar que o método IRGN inexato está bem definido e converge quando utilizamos dados sem ruídos, desde que o ponto inicial x_0 esteja suficientemente próximo da solução x^+ e desde que limitemos convenientemente a norma do erro e_{n+1}^{ls} e de sua imagem $A_n e_{n+1}^{ls}$.

Teorema 24 *Assuma todas as hipóteses do lema 22. Adicionalmente, suponha que*

$$\|e_{n+1}^{ls}\| \leq C_{ls} f(\gamma_n), \quad 0 \leq n < N, \quad (3.13)$$

$$\|A_n e_{n+1}^{ls}\| \leq C_{ls} \sqrt{\gamma_n} f(\gamma_n), \quad 0 \leq n < N, \quad (3.14)$$

com $C_{ls} > 0$ constante. Suponha também que C_R , C_Q , C_{ls} , γ , $\frac{1}{\gamma_0}$ e ρ são suficientemente pequenos. Então existe $E > 0$ tal que o método IRGN inexato, dado por (3.4), para $0 \leq n < N$ está bem definido para todo $x_0 \in D(F)$ satisfazendo

$$\|x_0 - x^+\| \leq E$$

e para $N = N(\delta)$ determinado pelo princípio da discrepância (1.5). Além disso,

$$\|x_n^\delta - x^+\| = O(f(\gamma_n)) \quad \text{para } 1 \leq n \leq N, \quad (3.15)$$

com $N = \infty$ para o caso livre de ruídos $\delta = 0$. Ainda, se $\delta > 0$ e a sequência (γ_n) é escolhida por

$$\gamma_n := \gamma_0 \gamma^{-n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

o número N é finito e $N = O(-\ln(u^{-1}(\delta)))$, onde $u(\lambda) := \sqrt{\lambda} f(\lambda)$.

Demonstração: Inicialmente, vamos provar por indução que para

$n \in \mathbb{N}$, $0 \leq n \leq N$, valem as desigualdades

$$\theta_n \leq C_\theta; \quad (3.16)$$

$$\|e_n\| \leq E, \quad (3.17)$$

sendo

$$\theta_n := \frac{\|Ae_n\|}{u(\gamma_n)} \text{ e } C_\theta := \max \left\{ \theta_0, \frac{2a}{1 - b + \sqrt{(1 - b)^2 - 4ac}} \right\}$$

com constantes

$$\begin{aligned} a & : = \sqrt{\gamma}C_f (c_f \rho \bar{a} + C_{ls} (C_R + 1)), \\ b & : = \sqrt{\gamma}C_f (\bar{b} + C_Q C_{ls}) \text{ e} \\ c & : = \sqrt{\gamma}C_f \bar{c}, \end{aligned}$$

onde $\bar{a}$, $\bar{b}$ e $\bar{c}$ estão definidos no lema 23. Em seguida, vamos mostrar que (3.15) é válido e depois que $N = O(-\ln(u^{-1}(\delta)))$. Iniciemos com a prova por indução. Para $n = 0$, temos que

$$\theta_0 \leq \max \left\{ \theta_0, \frac{2a}{1 - b + \sqrt{(1 - b)^2 - 4ac}} \right\} = C_\theta$$

e $\|e_0\| = \|x_0 - x^+\| \leq E$ por hipótese. Suponha que (3.16) e (3.17) sejam verdadeiros para algum $n \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$. Então o lema 23 é satisfeito. Usando (1.20), (3.13), (3.14) e (3.9) :

$$\begin{aligned} \|Ae_{n+1}^{ls}\| & \leq \|R(x^+, x_n^\delta)\| \cdot \|A_n e_{n+1}^{ls}\| \\ & \quad + \|Q(x^+, x_n^\delta)\| \cdot \|e_{n+1}^{ls}\| \\ & \leq (C_R + 1) C_{ls} \sqrt{\gamma_n} f(\gamma_n) + C_Q C_{ls} \|Ae_n\| f(\gamma_n) \\ & \leq (C_R + 1) C_{ls} \sqrt{\gamma_n} f(\gamma_n) + C_Q C_{ls} \|Ae_n\| \end{aligned} \tag{3.18}$$

Agora, usando o fato de que f é crescente e (1.19) obtemos

$$\begin{aligned} \gamma_n & \leq \gamma \cdot \gamma_{n+1} \implies \\ f(\gamma_n) & \leq f(\gamma \cdot \gamma_{n+1}) \implies \\ \frac{f(\gamma_n)}{f(\gamma_{n+1})} & \leq \frac{f(\gamma \cdot \gamma_{n+1})}{f(\gamma_{n+1})} \leq C_f, \end{aligned}$$

usando na última desigualdade a relação (3.8). Usando mais uma vez (1.19) conseguimos

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\gamma_n}}{\sqrt{\gamma_{n+1}}} & \leq \sqrt{\gamma} \implies \\ \frac{\sqrt{\gamma_n}}{\sqrt{\gamma_{n+1}}} \frac{f(\gamma_n)}{f(\gamma_{n+1})} & \leq \sqrt{\gamma} C_f. \end{aligned}$$

Com isso, usando a definição de θ_n e u , em seguida (ii) no lema 23, (3.18) e (I) no lema 22:

$$\begin{aligned}
\theta_{n+1} &= \frac{\|Ae_{n+1}\|}{u(\gamma_{n+1})} \\
&\leq \frac{1}{u(\gamma_{n+1})} \left[\|Ae_{n+1}^{ls}\| + \bar{a} \|Ae_{n+1}^{ap}\| + \bar{b} \|Ae_n\| + \frac{\bar{c}}{\sqrt{\gamma_n}} \|Ae_n\|^2 \right] \\
&\leq \frac{1}{f(\gamma_{n+1}) \sqrt{\gamma_{n+1}}} [(C_R + 1) C_{ls} \sqrt{\gamma_n} f(\gamma_n) + C_Q C_{ls} \|Ae_n\| \\
&\quad + \bar{a} c_f \sqrt{\gamma_n} f(\gamma_n) \rho + \bar{b} \|Ae_n\| + \frac{\bar{c}}{\sqrt{\gamma_n}} \|Ae_n\|^2].
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\theta_{n+1} &\leq (C_R + 1) C_{ls} \frac{\sqrt{\gamma_n}}{\sqrt{\gamma_{n+1}}} \frac{f(\gamma_n)}{f(\gamma_{n+1})} + C_Q C_{ls} \frac{\|Ae_n\|}{u(\gamma_{n+1})} \\
&\quad + \bar{a} c_f \frac{\sqrt{\gamma_n}}{\sqrt{\gamma_{n+1}}} \frac{f(\gamma_n)}{f(\gamma_{n+1})} \rho + \bar{b} \frac{\|Ae_n\|}{u(\gamma_{n+1})} + \frac{\bar{c}}{\sqrt{\gamma_n}} \frac{\|Ae_n\|^2}{f(\gamma_{n+1}) \sqrt{\gamma_{n+1}}} \\
&\leq \sqrt{\gamma} C_f ((C_R + 1) C_{ls} + \bar{a} c_f \rho) + (C_Q C_{ls} + \bar{b}) \frac{\|Ae_n\|}{u(\gamma_{n+1})} \\
&\quad + \bar{c} \frac{\sqrt{\gamma_n}}{\sqrt{\gamma_{n+1}}} \left(\frac{\|Ae_n\|^2}{(\sqrt{\gamma_n})^2 (f(\gamma_n))^2} \right) \frac{f(\gamma_n)}{f(\gamma_{n+1})} f(\gamma_n).
\end{aligned}$$

Por (1.3), (3.8) e pela definição de u :

$$\begin{aligned}
\gamma_n &\leq \gamma \cdot \gamma_{n+1} \implies \\
u(\gamma_n) &= \sqrt{\gamma_n} f(\gamma_n) \leq \sqrt{\gamma} \sqrt{\gamma_{n+1}} f(\gamma \cdot \gamma_n) \\
&\leq \sqrt{\gamma} \sqrt{\gamma_{n+1}} C_f f(\gamma_{n+1}) = \sqrt{\gamma} C_f u(\gamma_{n+1}).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{u(\gamma_{n+1})} \leq \sqrt{\gamma} \frac{C_f}{u(\gamma_n)}.$$

Usando essa última desigualdade e a definição de a ,

$$\theta_{n+1} \leq a + (C_Q C_{ls} + \bar{b}) \sqrt{\gamma} C_f \frac{\|Ae_n\|}{u(\gamma_n)} + \bar{c} \sqrt{\gamma} C_f \left(\frac{\|Ae_n\|}{u(\gamma_n)} \right)^2,$$

e pelas definições de b e c ,

$$\theta_{n+1} \leq a + b\theta_n + c\theta_n^2. \quad (3.19)$$

Sejam t_1 e t_2 as soluções de $a + bt + ct^2 = t$, isto é,

$$t_1 := \frac{2a}{1 - b + \sqrt{(1 - b)^2 - 4ac}}, \quad t_2 := \frac{1 - b + \sqrt{(1 - b)^2 - 4ac}}{2c}.$$

Assuma que C_R , C_Q , C_{ls} , γ , $\frac{1}{\gamma_0}$ e ρ satisfaçam

$$\begin{aligned} b + 2\sqrt{ac} &< 1, \\ \frac{\|Ae_0\|}{\sqrt{\gamma_0}f(\gamma_0)} &\leq \frac{1 - b + \sqrt{(1 - b)^2 - 4ac}}{2c}, \\ C_{ls} + (c_f + C_R c_f)\rho + \frac{\bar{c}}{C_Q}C_\theta &\leq E. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Note que a primeira desigualdade garante que $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ e $t_1 < t_2$.

Como $\theta_n \geq 0$, temos pela hipótese de indução (3.16) que $0 \leq \theta_n \leq t_1$ ou $t_1 < \theta_n \leq C_\theta \leq \theta_0$. Para o primeiro caso, como $a, b, c \geq 0$, usamos a desigualdade (3.19) acima para conseguir

$$\theta_{n+1} \leq a + b\theta_n + c\theta_n^2 \leq a + bt_1 + ct_1^2 = t_1 \leq C_\theta$$

pela definição de C_θ . No segundo caso usamos o fato de que

$$a + (b - 1)t + ct^2 \leq 0 \text{ se } t_1 \leq t \leq t_2,$$

e com o auxílio da segunda desigualdade em (3.20) obtém-se

$$t_1 < \theta_n \leq \theta_0 = \frac{\|Ae_0\|}{\sqrt{\gamma_0}f(\gamma_0)} \leq \frac{1 - b + \sqrt{(1 - b)^2 - 4ac}}{2c} = t_2.$$

Logo,

$$t_1 \leq \theta_n \leq t_2,$$

o que implica em

$$\begin{aligned} a + (b-1)\theta_n + c\theta_n^2 &\leq 0 \implies \\ a + b\theta_n + c\theta_n^2 &\leq \theta_n. \end{aligned}$$

Por (3.19),

$$\theta_{n+1} \leq a + b\theta_n + c\theta_n^2 \leq \theta_n \leq \theta_0 \leq C_\theta.$$

Logo, temos em qualquer caso que $\theta_{n+1} \leq C_\theta$, o que prova (3.16). Para provar (3.17), utilizamos a desigualdade (i) no lema 23, (3.13), a desigualdade (3.16) já provada, a terceira desigualdade em (3.20) e 3.9 nessa ordem:

$$\begin{aligned} \|e_{n+1}\| &\leq \|e_{n+1}^{ls}\| + (c_f + C_R c_f) \rho f(\gamma_n) + \frac{\bar{c}}{C_Q} \frac{\|Ae_n\|}{\sqrt{\gamma_n}} \\ &\leq [C_{ls} + (c_f + C_R c_f) \rho] f(\gamma_n) + \frac{\bar{c}}{C_Q} \frac{\|Ae_n\|}{\sqrt{\gamma_n} f(\gamma_n)} f(\gamma_n) \\ &= \left[C_{ls} + (c_f + C_R c_f) \rho + \frac{\bar{c}}{C_Q} \theta_n \right] f(\gamma_n) \\ &\leq E f(\gamma_n) \leq E. \end{aligned}$$

Isso prova (3.17) e completa a prova por indução. Para provar (3.15), basta utilizar a última desigualdade obtida acima:

$$\|e_{n+1}\| \leq E f(\gamma_n), \quad (3.21)$$

para $n = 0, 1, \dots, N-1$. Por fim, temos pela definição de θ_n e por (3.16) que

$$\begin{aligned} \|Ae_n\| &= \theta_n u(\gamma_n) \leq C_\theta u(\gamma_n), \quad 0 \leq n < N \\ \implies \|Ae_{N-1}\| &\leq C_\theta u(\gamma_{N-1}). \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade (B.6) apêndice B, vem

$$\delta \leq \frac{1}{\tau-1} \left(1 + C_R + \frac{1}{2} E C_Q \right) \|Ae_{N-1}\|,$$

donde

$$\delta \leq \frac{1}{\tau-1} \left(1 + C_R + \frac{1}{2} E C_Q \right) C_\theta u(\gamma_{N-1}). \quad (3.22)$$

Daí, definindo a constante independente de N ,

$$k := \frac{1}{\tau - 1} \left(1 + C_R + \frac{1}{2} EC_Q \right) C_\theta > 0,$$

e observando que u é inversível sobre sua imagem e com inversa crescente, decorre que

$$\begin{aligned} \delta &\leq ku(\gamma_{N-1}) \implies \\ u^{-1}\left(\frac{\delta}{k}\right) &\leq \gamma_{N-1} = \gamma_0 \gamma^{1-N} \implies \\ \ln\left(\frac{1}{\gamma_0} u^{-1}\left(\frac{1}{k}\delta\right)\right) &\leq (1-N)\ln(\gamma) \implies \\ -\ln\left(\frac{1}{\gamma_0} u^{-1}\left(\frac{1}{k}\delta\right)\right) &\geq N\ln(\gamma) - \ln(\gamma) \implies \\ -\ln\left(\frac{1}{\gamma\gamma_0} u^{-1}\left(\frac{1}{k}\delta\right)\right) &\geq N\ln(\gamma) \implies \\ N &\leq -k_0 \ln(k_1 u^{-1}(k_2 \delta)), \end{aligned}$$

sendo $k_0 := \frac{1}{\ln(\gamma)} > 0$, $k_1 := \frac{1}{\gamma\gamma_0} > 0$ e $k_2 := \frac{1}{k} > 0$. Isso prova que $N = O(-\ln(u^{-1}(\delta)))$, o que completa a prova. ■

Observe que $\gamma_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ (1.19), f é contínua e $f(0) = 0$ (3.2), logo, como $N = \infty$ para $\delta = 0$, obtemos convergência do IRGN inexato para o caso livre de ruídos, observando que (3.21) implica em

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^+\| \leq E. \lim_{n \rightarrow \infty} f(\gamma_n) = Ef\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n\right) = Ef(0) = 0.$$

Observe que essa *não* é a propriedade de regularização (1.6).

3.3 Taxas de Convergência

O principal teorema desse capítulo (teorema 26 abaixo) apresenta condições suficientes para que a propriedade de regularização (1.6) seja obtida e fornece ainda taxas de convergência para a sequência regularizada $(x_{N(\delta)}^\delta)_\delta$, quando $\delta \rightarrow 0$. No entanto, antes de enunciar e provar esse teorema, precisamos de um último lema, o qual por sua vez,

necessita supor que a função índice f satisfaz uma hipótese adicional.

Hipótese 2 *Seja $f \in C[0, \|A\|^2]$ uma função índice estritamente monotonamente crescente de modo que a função $\Phi : [0, f(\|A\|^2)] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\Phi(t) := t(f^2)^{-1}(t)$$

seja convexa e duplamente diferenciável.

O próximo lema não exige as hipóteses dos lemas e teoremas anteriores.

Lema 25 *Seja f uma função índice estritamente monotonamente crescente satisfazendo a hipótese 2 acima. Seja $z \in X$ satisfazendo a condição de fonte*

$$z = f(A^*A)w \text{ com } \|w\| \leq \rho.$$

Então Φ é inversível sobre sua imagem e

$$\|z\|^2 \leq \rho^2 \Phi^{-1}\left(\frac{\|Az\|^2}{\rho^2}\right) = \rho^2 f^2\left(u^{-1}\left(\frac{\|Az\|}{\rho}\right)\right). \quad (3.23)$$

Demonstração: Como f é uma função índice estritamente monotonamente crescente, temos que para $a, b \in D(f^2)$ com $a < b$,

$$0 \leq a < b \implies 0 = f(0) \leq f(a) < f(b) \implies 0 \leq f^2(a) < f^2(b).$$

Logo, f^2 é crescente. Daí, $(f^2)^{-1}$ é crescente e portanto $\Phi(t) = t(f^2)^{-1}(t)$ é crescente (logo inversível sobre sua imagem). Agora, pela definição de Φ e de u ,

$$\begin{aligned} \Phi(f^2(u^{-1}(t))) &= f^2(u^{-1}(t)) \cdot (f^2)^{-1}(f^2(u^{-1}(t))) \\ &= f^2(u^{-1}(t)) u^{-1}(t) \\ &= f^2(u^{-1}(t)) \left(\sqrt{u^{-1}(t)}\right)^2 \\ &= \left(f(u^{-1}(t)) \sqrt{u^{-1}(t)}\right)^2 \\ &= [u(u^{-1}(t))]^2 = t^2. \end{aligned}$$

Logo $\Phi^{-1}(t^2) = f^2(u^{-1}(t))$. Tomando $t := \frac{\|Az\|}{\rho}$ nessa igualdade e multiplicando ambos os lados por ρ^2 ,

$$\rho^2 \Phi^{-1}\left(\frac{\|Az\|^2}{\rho^2}\right) = \rho^2 f^2\left(u^{-1}\left(\frac{\|Az\|}{\rho}\right)\right),$$

o que prova a igualdade em (3.23). Para provarmos a desigualdade, seja $\sigma(A^*A)$ o espectro do operador auto-adjunto A^*A . Daí,

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{\|z\|^2}{\|w\|^2}\right) &= \Phi\left(\frac{\|f(A^*A)w\|^2}{\|w\|^2}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\int_{\sigma(A^*A)} f^2(\lambda) d\langle E_\lambda w, w \rangle}{\int_{\sigma(A^*A)} d\langle E_\lambda w, w \rangle}\right) \\ &\leq \frac{\int_{\sigma(A^*A)} \Phi(f^2(\lambda)) d\langle E_\lambda w, w \rangle}{\int_{\sigma(A^*A)} d\langle E_\lambda w, w \rangle}. \end{aligned}$$

Utilizamos a desigualdade de Jensen na desigualdade acima (veja [35, página 61]). Daí,

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{\|z\|^2}{\|w\|^2}\right) &\leq \frac{\int_{\sigma(A^*A)} \lambda f^2(\lambda) d\langle E_\lambda w, w \rangle}{\|w\|^2} \\ &= \frac{\|Af(A^*A)w\|^2}{\|w\|^2} = \frac{\|Az\|^2}{\|w\|^2}. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade pelo número positivo $t := \frac{\|w\|^2}{\rho^2} \leq 1$, teremos pela convexidade de Φ ,

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{\|z\|^2}{\rho^2}\right) &= \Phi\left(t\frac{\|z\|^2}{\|w\|^2} + (1-t)0\right) \\
&\leq t\Phi\left(\frac{\|z\|^2}{\|w\|^2}\right) + (1-t)\Phi(0) \\
&= t\Phi\left(\frac{\|z\|^2}{\|w\|^2}\right) + 0 \\
&\leq t\frac{\|Az\|^2}{\|w\|^2} = \frac{\|Az\|^2}{\rho^2}.
\end{aligned}$$

Logo, $\|z\|^2 \leq \rho^2 \Phi^{-1}\left(\frac{\|Az\|^2}{\rho^2}\right)$ porque Φ^{-1} é crescente. ■

Se supormos que a função índice f é da forma $f(\lambda) = \lambda^\mu$, como a regularização de Tikhonov possui qualificação clássica de ordem igual a 1 (veja a observação 23 no apêndice C), segue de (3.6) que $\mu \leq \frac{1}{2}$. Portanto, $f(\lambda) = \lambda^\mu \geq \lambda^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\lambda}$, $\forall \lambda \in [0, 1]$ é uma condição necessária para que (3.6) seja satisfeito. Se assumirmos agora a condição (3.5), teremos então que

$$f(\lambda) \geq \sqrt{\lambda}, \quad \forall \lambda \in [0, \|A\|^2] = D(f). \quad (3.24)$$

Como supomos que a função índice f é desconhecida, vamos substituir as desigualdades (3.13) e (3.14) do teorema 24 pelas desigualdades mais fortes (3.25) e (3.26) abaixo, de modo que (3.13) e (3.14) ainda sejam satisfeitas e de modo que (3.6) ainda possa ser verificado.

Teorema 26 *Suponha todas as hipóteses do teorema 24 e suponha também que f satisfaz a hipótese 2. Suponha ainda que (3.5) é satisfeito e que (3.13) e (3.14) são substituídos pelas desigualdades*

$$\|e_{n+1}^{ls}\| \leq C_{ls}\sqrt{\gamma_n}, \quad 0 \leq n < N \quad (3.25)$$

e

$$\|A_n e_{n+1}^{ls}\| \leq C_{ls}\gamma_n, \quad 0 \leq n < N. \quad (3.26)$$

Defina

$$q := C_Q C_{ls} + \bar{b} + EC_Q \text{ e } z := \left(1 + \frac{\|A\|^2}{\gamma_0}\right)$$

com as notações do lema 23 e admita verdadeiras as seguintes desigualdades

$$q\gamma < 1, \quad (3.27)$$

$$\frac{\bar{a}}{1 - q\gamma} + qz + \frac{(\|A\|^2 + \gamma_0)}{\|Ae_0\|} \frac{(C_R + 1) C_{ls}}{1 - \gamma q} < 2. \quad (3.28)$$

Então a iteração final x_N^δ satisfaz

$$\|x_N^\delta - x^+\| = O(f(u^{-1}(\delta))), \quad \delta \rightarrow 0.$$

Em particular, a propriedade de regularização (1.6) é satisfeita.

Demonstração: Vamos provar que cada um dos erros definidos em (3.10) possui ordem de convergência $O(f(u^{-1}(\delta)))$. Como a demonstração é bastante longa, vamos dividi-la em 3 etapas. Iniciemos com a estimativa do erro e_N^{ap} . Na primeira etapa vamos provar por indução que

$$\begin{aligned} \|Ae_{n+1}\| &\leq (C_R + 1) C_{ls} \sum_{k=0}^n q^{n-k} \gamma_k \\ &\quad + \bar{a} \sum_{k=0}^n \|Ae_{k+1}^{ap}\| q^{n-k} + \|Ae_0\| q^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Em seguida, provaremos também por indução que

$$\|Ae_0\| \leq z\gamma^n \|Ae_{n+1}^{ap}\|. \quad (3.30)$$

Com esses resultados, vamos então mostrar que

$$\begin{aligned} \|Ae_{n+1}\| &\leq (C_R + 1) C_{ls} \sum_{k=0}^n q^{n-k} \gamma_k \\ &\quad + \left(\frac{\bar{a}}{1 - q\gamma} + qz\right) \|Ae_{n+1}^{ap}\|. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Na segunda etapa, vamos provar que

$$\begin{aligned} \|Ae_N\| &\geq \left(2 - \frac{\bar{a}}{1 - q\gamma} - q^2\gamma w\right) \|Ae_N^{ap}\| \\ &\quad - (C_R + 1) C_{ls} \sum_{k=0}^{N-1} q^{N-1-k} \gamma_k. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Usando o princípio da discrepância, mostraremos que

$$\delta \geq \left(\frac{1 - C_R - \frac{1}{2} C_Q E}{\tau + 1} \right) \|Ae_N\|. \quad (3.33)$$

Com esses dois resultados vamos provar as estimativas

$$C_1 \gamma_{N-1} \leq \delta \quad (3.34)$$

e

$$C_2 \|Ae_N^{ap}\| \leq C_3 \gamma_{N-1} + \delta, \quad (3.35)$$

onde C_1 , C_2 e C_3 são constantes positivas. Com essas estimativas e com o lema 25 provaremos finalmente que $\|e_N^{ap}\| = O(f(u^{-1}(\delta)))$ (desigualdade (3.44) abaixo). Usaremos então esse resultado na etapa 3, onde usaremos a condição (3.25) para obtermos $\|e_N^{nl}\| = O(f(u^{-1}(\delta)))$ e em seguida, as taxas para os demais erros.

Etapa 1: Devido a (1.20), (3.25), (3.26) e (3.5),

$$\begin{aligned} \|Ae_{n+1}^{ls}\| &\leq \|R(x^+, x_n^\delta)\| \cdot \|A_n e_{n+1}^{ls}\| \\ &\quad + \|Q(x^+, x_n^\delta)\| \cdot \|e_{n+1}^{ls}\| \\ &\leq (C_R + 1) C_{ls} \gamma_n + C_Q \|Ae_n\| C_{ls} \sqrt{\gamma_n} \\ &\leq (C_R + 1) C_{ls} \gamma_n + C_Q C_{ls} \|Ae_n\|. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Então, utilizando este resultado juntamente com (ii) no lema 23 e (3.16),

$$\begin{aligned}
\|Ae_{n+1}\| &\leq \|Ae_{n+1}^{ls}\| + \bar{a}\|Ae_{n+1}^{ap}\| + \bar{b}\|Ae_n\| + \frac{\bar{c}}{\sqrt{\gamma_n}}\|Ae_n\|^2 \\
&\leq (C_R + 1)C_{ls}\gamma_n + \bar{a}\|Ae_{n+1}^{ap}\| \\
&\quad + \left(C_Q C_{ls} + \bar{b} + \frac{\bar{c}\|Ae_n\|}{\sqrt{\gamma_n}}\right)\|Ae_n\| \\
&\leq (C_R + 1)C_{ls}\gamma_n + \bar{a}\|Ae_{n+1}^{ap}\| + (C_Q C_{ls} + \bar{b} + \bar{c}C_\theta)\|Ae_n\|.
\end{aligned}$$

Agora, pela terceira desigualdade em (3.20), obtem-se

$$\begin{aligned}
\bar{c}C_\theta &\leq C_Q E \implies \\
C_Q C_{ls} + \bar{b} + \bar{c}C_\theta &\leq C_Q C_{ls} + \bar{b} + EC_Q = q.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Logo,

$$\|Ae_{n+1}\| \leq (C_R + 1)C_{ls}\gamma_n + \bar{a}\|Ae_{n+1}^{ap}\| + q\|Ae_n\|. \tag{3.38}$$

Vamos provar por indução a desigualdade (3.29). Para $n = 0$ a desigualdade segue diretamente de (3.38). Suponha que ela seja verdadeira para $n \in \mathbb{N}$ fixo. Então mais uma vez por (3.38),

$$\begin{aligned}
\|Ae_{n+2}\| &\leq (C_R + 1)C_{ls}\gamma_{n+1} + \bar{a}\|Ae_{n+2}^{ap}\| + q\|Ae_{n+1}\| \\
&\leq (C_R + 1)C_{ls}\gamma_{n+1} + \bar{a}\|Ae_{n+2}^{ap}\| \\
&\quad + q \left[(C_R + 1)C_{ls} \sum_{k=0}^n q^{n-k}\gamma_k + \bar{a} \sum_{k=0}^n \|Ae_{k+1}^{ap}\| q^{n-k} + \|Ae_0\| q^{n+1} \right] \\
&= (C_R + 1)C_{ls} \left[\gamma_{n+1} + q \sum_{k=0}^n q^{n-k}\gamma_k \right] \\
&\quad + \bar{a} \left[\|Ae_{n+2}^{ap}\| + q \sum_{k=0}^n \|Ae_{k+1}^{ap}\| q^{n-k} \right] + \|Ae_0\| q^{n+2} \\
&\leq (C_R + 1)C_{ls} \sum_{k=0}^{n+1} q^{(n+1)-k}\gamma_k \\
&\quad + \bar{a} \sum_{k=0}^{n+1} q^{(n+1)-k} \|Ae_{k+1}^{ap}\| + \|Ae_0\| q^{(n+1)+1},
\end{aligned}$$

o que mostra que a desigualdade (3.29) é válida para $n+1$, completando a prova por indução. Usando a definição de p_n (3.1) e as propriedades da sequência (γ_n) (1.19) obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned} p_n(\lambda) &= \left(\frac{\gamma_n}{\gamma_n + \lambda} \right) \leq \left(\frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1} + \lambda} \right) \\ &= \left(\frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} \right) \left(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_{n+1} + \lambda} \right) \leq \gamma p_{n+1}(\lambda), \quad \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Daí, decorre da definição de e_n^{ap} (3.10) que

$$\begin{aligned} \|Ae_{n+1}^{ap}\| &= \|Ap_n(A^*A)f(A^*A)w\| \\ &\leq \gamma \|Ap_{n+1}(A^*A)f(A^*A)w\| = \gamma \|Ae_{n+2}^{ap}\|. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Vamos provar agora que (3.30) é válido. Veja que

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda \leq \|A\|^2 &\implies \frac{\gamma_n + \|A\|^2}{\gamma_n + \lambda} \geq 1 \implies \\ \sqrt{\lambda} &\leq \left(\frac{\gamma_n + \|A\|^2}{\gamma_n} \right) \left(\frac{\gamma_n}{\gamma_n + \lambda} \right) \sqrt{\lambda}. \end{aligned}$$

Ainda, como $\gamma > 1$, temos que $\gamma^n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ o que implica que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\gamma_n + \|A\|^2}{\gamma_n} \right) &= \left(1 + \frac{\|A\|^2}{\gamma_n} \right) = \left(1 + \frac{\|A\|^2}{\gamma_0 \gamma^{-n}} \right) \\ &= \left(1 + \frac{\|A\|^2}{\gamma_0} \gamma^n \right) \leq z \gamma^n. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sqrt{\lambda} \leq z \gamma^n \sqrt{\lambda} p_n(\lambda), \text{ se } 0 \leq \lambda \leq \|A\|^2$$

e portanto,

$$u(\lambda) \leq z \gamma^n g(\lambda), \quad \forall \lambda \in [0, \|A\|^2],$$

onde $u(\lambda) := \sqrt{\lambda} f(\lambda)$ e $g(\lambda) := \sqrt{\lambda} p_n(\lambda) f(\lambda)$. Da condição de fonte (3.2), temos que

$$\|Ae_0\| = \|Af(A^*A)w\| = \left\| (A^*A)^{\frac{1}{2}} f(A^*A)w \right\| = \|u(A^*A)w\|$$

e da definição de e_{n+1}^{ap} (3.10), temos que

$$\begin{aligned} \|Ae_{n+1}^{ap}\| &= \|Ap_n(A^*A)f(A^*A)w\| \\ &= \left\| (A^*A)^{\frac{1}{2}} p_n(A^*A)f(A^*A)w \right\| = \|g(A^*A)w\|. \end{aligned}$$

Segue do teorema 30 (b), que (3.30) é verdadeiro. Mais, fazendo uso de (3.39) na primeira desigualdade a seguir e de $q\gamma < 1$ (3.27) na última, conseguimos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n q^{n-k} \|Ae_{k+1}^{ap}\| &\leq \sum_{k=0}^n q^{n-k} \gamma^{n-k} \|Ae_{n+1}^{ap}\| = \sum_{k=0}^n (q\gamma)^k \|Ae_{n+1}^{ap}\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (q\gamma)^k \|Ae_{n+1}^{ap}\| \leq \frac{1}{1-q\gamma} \|Ae_{n+1}^{ap}\|. \end{aligned}$$

Usando isso, (3.29) e (3.30) obtem-se (3.31).

Etapa 2: Usando o lema 23 (iii) e (3.36),

$$\begin{aligned} \|Ae_N\| &\geq \underline{a} \|Ae_N^{ap}\| - (\bar{b} + C_Q C_{ls}) \|Ae_{N-1}\| \\ &\quad - \frac{\bar{c}}{\sqrt{\gamma_{N-1}}} \|Ae_{N-1}\|^2 - (C_R + 1) C_{ls} \gamma_{N-1}. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{c}}{\sqrt{\gamma_{N-1}}} \|Ae_{N-1}\|^2 &= \bar{c} \frac{\|Ae_{N-1}\|}{\sqrt{\gamma_{N-1}} f(\gamma_{N-1})} \|Ae_{N-1}\| f(\gamma_{N-1}) \\ &= \bar{c} \frac{\|Ae_{N-1}\|}{u(\gamma_{N-1})} \|Ae_{N-1}\| f(\gamma_{N-1}) \\ &\leq \bar{c} C_{\theta} \|Ae_{N-1}\|, \end{aligned}$$

por (3.16) e pela condição (3.9). Daí, usando mais uma vez (3.37),

$$\begin{aligned} \|Ae_N\| &\geq \underline{a} \|Ae_N^{ap}\| - (\bar{b} + C_Q C_{ls} + \bar{c} C_{\theta}) \|Ae_{N-1}\| \\ &\quad - (C_R + 1) C_{ls} \gamma_{N-1} \\ &\geq \underline{a} \|Ae_N^{ap}\| - q \|Ae_{N-1}\| - (C_R + 1) C_{ls} \gamma_{N-1}. \end{aligned}$$

Como $q\gamma < 1$ (3.27) e $\gamma > 1$ (1.19), segue que $q < 1$ e aplicando (3.31) e (3.39),

$$\begin{aligned}
\|Ae_N\| &\geq \underline{a}\|Ae_N^{ap}\| - q\left(\frac{\bar{a}}{1-q\gamma} + qz\right)\gamma\|Ae_N^{ap}\| \\
&\quad - (C_R + 1)C_{ls}\left(q\sum_{k=0}^{N-2}q^{N-2-k}\gamma_k + \gamma_{N-1}\right) \\
&= \left(\underline{a} - \frac{q\gamma\bar{a}}{1-q\gamma} - q^2\gamma z\right)\|Ae_N^{ap}\| \\
&\quad - (C_R + 1)C_{ls}\sum_{k=0}^{N-1}q^{N-1-k}\gamma_k \\
&= \left(2 - \frac{\bar{a}}{1-q\gamma} - q^2\gamma z\right)\|Ae_N^{ap}\| \\
&\quad - (C_R + 1)C_{ls}\sum_{k=0}^{N-1}q^{N-1-k}\gamma_k.
\end{aligned}$$

A última igualdade é justificada por

$$\underline{a} - \frac{q\gamma\bar{a}}{1-q\gamma} = \frac{\underline{a}(1-q\gamma) - q\gamma\bar{a}}{1-q\gamma} = \frac{(\underline{a} + \bar{a})(1-q\gamma) - \bar{a}}{1-q\gamma} = 2 - \frac{\bar{a}}{1-q\gamma}.$$

Daí, concluímos que (3.32) é válido. Como anteriormente,

$$0 \leq \lambda \leq \|A\|^2 \implies p_{N-1}(\lambda) = \frac{\gamma_{N-1}}{\gamma_{N-1} + \lambda} \geq \frac{\gamma_{N-1}}{\gamma_0 + \|A\|^2}$$

porque $\gamma_{N-1} \leq \gamma_0$. Então

$$\sqrt{\lambda}p_{N-1}(\lambda) \geq \sqrt{\lambda}\left(\frac{\gamma_{N-1}}{\gamma_0 + \|A\|^2}\right).$$

Isso implica, como em (3.30) que

$$\|Ae_{N-1}^{ap}\| \geq \frac{\gamma_{N-1}}{\gamma_0 + \|A\|^2}\|Ae_0\|. \quad (3.40)$$

Usando (3.12) e a desigualdade triangular reversa temos

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(x^+)\| &\geq \|F(x^+)(x - x^+)\| - \|E(x, x^+)\| \\ &\geq \left(1 - C_R - \frac{1}{2}C_Q\|x - x^+\|\right) \|F'(x^+)(x - x^+)\|. \end{aligned}$$

Tomando $x = x_N^\delta$ e aplicando (3.17),

$$\|F(x_N^\delta) - y\| \geq \left(1 - C_R - \frac{1}{2}C_Q E\right) \|Ae_N\|.$$

Mas pelo princípio da discrepância (1.5),

$$\begin{aligned} \tau\delta &\geq \|F(x_N^\delta) - y^\delta\| \geq \|F(x_N^\delta) - y\| - \|y^\delta - y\| \\ &\geq \|F(x_N^\delta) - y\| - \delta \implies \\ (\tau + 1)\delta &\geq \|F(x_N^\delta) - y\| \\ &\geq \left(1 - C_R - \frac{1}{2}C_Q E\right) \|Ae_N\| \end{aligned}$$

que implica em (3.33). Diretamente da definição de $\bar{b}$ (lema 23), podemos perceber que $\bar{b} > 2C_R + \frac{3}{2}EC_Q$, e como $q < 1$,

$$1 > q = C_Q C_{ls} + \bar{b} + C_Q E > C_R + \frac{1}{2}C_Q E. \quad (3.41)$$

Agora, para $k = 0, 1, \dots, N-1$,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_k}{\gamma_{N-1}} &= \frac{\gamma_0 \gamma^{-k}}{\gamma_0 \gamma^{-(N-1)}} = \gamma^{N-1-k} \implies \\ \gamma_k q^{N-1-k} &= \gamma_{N-1} (\gamma q)^{N-1-k} \implies \\ \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k q^{N-1-k} &= \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_{N-1} (\gamma q)^{N-1-k} \\ &\leq \gamma_{N-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma q)^k = \frac{\gamma_{N-1}}{1 - \gamma q}. \end{aligned}$$

Logo

$$\sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k q^{N-1-k} \leq \frac{\gamma_{N-1}}{1 - \gamma q}. \quad (3.42)$$

Usando essa desigualdade em (3.32) decorre que

$$\|Ae_N\| \geq \left(2 - \frac{\bar{a}}{1 - q\gamma} - q^2\gamma z\right) \|Ae_N^{ap}\| - (C_R + 1) C_{ls} \frac{\gamma_{N-1}}{1 - \gamma q},$$

que com (3.33) dá

$$\begin{aligned} \delta \geq & \left(\frac{1 - C_R - \frac{1}{2}C_Q E}{\tau + 1} \right) \\ & \left[\left(2 - \frac{\bar{a}}{1 - q\gamma} - q^2\gamma z \right) \|Ae_N^{ap}\| - (C_R + 1) C_{ls} \frac{\gamma_{N-1}}{1 - \gamma q} \right]. \end{aligned}$$

Esta desigualdade com (3.40), (3.41) e (3.39) resulta em (3.34) e (3.35), com constantes

$$\begin{aligned} C_1 & : = \left(\frac{1 - q}{\tau + 1} \right) \\ & \quad \left[\left(2 - \frac{\bar{a}}{1 - q\gamma} - qz \right) \frac{\|Ae_0\|}{\|A\|^2 + \gamma_0} - \frac{(C_R + 1) C_{ls}}{1 - \gamma q} \right], \\ C_2 & : = \left(\frac{1 - q}{\tau + 1} \right) \left(2 - \frac{\bar{a}}{1 - q\gamma} - q^2\gamma z \right), \\ C_3 & : = \left(\frac{1 - q}{\tau + 1} \right) \left(\frac{(C_R + 1) C_{ls}}{1 - \gamma q} \right), \end{aligned}$$

independentes de δ e de y^δ . Para facilitar a notação, escrevemos

$$\begin{aligned} x & : = \frac{\bar{a}}{1 - q\gamma} + qz \text{ e} \\ y & : = \frac{1 - q}{\tau + 1} \end{aligned}$$

e substituímos em (3.27) resultando em

$$x \|Ae_0\| (1 - \gamma q) + \left(\|A\|^2 + \gamma_0 \right) (C_R + 1) C_{ls} \leq 2 \|Ae_0\| (1 - \gamma q).$$

Como $y > 0$,

$$\begin{aligned}
C_1 &= y \left[(2-x) \frac{\|Ae_0\|}{\|A\|^2 + \gamma_0} - \frac{(C_R + 1) C_{ls}}{1 - \gamma q} \right] \\
&= y \left[\frac{2\|Ae_0\|}{\|A\|^2 + \gamma_0} - \left(\frac{x\|Ae_0\|(1 - \gamma q) + (C_R + 1) C_{ls} (\|A\|^2 + \gamma_0)}{(\|A\|^2 + \gamma_0)(1 - \gamma q)} \right) \right] \\
&> y \left[\frac{2\|Ae_0\|}{\|A\|^2 + \gamma_0} - \frac{2\|Ae_0\|}{\|A\|^2 + \gamma_0} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Mais, $q\gamma < 1$ (3.27) implica que

$$\frac{\bar{a}}{1 - q\gamma} + q^2\gamma z < \frac{\bar{a}}{1 - q\gamma} + qz < 2,$$

novamente por (3.27). Daí,

$$C_2 = y \left(2 - \frac{\bar{a}}{1 - q\gamma} - q^2\gamma z \right) > 0.$$

É fácil notar que $C_3 > 0$. Logo, C_1 , C_2 e C_3 são constantes positivas. Agora, pela desigualdades obtidas em (3.34) e (3.35),

$$\gamma_{N-1} \leq \frac{\delta}{C_1}$$

e

$$\|Ae_N^{ap}\| \leq \frac{C_3}{C_2} \gamma_{N-1} + \frac{\delta}{C_2} \leq \frac{C_3}{C_2} \frac{\delta}{C_1} + \frac{\delta}{C_2} = C_4 \delta, \quad (3.43)$$

onde

$$C_4 := \left(\frac{C_3}{C_2} \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \left(\frac{\frac{C_3}{C_2} + 1}{C_2} \right) > 0.$$

Tomando $z_1 := \frac{\rho}{C_4} e_N^{ap}$, vemos por (3.10) que z_1 satisfaz a condição de fonte $z_1 = f(A^*A) \left[p_{N-1}(A^*A) \frac{\rho}{C_4} w \right]$. Pelo lema 25, segue que

$$\begin{aligned} \frac{C_4}{\rho} \left\| \frac{\rho}{C_4} e_N^{ap} \right\| &= \frac{C_4}{\rho} \|z_1\| \leq C_4 f \left(u^{-1} \left(\frac{\|Az_1\|}{\rho} \right) \right) \\ &= C_4 f \left(u^{-1} \left(\left(\frac{\rho}{C_4} \right) \frac{\|Ae_N^{ap}\|}{\rho} \right) \right) \\ &= C_4 f \left(u^{-1} \left(\frac{\|Ae_N^{ap}\|}{C_4} \right) \right). \end{aligned}$$

Mas por (3.43) e como $f \circ u^{-1}$ é crescente,

$$\frac{\|Ae_N^{ap}\|}{C_4} \leq \delta \implies \frac{C_4}{\rho} \left\| \frac{\rho}{C_4} e_N^{ap} \right\| \leq C_4 f(u^{-1}(\delta)).$$

Logo

$$\|e_N^{ap}\| \leq C_4 f(u^{-1}(\delta)). \quad (3.44)$$

Etapa 3: Utilizando agora a desigualdade (3.22) provada no teorema 24,

$$\delta \leq C_5 u(\gamma_{N-1}), \quad (3.45)$$

com

$$C_5 := \left(\frac{1 + C_R + \frac{1}{2} EC_Q}{\tau - 1} \right) C_\theta > 0.$$

Perceba que

$$\sqrt{\gamma_{N-1}} = C_5 \frac{\sqrt{\gamma_{N-1}}}{\delta} u \left(u^{-1} \left(\frac{\delta}{C_5} \right) \right).$$

Mas por (3.34),

$$\begin{aligned} C_1 \gamma_{N-1} &\leq \delta \implies \\ \frac{\gamma_{N-1}}{\delta} &\leq \frac{1}{C_1} \implies \\ C_5 \frac{\sqrt{\gamma_{N-1}}}{\delta} &\leq \frac{C_5}{C_1} \frac{1}{\sqrt{\gamma_{N-1}}}. \end{aligned}$$

Pela definição de u ,

$$\begin{aligned}
u\left(u^{-1}\left(\frac{\delta}{C_5}\right)\right) &= \sqrt{u^{-1}\left(\frac{\delta}{C_5}\right)} f\left(u^{-1}\left(\frac{\delta}{C_5}\right)\right) \\
&\leq \sqrt{u^{-1}\left(\frac{\delta}{C_5}\right)} f\left(u^{-1}\left(\max\left\{\delta, \frac{\delta}{C_5}\right\}\right)\right) \\
&= \sqrt{u^{-1}\left(\frac{\delta}{C_5}\right)} f\left(u^{-1}\left(\max\left\{1, \frac{1}{C_5}\right\}\delta\right)\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sqrt{\gamma_{N-1}} \leq \frac{C_5}{C_1} \sqrt{\frac{u^{-1}\left(\frac{\delta}{C_5}\right)}{\gamma_{N-1}}} f\left(u^{-1}\left(\max\left\{1, \frac{1}{C_5}\right\}\delta\right)\right).$$

Como u^{-1} é crescente, decorre de (3.45) que,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{C_5} &\leq u(\gamma_{N-1}) \implies \\
u^{-1}\left(\frac{\delta}{C_5}\right) &\leq \gamma_{N-1} \implies \\
\sqrt{\frac{u^{-1}\left(\frac{\delta}{C_5}\right)}{\gamma_{N-1}}} &\leq 1.
\end{aligned}$$

Da hipótese 2, $f \circ u^{-1}$ é côncava e portanto $f(u^{-1}(t\delta)) \leq t f(u^{-1}(\delta))$ para $t \geq 1$. Como $\max\left\{1, \frac{1}{C_5}\right\} \geq 1$, vemos que

$$f\left(u^{-1}\left(\max\left\{1, \frac{1}{C_5}\right\}\delta\right)\right) \leq \max\left\{1, \frac{1}{C_5}\right\} f(u^{-1}(\delta)).$$

Dai,

$$\sqrt{\gamma_{N-1}} \leq \frac{C_5}{C_1} \max\left\{1, \frac{1}{C_5}\right\} f(u^{-1}(\delta)) = \frac{1}{C_1} \max\{C_5, 1\} f(u^{-1}(\delta))$$

Utilizando (3.25),

$$\|e_N^{ls}\| \leq \frac{C_{ls}}{C_1} \max\{1, C_5\} f(u^{-1}(\delta)).$$

Resta provar que as normas dos erros e_N^{nl} , e_N^{tay} e e_N^{noi} possuem ordem de convergência $O(f(u^{-1}(\delta)))$.

Para estimar as normas $\|e_N^{nl}\|$ e $\|e_N^{tay}\|$, utilizamos inicialmente (3.42) e (3.34),

$$\sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k q^{N-1-k} \leq \frac{\gamma_{N-1}}{1-\gamma q} \leq \frac{\delta}{C_1(1-\gamma q)}.$$

Incluindo agora (3.31) e (3.43),

$$\|Ae_N\| \leq \left[\frac{(C_R+1)C_{ls}}{C_1(1-\gamma q)} \right] \delta + \left[\frac{\bar{a}}{1-q\gamma} + qz \right] C_4 \delta = k_1 \delta,$$

onde

$$k_1 := \left[\frac{(C_R+1)C_{ls}}{C_1(1-\gamma q)} \right] + \left[\frac{\bar{a}}{1-q\gamma} + qz \right] C_4 > 0.$$

Logo, $\|Ae_N\| = O(\delta)$ e analogamente, $\|Ae_{N-1}\| = O(\delta)$. Com uma aplicação da desigualdade provada em (iii) lema 22, e em seguida das desigualdades (3.9) e (3.43) obtemos

$$\begin{aligned} \|e_N^{nl}\| &\leq C_R \frac{\|Ae_N^{ap}\|}{\sqrt{\gamma_{N-1}}} + \frac{3c_f}{2} C_Q \frac{\|Ae_{N-1}\|}{\sqrt{\gamma_{N-1}}} f(\gamma_{N-1}) \rho \\ &\leq C_R C_4 \frac{\delta}{\sqrt{\gamma_{N-1}}} + \frac{3c_f}{2} C_Q \rho k_2 \frac{\delta}{\sqrt{\gamma_{N-1}}} \\ &= k_3 \frac{\delta}{\sqrt{\gamma_{N-1}}}, \end{aligned}$$

onde k_2 e k_3 são constantes positivas. Assim,

$$\|e_N^{nl}\| = O\left(\frac{\delta}{\sqrt{\gamma_{N-1}}}\right).$$

Com uma aplicação de (iv), lema 22,

$$\begin{aligned}
 \|e_N^{tay}\| &\leq \frac{1}{2\sqrt{\gamma_{N-1}}} \left(2C_R + \frac{3}{2}C_Q \|e_{N-1}\| \right) \|Ae_{N-1}\| \\
 &\leq \frac{1}{2} \left(2C_R + \frac{3}{2}C_Q E \right) k_2 \frac{\delta}{\sqrt{\gamma_{N-1}}} \\
 &= k_4 \frac{\delta}{\sqrt{\gamma_{N-1}}},
 \end{aligned}$$

com $k_4 := \frac{1}{2} (2C_R + \frac{3}{2}C_Q E) k_2 > 0$. Logo, também temos

$$\|e_N^{tay}\| = O \left(\frac{\delta}{\sqrt{\gamma_{N-1}}} \right).$$

O fato

$$\|e_N^{noi}\| = O \left(\frac{\delta}{\sqrt{\gamma_{N-1}}} \right)$$

decorre imediatamente de (ii), lema 22.

Usando uma ideia similar a aplicada anteriormente, obtemos

$$\frac{\delta}{\sqrt{\gamma_{N-1}}} \leq \max \{1, C_5\} f(u^{-1}(\delta)).$$

Portanto, as normas de todos os erros em (3.10) satisfazem a ordem de convergência $O(f(u^{-1}(\delta)))$, bem como $\|e_N^{ls}\|$. Segue que

$$\|e_N\| = \|x_N^\delta - x^+\| = O(f(u^{-1}(\delta))), \quad \delta \longrightarrow 0,$$

conforme queríamos. ■

Observe que a função

$$f(t) := t^v, \quad 0 < v < \frac{1}{2}$$

satisfaz (3.6) a (3.9) e portanto os teoremas aqui apresentados são válidos para ela.

De fato, observamos que $u(t) = t^{\frac{1}{2}+v} \implies u^{-1}(t) = t^{\frac{2}{1+2v}} \implies f(u^{-1}(t)) = t^{\frac{2v}{1+2v}}$. Usando o teorema 26 concluímos que

$$\|x_N^\delta - x^+\| = O(f(u^{-1}(\delta))) = O(\delta^{\frac{2v}{1+2v}}),$$

concordando com (1.22). Isso significa que, mesmo resolvendo o sistema linear (1.18) de forma inexata, a taxa de convergência do IRGN não é piorada.

3.4 Solução do Sistema Linear

Nessa seção mostraremos como é possível utilizarmos o método do gradiente conjugado² para resolver o sistema linear (3.3) e determinar o passo do IRGN inexato. A ideia é usar um critério de parada adequado de forma que as hipóteses (3.25) e (3.26) do teorema 26 sejam satisfeitas.

Para facilitar a notação definimos para $x_n^\delta \in D(F)$,

$$\begin{aligned} G_n &: = \begin{pmatrix} F'(x_n^\delta) \\ \sqrt{\gamma_n} I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(X, Y \times X) \text{ e} \\ g_n^\delta &: = \begin{pmatrix} y^\delta - F(x_n^\delta) \\ \sqrt{\gamma_n}(x_0 - x_n^\delta) \end{pmatrix} \in Y \times X. \end{aligned}$$

Com essas definições, a igualdade (1.18) que define o passo do IRGN *clássico*, pode ser escrita na forma

$$G_n^* G_n h_n = G_n^* g_n^\delta. \quad (3.46)$$

O algoritmo a seguir codifica o método do gradiente conjugado com um critério de parada apropriado. Ele é aplicado considerando $n \in \mathbb{N}$ fixado.

Algoritmo 5 Dados $(y^\delta; x_0; x_n^\delta; F; F'; \gamma_n; \epsilon)$

$$\begin{aligned} h_n^0 &:= 0; \\ d^0 &:= g_n^\delta; \\ r^0 &:= G_n^* d^0; \\ p^1 &:= r^0; \end{aligned}$$

²O método do gradiente conjugado é apresentado brevemente na seção 1.2.

$$k = 0;$$

$$\text{Enquanto } \|r^k\| > \epsilon \gamma_n^{3/2}$$

$$k := k + 1;$$

$$q^k := G_n p^k;$$

$$\alpha_k := \frac{\|r^{k-1}\|^2}{\|q^k\|^2};$$

$$h_n^k := h_n^{k-1} + \alpha_k p^k;$$

$$d^k := d^{k-1} - \alpha_k q^k;$$

$$r^k := G_n^* d^k;$$

$$\beta_k := \frac{\|r^k\|^2}{\|r^{k-1}\|^2};$$

$$p^{k+1} := r^k + \beta_k p^k;$$

Fim

$$h_n^{ap} := h_n^k;$$

O parâmetro ϵ deve ser escolhido de maneira apropriada. Mostraremos que caso isso aconteça, então o algoritmo acima fornece o passo h_n^{ap} do IRGN inexato de modo que as hipóteses (3.25) e (3.26) do teorema 26 são satisfeitas. Perceba que o critério de parada não exige conhecimentos sobre as condições de fonte.

Para enunciarmos o teorema que irá provar as propriedades desejadas, vamos lembrar da importante identidade válida no método do gradiente conjugado:

$$r^k = G_n^* (g_n^\delta - G_n h_n^k). \quad (3.47)$$

Teorema 27 *O algoritmo 5 acima aplicado a (3.46) termina após um número finito $J \in \mathbb{N}$ de iterações e $h_n^{ap} = h_n^J$ satisfaz*

$$\begin{aligned} \|h_n - h_n^J\| &\leq \epsilon \sqrt{\gamma_n} \text{ e} \\ \|A_n (h_n - h_n^J)\| &\leq \epsilon \gamma_n, \end{aligned}$$

onde h_n está definido em (1.18). Em particular, as hipóteses (3.25) e (3.26) do teorema 26 são satisfeitas com $C_{ls} = \epsilon$.

Demonstração: Para o método do gradiente conjugado vale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_n^k = h_n \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} r^k = 0$$

e portanto o critério de parada

$$\|r^J\| \leq \epsilon \gamma_n^{3/2} \quad (3.48)$$

é obtido após um número finito $J \in \mathbb{N}$ de iterações. Perceba que para todo $v \in X$ temos

$$\|G_n v\|^2 = \langle G_n^* G_n v; v \rangle = \|A_n v\|^2 + \gamma_n \|v\|^2 \geq \gamma_n \|v\|^2,$$

implica que

$$\begin{aligned} \|G_n^* G_n\| &= \|G_n\|^2 \geq \gamma_n \implies \\ \|(G_n^* G_n)^{-1}\| &\leq \gamma_n^{-1}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Observe que de (3.46) e da identidade (3.47),

$$\begin{aligned} G_n^* G_n (h_n - h_n^J) &= G_n^* G_n h_n - G_n^* G_n h_n^J \\ &= G_n^* g_n^\delta - G_n^* G_n h_n^J \\ &= G_n^* (g_n^\delta - G_n h_n^J) = r^J. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Decorre do critério de parada (3.48), de (3.49) e (3.50) acima que

$$\begin{aligned} \|h_n - h_n^J\| &\leq \|(G_n^* G_n)^{-1}\| \cdot \|G_n^* G_n (h_n - h_n^J)\| \\ &\leq \gamma_n^{-1} \|r^J\| \leq \epsilon \sqrt{\gamma_n}, \end{aligned}$$

o que prova (3.25) com $C_{ls} = \epsilon$. Agora, como $G_n^* G_n$ é inversível, $(G_n^*)^\dagger = G_n (G_n^* G_n)^{-1}$, onde $(G_n^*)^\dagger : X \rightarrow X$ representa a pseudo-inversa³ de G_n^* . Temos portanto, para todo $v \in X$

$$\begin{aligned} \|(G_n^*)^\dagger v\|^2 &= \langle G_n (G_n^* G_n)^{-1} v; G_n (G_n^* G_n)^{-1} v \rangle \\ &= \langle (G_n^* G_n)^{-1} v; (G_n^* G_n) (G_n^* G_n)^{-1} v \rangle \\ &\leq \|(G_n^* G_n)^{-1}\| \cdot \|v\|^2, \end{aligned}$$

³Veja o apêndice C para mais detalhes sobre a pseudo-inversa.

o implica na desigualdade

$$\left\| (G_n^*)^\dagger \right\|^2 \leq \left\| (G_n^* G_n)^{-1} \right\|$$

que com o uso de (3.49) implica em

$$\begin{aligned} \left\| (G_n^*)^\dagger \right\|^2 &\leq \left\| (G_n^* G_n)^{-1} \right\| \leq \gamma_n^{-1} \implies \\ \left\| (G_n^*)^\dagger \right\| &\leq \gamma_n^{-1/2}. \end{aligned}$$

Daí, como $G_n (h_n - h_n^J) \in R(G_n)$ e $(G_n^*)^\dagger G_n^*$ é a projeção ortogonal sobre $\overline{R(G_n)}$, obtemos de (3.50),

$$\begin{aligned} \|G_n (h_n - h_n^J)\| &= \left\| (G_n^*)^\dagger G_n^* G_n (h_n - h_n^J) \right\| \\ &\leq \left\| (G_n^*)^\dagger \right\| \cdot \|G_n^* G_n (h_n - h_n^J)\| \\ &\leq \gamma_n^{-1/2} \|r^J\| \leq \epsilon \gamma_n. \end{aligned}$$

Basta perceber agora que $\|A_n v\|^2 \leq \|G_n v\|^2$ para todo $v \in X$ para obtermos

$$\|A_n (h_n - h_n^J)\| \leq \epsilon \gamma_n,$$

que é (3.26) novamente com $C_{ls} = \epsilon$. ■

O teorema acima mostra que podemos usar o algoritmo 5 com $\epsilon = C_{ls}$ para determinar o passo do IRGN inexato. É importante reparar no entanto, que qualquer algoritmo que forneça uma solução para o sistema (3.3) satisfazendo (3.25) e (3.26) pode ser aplicado para esse fim.

Capítulo 4

Implementação Numérica do REGINN

4.1 Apresentação do Problema Inverso

Conforme [12], se considerarmos um domínio tridimensional $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ cuja temperatura na fronteira é mantida fixa em zero, a distribuição da temperatura $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ em Ω após um tempo suficientemente grande pode ser modelada por

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a\nabla u) = f & \text{em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ denota uma fonte de calor interna e $a : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é a condutividade térmica do material. Em problemas práticos, desejamos determinar a condutividade térmica a através de medidas da distribuição de temperatura u .

Consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado bem regular e entendemos $u|_{\partial\Omega}$ no sentido do *operador do traço*¹ $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$. Este operador é linear, limitado e sobrejetivo. Além disso, tem a importante propriedade de que $\gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}$ se u pertencer ao conjunto $D(\overline{\Omega}) := \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u = v|_{\Omega} \text{ com } v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$, denso

¹Em Brézis [4], encontra-se a formalização da teoria dos espaços L^p , bem como a teoria das distribuições e dos espaços de Sobolev apresentados nesse capítulo. O teorema do traço também está presente neste livro.

em $H^1(\Omega)$. Ainda, seu núcleo é igual ao conjunto $H_0^1(\Omega)$ e por esse motivo, interpretamos a condição $u|_{\partial\Omega} = 0$ como sendo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Perceba agora, que se $a \in H^1(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, então $-\operatorname{div}(a\nabla u) \in L^2(\Omega)$. Segundo [13, Seções 6.1 e 6.2], se $a \in H^1(\Omega)$, com $a(x) \geq \underline{a}$ quase sempre em Ω , onde $\underline{a} > 0$ está fixada e $f \in L^2(\Omega)$, então existe uma única $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ *solução fraca* de (4.1). Podemos portanto, definir a função

$$\begin{aligned} F : D(F) &\rightarrow L^2(\Omega) \\ a &\mapsto u_a \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde $D(F) := \{a \in H^1(\Omega) : a(x) \geq \underline{a} \text{ quase sempre em } \Omega\} \subset L^2(\Omega)$ e u_a é a única solução de (4.1).

Fixada uma função $f \in L^2(\Omega)$, gostaríamos de determinar no **problema direto**, a função $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ na equação

$$F(a) = u, \tag{4.3}$$

dada a função $a \in D(F)$. No **problema inverso**, temos disponível a função $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e gostaríamos de determinar $a \in D(F)$ satisfazendo (4.3) acima.

Repare que em abertos contidos em Ω onde u é constante por exemplo, a função a é arbitrária e portanto a unicidade de soluções do problema inverso não é assegurada. A existência de soluções também não é assegurada no problema inverso, como podemos notar observando a equação (4.1), considerando $u \equiv 0$ e $f > 0$ quase sempre em Ω .

Para a implementação numérica que apresentaremos nesse capítulo, vamos tentar resolver o problema inverso, mas numa forma mais simplificada, estudando o caso unidimensional. Para esse caso, consideramos $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ e gostaríamos de determinar $a \in D(F)$ satisfazendo

$$\begin{cases} -(au')' = f & \text{em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

onde $f \in L^2(\Omega)$ e uma *aproximação* para $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ são dadas. Observe que como Ω é limitado, $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ e portanto f é integrável sobre Ω . Assim, se tivermos $u'(x) \neq 0$ quase sempre em Ω ,

então,

$$a(x) = \frac{1}{u'(x)} \left[a(0) u'(0) - \int_0^x f(s) ds \right], \text{ quase sempre em } \Omega$$

e portanto a é unicamente determinado. Mesmo nesse caso, o problema inverso em (4.3) é mal posto devido a falta de estabilidade. Aqui, a função a pode ser encontrada através (do problema mal posto) da diferenciação de u . Podemos perceber que além das instabilidades provenientes do processo de diferenciação em si, instabilidades devem também ocorrer nos pontos onde u' estiver próximo de zero, devido ao termo $\frac{1}{u'(x)}$ (é bastante razoável imaginar que problemas de estabilidade ocorrerão nos pontos onde u' está próximo de zero, uma vez que em regiões onde $u' = 0$ não é possível determinar a).

4.2 O Modelo Matemático

Segundo [18], é possível provar que a função F definida em (4.2) é continuamente Fréchet diferenciável com $F'(a) : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ e $F'(a)^* : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ definidas por

$$F'(a)h = A(a)^{-1} [hu'_a]' \quad (4.5)$$

e

$$F'(a)^*w = B^{-1} \left[u'_a \left(A(a)^{-1} w \right)' \right] \quad (4.6)$$

onde

$$\begin{aligned} A(a) : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) &\rightarrow L^2(\Omega) \\ u &\mapsto -(au')' \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B : D(B) &\rightarrow L^2(\Omega) \\ \psi &\mapsto -\psi'' + \psi \end{aligned}$$

com $D(B) := \{\psi \in H^2(\Omega) : \psi'(0) = \psi'(1) = 0\}$. Ainda segundo [18], o operador F satisfaz, para quaisquer $a, \tilde{a} \in D(F)$,

$$\begin{aligned} \|F(\tilde{a}) - F(a) - F'(a)(\tilde{a} - a)\|_{L^2} &\leq \underline{a}^{-1} \left(1 + \sqrt{2} + \underline{a}^{-1} \sqrt{2} \|a\|_{H^1} \right) \\ &\quad \|\tilde{a} - a\|_{H^1} \|F(\tilde{a}) - F(a)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Logo, a condição do cone tangencial

$$\|E(\tilde{a}, a)\|_{L^2} \leq \omega \|F(\tilde{a}) - F(a)\|_{L^2} \quad (4.7)$$

é satisfeita com $\omega := \underline{a}^{-1} (1 + \sqrt{2} + \underline{a}^{-1} \sqrt{2} \|a\|_{H^1}) \|\tilde{a} - a\|_{H^1} < 1$ se as normas $\|\tilde{a} - a\|_{H^1}$ e $\|a\|_{H^1}$ forem suficientemente pequenas.

4.3 Descrição do Algoritmo

Vamos utilizar o algoritmo REGINN (apresentado no capítulo 2) com a iteração interna utilizando o método de Landweber (apresentado na seção 1.2) para resolver o problema mal posto (4.3), supondo disponível uma função u^δ satisfazendo $\|u^\delta - u\|_{L^2} \leq \delta$. Usamos o programa MatLab para esse fim. Para escolher a sequência (μ_n) , vamos usar uma estratégia a posteriori a partir do lema 13. A constante τ utilizada no princípio da discrepância é também escolhida através desse lema. Assim, devemos ter $\mu_n \in \left(\omega + \frac{(1+\omega)\delta}{a_n}, 1\right]$ e $\tau \geq \frac{1+\omega}{1-\omega}$.

Na iteração interna devemos aplicar a iteração de Landweber na equação linearizada $A_n s_{n,m} = b_n^\delta$ (aqui, $a_0^\delta := a_0$ é uma aproximação inicial para a função a procurada, $A_n := F'(a_n^\delta)$ e $b_n^\delta := u^\delta - F(a_n^\delta)$). Procedemos então com a iteração interna $s_{n,m+1} := s_{n,m} - A_n^* (A_n s_{n,m} - b_n^\delta)$ a partir de $s_{n,0} = 0$ até obtermos o primeiro índice $m_n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $\|A_n s_{n,m_n} - b_n^\delta\| < \mu_n \|b_n^\delta\|$.

Para calcular b_n^δ , precisamos calcular $F(a_n^\delta)$, e isso corresponde a resolver o problema direto de encontrar u na equação diferencial (4.4), onde a função a deve ser substituída por a_n^δ . Para resolver esse problema, implementamos um programa auxiliar, chamado de *rotina1*. Para a implementação desse programa, usamos uma malha com j pontos igualmente espaçados e utilizamos o método das diferenças finitas centradas (veja [5] para detalhes sobre esse método). Esse programa utiliza como dados de entrada as funções a e f aplicadas nos pontos da malha e retorna a função u , solução de (4.4), também aplicada nos pontos da malha. Para o cálculo de $A_n s_{n,m}$ utilizamos a igualdade (4.5). Tomando $K := A_n s_{n,m} = A(a_n^\delta)^{-1} [s_{n,m} u'_{a_n^\delta}]'$ teremos $A(a_n^\delta) K = [s_{n,m} u'_{a_n^\delta}]'$. Portanto, para determinar a função K , devemos aplicar a definição do operador A , resultando no problema de valor

de fronteira (PVF)

$$\begin{cases} -(a_n^\delta K')' = [s_{n,m} u'_{a_n^\delta}]' \\ K(0) = K(1) = 0. \end{cases}$$

O programa utilizado para encontrar a função K no PVF acima foi chamado de *rotina2*. Mais uma vez utilizamos o método das diferenças finitas centradas com uma malha igualmente espaçada de j pontos para esse propósito. O programa recebe como dados de entrada as funções a_n^δ e $u_{a_n^\delta}$ avaliados nos pontos da malha, juntamente com o vetor $s_{n,m}$ e retorna a função K avaliada nos mesmos pontos.

Por fim, para o cálculo de

$$z := A_n^* (A_n s_{n,m} - b_n^\delta) = A_n^* (K - (u^\delta - F(a_n^\delta))),$$

definimos $w := K - (u^\delta - F(a_n^\delta))$ e utilizamos a equação (4.6).

$$\begin{aligned} z &= A_n^* w = B^{-1} \left[u'_{a_n^\delta} \left(A(a_n^\delta)^{-1} w \right)' \right] \iff \\ Bz &= u'_{a_n^\delta} \left(A(a_n^\delta)^{-1} w \right)'. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Inicialmente tomamos $c = A(a_n^\delta)^{-1} w$ e assim, $A(a_n^\delta) c = w$. Utilizando a definição de A , vemos que

$$\begin{cases} -(a_n^\delta c')' = w \\ c(0) = c(1) = 0. \end{cases}$$

Logo, para determinarmos a função c aplicada nos pontos da malha, podemos usar o programa *rotina1* com w no lugar de f . Após a determinação de c , retornamos para a equação (4.8) :

$$Bz = u'_{a_n^\delta} \left(A(a_n^\delta)^{-1} w \right)' = u'_{a_n^\delta} c'$$

e usando a definição do operador B , devemos encontrar z na equação diferencial

$$\begin{cases} -z'' + z = u'_{a_n^\delta} c' \\ z'(0) = z'(1) = 0. \end{cases}$$

Para a determinação de z , implementamos o programa *rotina3* o qual utiliza novamente diferenças finitas centradas com uma partição homogênea de j pontos. Este programa recebe como dados de entrada as funções $u_{a_n^\delta}$ e c avaliadas nos pontos da malha e retorna a função z , também avaliada nos pontos da malha.

O algoritmo a seguir esquematiza o funcionamento do REGINN com as ideias expostas acima. Os dados de entrada são: a_0 (aproximação inicial para a função a), nível de ruídos $\delta > 0$, u^δ (aproximação para a função u), constante $\omega < 1$ (presente na condição do cone tangencial (4.7)) e a função f que aparece na equação diferencial (4.4).

Algoritmo 6 *Reginn*($a_0; \delta; u^\delta; \omega; f$)

```

 $n := 0;$ 
 $a_0^\delta := a_0;$ 
 $F(a_0^\delta) := rotina1(a_0^\delta; f);$ 
 $b_0^\delta := u^\delta - F(a_0^\delta);$ 
 $\tau := \frac{1+\omega}{1-\omega};$ 
 $Enquanto \ ||b_n^\delta|| > \tau\delta$ 
     $m := 0;$ 
     $s_{n,m} := 0;$ 
     $K := rotina2(a_n^\delta; s_{n,m}; u^\delta);$ 
     $w := K - b_n^\delta;$ 
     $\mu_n := \left(\omega + \frac{(1+\omega)\delta}{||b_n^\delta||}\right) \cdot 0.99 + 0,01;$ 
     $Enquanto \ ||w|| \geq \mu_n ||b_n^\delta||$ 
         $c := rotina1(a_n^\delta; w);$ 
         $z := rotina3(u^\delta; c);$ 
         $s_{n,m+1} := s_{n,m} - z;$ 
         $K := rotina2(a_n^\delta; s_{n,m+1}; u^\delta);$ 
         $w := K - b_n^\delta;$ 
         $m := m + 1;$ 
     $Fin$ 
     $a_{n+1}^\delta := a_n^\delta + s_{n,m};$ 
     $n := n + 1;$ 
     $F(a_n^\delta) := rotina1(a_n^\delta; f);$ 
     $b_n^\delta := u^\delta - F(a_n^\delta);$ 
 $Fin$ 
 $a_{N(\delta)}^\delta := a_n^\delta.$ 

```

Repare que $\mu_n := \left(\omega + \frac{(1+\omega)\delta}{\|b_n^\delta\|} \right) \cdot 0.99 + 0,01 \in \left(\omega + \frac{(1+\omega)\delta}{\|b_n^\delta\|}, 1 \right]$ é atualizado em cada passo externo n . Repare ainda que μ_n é escolhido de modo a ficar próximo de seu limite inferior².

4.4 Exemplos Numéricos

Nesta seção apresentaremos dois exemplos numéricos obtidos através da execução do algoritmo descrito na seção anterior.

No primeiro exemplo testamos os resultados teóricos de monotonia e convergência do REGINN. No segundo exemplo, testamos as propriedades de regularização e as taxas de convergência.

4.4.1 Primeiro Exemplo

Para testar o programa, utilizamos as funções exatas $a^+(x) = 1 + x^2$ e $f(x) = 4\pi [\pi(1 + x^2) \sin(2\pi x) - x \cos(2\pi x)]$. A solução correspondente da equação (4.4) é $u(x) = \sin(2\pi x)$. A função procurada a^+ foi então substituída por uma aproximação inicial $a_0(x) \equiv 1$. Utilizamos uma malha com $j = 51$ pontos. A função u foi calculada exatamente nesses pontos e os ruídos foram inseridos de maneira artificial com o seguinte procedimento: foi gerado um vetor aleatório d com 51 pontos e em seguida tomamos $u^\delta = u + \frac{d}{\|d\|} \delta$, com um nível de ruídos $\delta > 0$ pré-determinado. Desse modo, $\|u^\delta - u\| = \delta$.

Observação 14 *Para a implementação desse algoritmo, utilizamos a norma $\|\cdot\|_h := \sqrt{h} \|\cdot\|$, onde $h := \frac{1}{j-1}$ representa o tamanho do passo na malha e $\|\cdot\|$ é a norma padrão no $\mathbb{R}^j$. Essa norma é utilizada para aproximar a norma no espaço $L^2(\Omega)$. Para facilitar a notação, utilizaremos simplesmente $\|\cdot\|$ ao invés de $\|\cdot\|_h$.*

Supondo que o operador F definido em (4.2) satisfaz a equação do cone tangencial (4.7) nas proximidades da solução com $\omega \leq \frac{1}{2}$, obtemos com a execução do algoritmo os resultados apresentados na tabela a seguir. A coluna n representa o número de iterações externas e m_n representa o número de iterações internas na n -ésima iteração externa. A terceira coluna mede a norma do resíduo $\|b_n^\delta\| = \|u^\delta - F(a_n^\delta)\|$,

²Veja a observação 13 após o corolário 18.

a quarta coluna corresponde a razão $\frac{\|b_n^\delta\|}{\|b_{n+1}^\delta\|}$, μ_n está apresentado na quinta coluna e na última coluna é apresentada a norma do erro na n -ésima iteração $\|e_n\| = \|a^+ - a_n^\delta\|$. Utilizamos um nível de ruídos $\delta = 10^{-4}$.

n	m_n	$\ b_n^\delta\ $	$\ b_n^\delta\ / \ b_{n+1}^\delta\ $	μ_n	$\ e_n\ $
0	0	0.414981	---	---	0.458403
1	4	0.156008	0.375940	0.505358	0.201147
2	11	0.076013	0.487239	0.505952	0.122547
3	12	0.037185	0.489196	0.506954	0.091234
4	19	0.018374	0.494120	0.508994	0.078449
5	465	0.009309	0.506642	0.513082	0.052938
6	785	0.004810	0.516660	0.520952	0.033941
7	1915	0.002557	0.531597	0.535876	0.023892
8	7392	0.001437	0.561843	0.563081	0.014895
9	7533	0.000872	0.607231	0.608376	0.010497
10	7894	0.000588	0.673947	0.675241	0.008502
11	9354	0.000445	0.756504	0.757603	0.007537
12	12676	0.000373	0.838218	0.838908	0.007000
13	13809	0.000337	0.903039	0.903355	0.006685
14	9990	0.000318	0.945993	0.946127	0.006513
15	5865	0.000309	0.971248	0.971311	0.006424
16	3172	0.000305	0.985084	0.985115	0.006377
17	1655	0.000302	0.992367	0.992385	0.006354
18	848	0.000301	0.996125	0.996134	0.006342
19	431	0.000301	0.998040	0.998004	0.006336
20	218	0.000300	0.999011	0.999013	0.006333
21	111	0.000300	0.999497	0.999502	0.006332
22	56	0.000300	0.999746	0.999751	0.006331
23	28	0.000300	0.999873	0.999876	0.006331
24	14	0.000300	0.999937	0.999939	0.006330
25	7	0.000300	0.999968	0.999970	0.006330
26	4	0.000300	0.999982	0.999986	0.006330
27	2	0.000300	0.999991	0.999995	0.006330
28	1	0.000300	0.999995	1.000000	0.006330

Tabela 4.1: REGINN com iteração interna de Landweber. Nível de ruídos: $\delta=10^{-4}$

Observe que a norma do resíduo, apresentado na terceira coluna é estritamente decrescente (basta observar que a taxa de resíduo apresentada na quarta coluna é sempre menor que 1), conforme resultado do teorema 5. Observe também que o mesmo acontece com a norma do erro e_n , apresentado na última coluna (nas últimas iterações externas, a diminuição ocorre após a sexta casa decimal), conforme resultado do teorema 6. Note ainda que a taxa de resíduo $\frac{\|b_n^\delta\|}{\|b_{n+1}^\delta\|}$ (quarta coluna), se aproxima do número μ_n quando n é grande, conforme observação 13 feita imediatamente após ao corolário 18. Note porém, que conforme n aumenta, a norma do resíduo (terceira coluna) diminui, de modo que o intervalo $\left(\omega + \frac{(1+\omega)\delta}{\|b_n^\delta\|}, 1\right]$ se torna cada vez menor e somos forçados a escolher os termos μ_n cada vez mais próximos de 1.

4.4.2 Segundo Exemplo

O programa também foi testado utilizando as funções exatas $a^+(x) = 1 + x^2$ e $f(x) = -6x^2 + 2x - 2$, sendo que a solução de (4.4) nesse caso é dada por $u(x) = x^2 - x$. A figura 4.1 apresenta o gráfico da solução exata a^+ e das soluções $a_{N(\delta)}^\delta$ encontradas para os diferentes níveis de ruído $\delta = 10^{-r}$ com $r = 2, 3, 4$ e para a aproximação inicial $a_0 \equiv 1$. Podemos observar que $a_{N(\delta)}^\delta$ se aproxima de a^+ conforme o nível de ruído $\delta > 0$ diminui. Esse comportamento é certamente esperado do algoritmo, uma vez que este possui a propriedade de regularização (1.6), conforme teoremas 9 e 19.

Condições de Fonte

Observe que se tomarmos $\lambda = 1$ no teorema 19, então assumindo a condição de fonte

$$a^+ - a_0 \in R\left((A^*A)^{\frac{1}{2}}\right), \quad (4.9)$$

podemos esperar a taxa de convergência

$$\left\|a^+ - a_{N(\delta)}^\delta\right\| = O\left(\delta^{\frac{1-\lambda_{\min}}{2}}\right) \text{ quando } \delta \longrightarrow 0, \quad (4.10)$$

onde $\lambda_{\min}$ é definido em (2.75), subseção 2.3. Repare que devido a condição (2.42), $R\left((A^*A)^{\frac{1}{2}}\right) = R(A^*) = R(F'(a^+)^*)$. Usando então

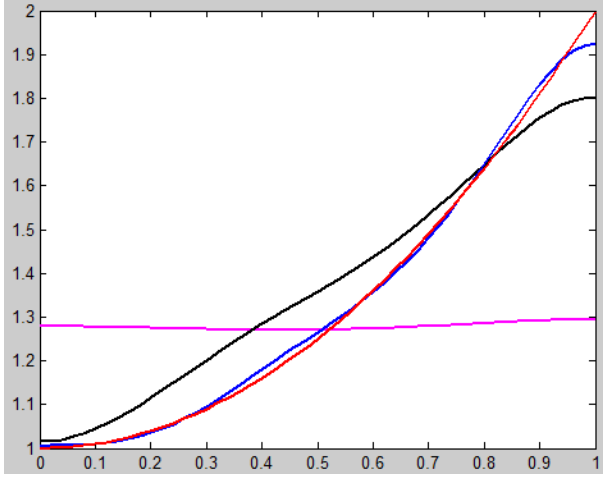


Figura 4.1: Solução encontrada $a_{N(\delta)}^\delta$ para diversos níveis de ruído e com $a_0 \equiv 1$. Linha rosa: $\delta = 10^{-2}$, linha preta: $\delta = 10^{-3}$, linha azul: $\delta = 10^{-4}$, linha vermelha: solução exata.

(4.9) na forma $a^+ - a_0 = A^*w$ e a igualdade (4.6) obtemos

$$\begin{aligned} a^+ - a_0 &= B^{-1} \left[u'_{a^+} \left(A(a^+)^{-1} w \right)' \right] \Longleftrightarrow \\ B(a^+ - a_0) &= u'_{a^+} \left(A(a^+)^{-1} w \right)'. \end{aligned}$$

Usando a definição de B , obtemos que $(a^+ - a_0)'(0) = (a^+ - a_0)'(1) = 0$ e além disso,

$$z := \frac{(a^+ - a_0)'' - (a^+ - a_0)}{u'_{a^+}} = \left(A(a^+)^{-1} w \right)'.$$

Como $A(a^+)^{-1} w \in D(A(a^+)) \subset H^2(\Omega)$, segue que $z = \left(A(a^+)^{-1} w \right)' \in H^1(\Omega)$. Ainda,

$$\int_0^1 z(s) ds = \int_0^1 \left(A(a^+)^{-1} w(s) \right)' ds = A(a^+)^{-1} w(s) \Big|_0^1 = 0$$

porque $A(a^+)^{-1}w \in D(A(a^+)) \subset H_0^1(\Omega)$. Por fim, de $z \in H^1(\Omega)$ decorre que $(a^+ - a_0) \in H^3(\Omega)$ e portanto, para esperar a taxa de convergência (4.10) acima, precisamos ter as informações a priori

$$\begin{aligned} a^+ - a_0 &\in H^3(\Omega), \\ z &\in H^1(\Omega), \\ \int_0^1 z(s) ds &= 0, \\ (a^+ - a_0)'(0) &= (a^+ - a_0)'(1) = 0. \end{aligned}$$

Para estudar os dados teóricos relativos a taxas de convergência, vamos determinar um vetor a_0 satisfazendo as condições acima. Para isso, vamos escolher $z(x) := 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1$. Então $z \in H^1(\Omega)$ e $\int_0^1 z(s) ds = 0$. Definimos agora $p(x) := (a^+ - a_0)(x)$. Desse modo, pela definição de z , precisamos determinar uma função p que satisfaça

$$\begin{cases} -p'' + p = u'_{a^+} z \\ p'(0) = p'(1) = 0. \end{cases}$$

Para o nosso problema, $u_{a^+} = u = x^2 - x$ e podemos portanto encontrar p aplicando o programa *rotina3* com os dados de entrada $u(x)$ e $c(x) := \int_0^x z(s) ds = x^4 + x^3 - x^2 - x + k$, onde k é uma constante qualquer. Assim, $p \in R(A^*)$ e $\alpha p \in R(A^*)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Agora, $a_0 = a^+ - p$, ou fazendo-se uma pequena alteração conveniente, podemos tomar $a_0 = a^+ - \alpha \frac{p}{\|p\|}$ (nesse caso, $a^+ - a_0 = \alpha \frac{p}{\|p\|} \in R(A^*)$ e mantemos a notação de a_0 apenas por comodidade), onde como antes, $a^+(x) = 1 + x^2$. Procedendo dessa maneira, teremos todas as condições necessárias satisfeitas e além disso, $\|a^+ - a_0\| = \alpha$, o que permite controlar a distância entre os vetores a^+ e a_0 .

Para fins de comparação, apresentamos na figura 4.2 novamente o gráfico da solução exata a^+ e das soluções $a_{N(\delta)}^\delta$ encontradas para os diferentes níveis de ruído $\delta = 10^{-r}$ com $r = 2, 3, 4$, mas utilizando agora a aproximação inicial a_0 descrita acima. Perceba que se $a \equiv 1$,

então,

$$\begin{aligned} \|a^+ - a\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |a^+ - a|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^1 |1 + x^2 - 1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Tomamos então $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, o que resulta em $\|a^+ - a\|_{L^2(\Omega)} = \|a^+ - a_0\|_{L^2(\Omega)}$ e nos permite comparar a_0 e a . Compare as figuras 4.1 e 4.2.

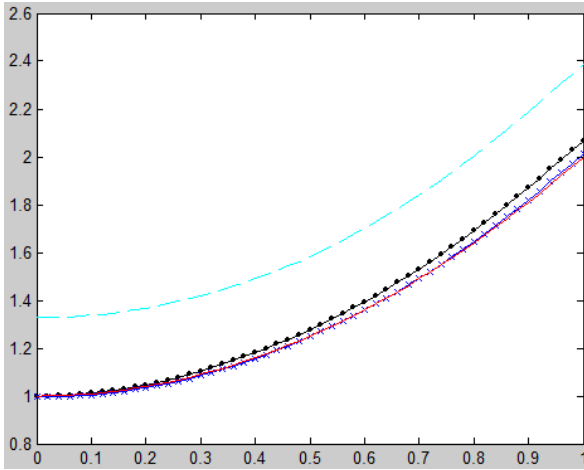


Figura 4.2: Solução encontrada $a_{N(\delta)}^\delta$ para diversos níveis de ruído e com a_0 satisfazendo $a^+ - a_0 \in R(A^*)$. Linha -- azul clara: $\delta = 10^{-2}$, linha -. preta: $\delta = 10^{-3}$, linha -x azul escura: $\delta = 10^{-4}$, linha contínua vermelha: solução exata.

Na figura 4.3, escolhemos $\alpha = 1$. O gráfico apresentado nessa figura mostra o nível de ruídos δ versus o erro relativo $\frac{\|a^+ - a_{N(\delta)}^\delta\|}{\|a^+\|}$ e está plotado com os dois eixos na escala logarítmica. Podemos perceber (nesta escala) um comportamento linear da função com uma inclinação próxima a $\frac{1}{2}$ quando δ é pequeno. Esse comportamento é previsto pelo teorema 19, equação (4.10), a qual indica que a inclinação esperada nessas condições deve ser $\frac{1-\lambda_{\min}}{2}$, para algum $\lambda_{\min} < 1$.

As tabelas a seguir, mostram o número total de iterações in-

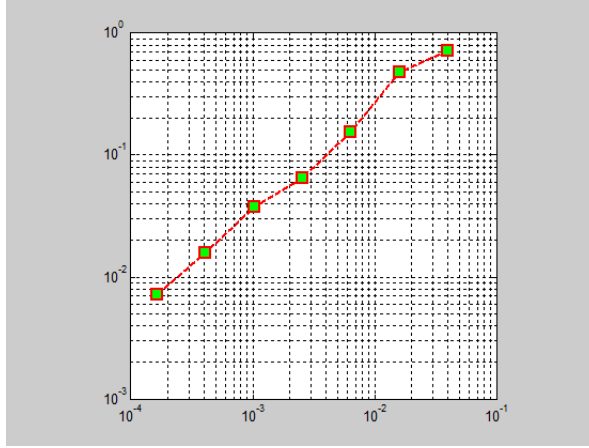


Figura 4.3: Nível de ruídos δ versus erro relativo $\frac{\|a^+ - a_{N(\delta)}\|}{\|a^+\|}$ plotados na escala logaritmica.

ternas $I := \sum_{n=0}^{N(\delta)-1} m_n$ e externas $N(\delta)$, comparados ao nível de ruídos δ . Esses dados são relevantes para observarmos o esforço computacional envolvido. Utilizamos duas aproximações iniciais diferentes: a_0 , conforme descrita logo acima (satisfazendo (4.9)) e com $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ na primeira, e a aproximação inicial $a \equiv 1$ na segunda. Então, conforme já argumentado, $\|a^+ - a\|_{L^2(\Omega)} = \|a^+ - a_0\|_{L^2(\Omega)}$ de modo que a e a_0 se tornam comparáveis.

δ	$N(\delta)$	I
10^{-1}	0	0
10^{-2}	11	156
10^{-3}	15	376
10^{-4}	22	8100
10^{-5}	29	89115
10^{-6}	36	713743

δ	$N(\delta)$	I
10^{-1}	0	0
10^{-2}	5	36
10^{-3}	17	7578
10^{-4}	26	130011
10^{-5}	35	$8 \cdot 10^6$
10^{-6}	> 50	$> 10^8$

Tabela 4.2: δ versus número total de iterações externas e internas

Perceba que em ambos os casos $N(\delta)$ aumenta a medida que δ diminui (veja a equação (2.67) e (1.5)), evidenciando o comportamento $N(\delta) \rightarrow \infty$ quando $\delta \rightarrow 0$. Também em ambos os casos, I

aumenta quando δ diminui (o que é razoável, uma vez que δ menor exige que um número maior de iterações externas e por consequência, um número total de iterações internas também maior). Note que a taxa de convergência (4.10) não é assegurada no segundo caso, uma vez que a aproximação inicial não satisfaz a condição de fonte (4.9). Sem isso, a convergência para o segundo caso pode ser arbitrariamente lenta. Esse comportamento se torna evidente na comparação entre as duas tabelas, onde podemos verificar que o número total de iterações externas e principalmente internas, é consideravelmente menor (para δ pequeno), quando o vetor inicial satisfaz (4.9).

Observação 15 *Quando consideramos um nível de ruídos muito pequeno (de $\delta = 10^{-6}$ por exemplo), os erros de arredondamento passam a ter uma relevância maior do que os próprios ruídos e nesse caso, podemos considerar que estamos trabalhando com dados exatos, isto é, $x_n^\delta = x_n$.*

Observação 16 *Em problemas práticos a função a^+ é desconhecida e procurada, por isso não podemos aplicar um raciocínio semelhante ao exposto acima para determinar a_0 satisfazendo (4.9). Observe porém, que se pudermos assumir a condição de suavidade*

$$a^+ \in R\left((A^*A)^{\frac{1}{2}}\right)$$

*sobre a solução, então podemos iniciar a iteração do REGINN com a função suave $a_0 \in R\left((A^*A)^{\frac{1}{2}}\right)$ e teremos então que a condição (4.9) será satisfeita.*

Conclusões e Considerações Finais

Nessa dissertação foram estudados dois algoritmos do tipo Newton inexatos, usados para a obtenção de soluções estáveis de problemas inversos mal postos. Foram analisadas as propriedades de convergência e estabilidade e taxas de convergência foram obtidas mediante a hipótese de condições de fonte.

A computação exata do vetor h_n no sistema linear (1.18) é inalcançável em situações reais. O IRGN inexato, apresentado no capítulo 3, é portanto um algoritmo mais condizente com a realidade. Uma vez que as taxas de convergência para esse algoritmo (veja o teorema 26 e o comentário imediatamente a seguir) são as mesmas apresentadas pelo próprio IRGN (equação (1.22)), podemos perceber que a sua aplicação não traz prejuízos ao desempenho deste algoritmo.

Os resultados apresentados no capítulo 3 e em particular no teorema 26, mostram que é possível obter taxas de convergência para o IRGN inexato a partir de condições de fonte mais gerais (3.2) do que as condições do tipo Hölder (1.21) comumente utilizadas. O estudo dessas condições de fonte gerais é uma ferramenta importante que inclui as tradicionais condições de fonte do tipo Hölder como um caso particular. Para problemas *exponencialmente mal postos*, a hipótese de que a solução satisfaz uma condição de fonte do tipo Hölder é muito restritiva, no sentido de que essa condição implica numa regularidade muito elevada para a solução do problema [17]. Muitas vezes, a solução deste tipo de problema não satisfaz essas condições de fonte (do tipo Hölder) e nesse caso, a exigência de que a solução satisfaz condições de fonte do tipo logaritmica, são mais apropriadas e possuem uma inter-

pretação física mais natural.

O algoritmo REGINN, apresentado no capítulo 2, oferece resultados teóricos bastante interessantes (veja os teoremas 6, 9 e 19) para se lidar com problemas mal postos. Infelizmente ainda não existem resultados relativos a taxas de convergência para a abordagem mais geral estudada nas seções 2.1 e 2.2. Na seção 2.3, taxas de convergência foram obtidas (veja o teorema 19) mas nesse caso, foi preciso restringir a iteração interna a uma técnica de regularização linear. Taxas de convergência são resultados normalmente difíceis de ser obtidos e no desenvolvimento feito na seção 2.3, foi preciso utilizar explicitamente a fórmula da iteração interna (veja os lemas 15 e 16) do algoritmo para se obter o resultado desejado. O desafio que se apresenta nesse momento, é portanto, obter condições suficientes para a demonstração de taxas de convergência no contexto mais geral apresentado nas duas primeiras seções do capítulo 2.

Os resultados numéricos obtidos no capítulo 4 oferecem suporte e comprovam em parte a teoria apresentada no capítulo 2. Com esses resultados foi possível comprovarmos a importante propriedade de regularização (1.6) (veja os teoremas 9 e 19 e as figuras 4.1 e 4.2) e também as taxas de convergência apresentadas na teoria através do teorema 19 (veja a figura 4.3). Os resultados de monotonia do resíduo e do erro, apresentados nos teoremas 5 e 6, também foram verificados numericamente através da tabela 4.1.

De uma maneira geral, o trabalho foi bastante direcionado a obtenção de resultados teóricos. Uma nova implementação do algoritmo com outros métodos de regularização na iteração interna, além de sua aplicação num problema de dimensão maior, seriam ideias interessantes num trabalho futuro para se verificar numericamente todos esses resultados.

A estratégia de escolha da sequência (μ_n) que foi utilizada nesse trabalho para a implementação numérica do REGINN, possui algumas desvantagens. A mais evidente delas é a necessidade do conhecimento da constante ω , presente na condição do cone tangencial (2.7). O comportamento do número de iterações internas (crescente e depois decrescente) do algoritmo, evidenciado na segunda coluna da primeira tabela do capítulo 4, também deve ser mencionado. Esse comportamento foi verificado em todos os testes numéricos executados, inclusive naqueles

que não foram adicionados a esse trabalho. Existem estudos motivados por esse comportamento que sugerem estratégias diferentes para a escolha da sequência (μ_n) na tentativa de melhorar a uniformidade do número de iterações internas e acelerar o algoritmo. Esse estudo é apresentado no artigo [31], onde o autor diminui o parâmetro μ_n quando o número de iterações internas diminui de um passo para outro, forçando mais iterações internas e aumenta esse parâmetro quando o número de iterações internas aumenta de um passo para outro. Essa estratégia mostrou-se bastante satisfatória, diminuindo consideravelmente o esforço computacional envolvido. Uma sugestão seria verificar cuidadosamente a convergência do algoritmo com essa nova regra de escolha da sequência (μ_n) , que em particular independe do conhecimento da constante ω .

Os métodos do tipo Newton inexatos apresentados nesse trabalho representam uma alternativa bastante atraente para a resolução de problemas inversos não lineares e mal postos. No artigo [23] por exemplo, os autores aplicaram o REGINN com a iteração interna usando o método do gradiente conjugado ao problema da tomografia por impedância e obtiveram resultados bastante satisfatórios, o que demonstra a importância desse algoritmo e motiva futuros estudos nessa área.

Apêndice A

Análise Funcional

No decorrer do trabalho são necessários com bastante frequência, resultados relativos a teoria espectral de operadores lineares limitados e auto-adjuntos. Por este motivo, enunciaremos (sem demonstração¹) alguns teoremas sobre seus principais resultados.

Teorema 28 *Seja H um espaço de Hilbert complexo e considere o operador linear, limitado e auto-adjunto $T : H \longrightarrow H$. Então:*

(a) *O espectro de T ($\sigma(T)$) está contido no intervalo $[m, M]$ onde $m := \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$ e $M := \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$;*

(b) $\|T\| = \max\{|m|, |M|\} = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|$;

(c) *Se $H \neq \{0\}$ então $m, M \in \sigma(T)$;*

(d) $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$, para qualquer $x \in H$;

(e) *Se T é positivo (isto é, se $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in H$), então T possui uma única raiz quadrada positiva, isto é, existe único operador $W : H \longrightarrow H$ linear, limitado, auto-adjunto e positivo tal que $W^2 = T$. Nesse caso, denotamos $T^{\frac{1}{2}} := W$;*

(f) *Seja $T_\lambda := T - \lambda I$. Então T_λ^2 é linear, limitado, auto-adjunto e positivo.*

Definimos o módulo de T_λ por

$$|T_\lambda| := (T_\lambda^2)^{\frac{1}{2}}$$

¹Os resultados foram coletados na referência [21, capítulo 9].

e a parte positiva de T_λ por

$$T_\lambda^+ := \frac{1}{2} (|T_\lambda| + T_\lambda).$$

Definição 4 *Sejam H um espaço de Hilbert complexo, $P : H \longrightarrow H$ um operador linear e limitado e $P^* : H \longrightarrow H$ a adjunta de P . Dizemos que o operador P é uma projeção se P é auto-adjunto ($P^* = P$) e idempotente ($P^2 = P$).*

Sejam $A, B : H \longrightarrow H$ operadores lineares, limitados e auto-adjuntos. Dizemos que $A \leq B$ se $\langle Ax, x \rangle \leq \langle Bx, x \rangle$ para qualquer $x \in H$.

Se $P : H \longrightarrow H$ é uma projeção então $0 \leq P \leq I$, onde $0 : H \longrightarrow H$ é o operador nulo e $I : H \longrightarrow H$ é o operador identidade.

Definição 5 *Uma família de projeções $\xi = (E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ com $E_\lambda : H \longrightarrow H$ é uma família espectral real se:*

- (i) $\lambda < \mu \implies E_\lambda \leq E_\mu$;
- (ii) $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_\lambda x = 0$ e $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_\lambda x = x$, para todo $x \in H$;
- (iii) $\lim_{\mu \rightarrow \lambda^+} E_\mu x = E_\lambda x$, para todo $x \in H$.

ξ é chamado de família espectral real no intervalo $[a, b]$ se (ii) for substituído por

- (iv) $E_\lambda = 0$ para $\lambda < a$ e $E_\lambda = I$ para $\lambda \geq b$.

Teorema 29 *Seja $T : H \longrightarrow H$ linear, limitado e auto-adjunto no espaço de Hilbert complexo H . Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ considere $E_\lambda : H \longrightarrow H$ a projeção de H sobre o espaço nulo $N(T_\lambda^+) := \{x \in H : T_\lambda^+(x) = 0\}$. Então $\xi = (E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ é uma família espectral real para o intervalo $[m, M] \subset \mathbb{R}$. ξ é chamado de família espectral do operador T .*

Observação 17 *Considere T e $\xi = (E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ como no teorema acima. Então é possível mostrar que*

$$T = \int_{m^-}^M \lambda dE_\lambda := \lim_{b \rightarrow m^-} \int_b^M \lambda dE_\lambda. \quad (\text{A.1})$$

Seja

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

um polinômio. Definimos o operador $p(T) : H \longrightarrow H$ da seguinte maneira:

$$p(T) = a_n T^n + \dots + a_1 T + a_0 I.$$

Então $p(T)$ é linear, limitado e auto-adjunto e usando (A.1) acima,

$$p(T) = \int_{m^-}^M p(\lambda) dE_\lambda.$$

Agora, seja $f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Pelo teorema da aproximação de Weierstrass (veja [21, seção 4.11-5]), existe uma sequência de polinômios (p_n) com $p_n : [m, M] \longrightarrow \mathbb{R}$ e com coeficientes reais tal que $p_n(\lambda) \longrightarrow f(\lambda)$ uniformemente em $[m, M]$. Usando isso, podemos provar que existe um operador linear e limitado $W : H \longrightarrow H$ tal que $p_n(T) \longrightarrow W$ no espaço $B(H)$ das funções lineares e contínuas de H em H . Ainda, se $(\tilde{p}_n)$ é outra sequência de polinômios tal que $\tilde{p}_n(\lambda) \longrightarrow f(\lambda)$ uniformemente em $[m, M]$, então também $\tilde{p}_n(T) \longrightarrow W$ no espaço $B(H)$. Desse modo, W depende apenas de f e independe da sequência de polinômios escolhida. Portanto, podemos definir $f(T) := W$ sem problemas de ambiguidade. Assim,

$$\begin{aligned} p_n(\lambda) &\longrightarrow f(\lambda) \text{ uniformemente em } [m, M] \implies \\ p_n(T) &\longrightarrow f(T) = W \text{ no espaço } B(H). \end{aligned}$$

O operador $W : H \longrightarrow H$ introduzido acima é dado por $W = \int_{m^-}^M f(\lambda) dE_\lambda$. Ou seja,

$$\begin{aligned} p_n(\lambda) &\longrightarrow f(\lambda) \text{ uniformemente em } [m, M] \implies \\ p_n(T) &= \int_{m^-}^M p_n(\lambda) dE_\lambda \longrightarrow \int_{m^-}^M f(\lambda) dE_\lambda = f(T), \end{aligned}$$

conforme resultado do próximo teorema.

Teorema 30 *Suponha que $T : H \longrightarrow H$ seja um operador linear, limitado e auto adjunto no espaço de Hilbert complexo H . Sejam $f, f_1 : [m, M] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas. então*

- (a) $f(T)$ é linear, limitado e auto-adjunto;
- (b) $f(\lambda) \leq f_1(\lambda), \forall \lambda \in [m, M] \implies f(T) \leq f_1(T)$;
- (c) $\|f(T)\| \leq \max_{\lambda \in [m, M]} |f(\lambda)|$
- (d) Teorema espectral:

$$f(T) = \int_{m^-}^M f(\lambda) dE_\lambda, \quad (\text{A.2})$$

onde $\xi = (E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ é a família espectral do operador T . A integral deve ser entendida no sentido de convergência na norma do operador. Ainda vale $\forall x, y \in H$:

$$\langle f(T)x, y \rangle = \int_{m^-}^M f(\lambda) dw(\lambda), \quad w(\lambda) := \langle E_\lambda x, y \rangle,$$

onde as integrais acima são integrais ordinárias de Riemann-Stieltjes (veja [21, seção 4.4]).

Observação 18 O teorema 30 acima pode ser estendido para funções $f, f_1 : [m, M] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas por partes². Nesse caso, utilizamos a integral de Lebesgue ao invés da integral de Riemann. Se $f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua por partes, possivelmente não existirá uma sequência de polinômios convergindo uniformemente a f no intervalo $[m, M]$ e então não podemos aplicar o raciocínio usado na observação 17 acima. No entanto, é possível encontrar uma sequência de polinômios (limitada por uma função Lebesgue-integrável) convergindo pontualmente para a função f em $[m, M]$. Isso é suficiente para garantir que a sequência das integrais desses polinômios (que são funções contínuas) converge para um operador linear, limitado e auto-adjunto $W : H \longrightarrow H$ em $B(H)$. Além disso, o operador limite independe da sequência de polinômios e depende somente de f . Dessa maneira,

$$\begin{aligned} p_n(\lambda) &\longrightarrow f(\lambda) \text{ pontualmente em } [m, M] \implies \\ p_n(T) &= \int_{m^-}^M p(\lambda) dE_\lambda \longrightarrow W \text{ no espaço } B(H). \end{aligned}$$

²Consulte a referencia [12] para maiores detalhes.

Novamente, podemos definir sem problemas de ambiguidade o operador $f(T) := W$. Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue (veja [8]) é possível provar que

$$\int_{m^-}^M p(\lambda) dE_\lambda \longrightarrow \int_{m^-}^M f(\lambda) dE_\lambda,$$

ou seja, $f(T) = W = \int_{m^-}^M f(\lambda) dE_\lambda$. Daí,

$$\begin{aligned} p_n(\lambda) &\longrightarrow f(\lambda) \text{ pontualmente em } [m, M] \implies \\ p_n(T) &= \int_{m^-}^M p(\lambda) dE_\lambda \longrightarrow \int_{m^-}^M f(\lambda) dE_\lambda = f(T). \end{aligned}$$

Apêndice B

Estimativas Relevantes

Os teoremas a seguir são enunciados no trabalho nas subseções 2.3 e 3.2 mas as suas demonstrações foram omitidas por serem demasiadamente técnicas. Por esse motivo, as apresentamos nesse apêndice.

Lema 31 (Desigualdade de Interpolação) *Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $0 < r \leq q$ então*

$$\|(T^*T)^r x\| \leq \|(T^*T)^q x\|^{\frac{r}{q}} \|x\|^{1-\frac{r}{q}}, \text{ para todo } x \in X.$$

Demonstração: Para $r = q$ a desigualdade é imediata. Suponha que $r < q$ e tome $a := \frac{q}{r} > 1$ e $b := \frac{q}{q-r}$. Então

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{r}{q} + \frac{q-r}{q} = 1$$

e $ra = q$. Seja (E_λ) a família espectral associada ao operador auto-adjunto T^*T . Fixe $x \in X$ e defina $w(\lambda) = \langle E_\lambda x, x \rangle$. Então, segue da

desigualdade de Hölder ([35, página 62]),

$$\begin{aligned}
\|(T^*T)^r x\|^2 &= \langle (T^*T)^{2r} x, x \rangle = \int \lambda^{2r} d\langle E_\lambda x, x \rangle \\
&= \int \lambda^{2r} dw(\lambda) \leq \left(\int (\lambda^{2r})^a dw(\lambda) \right)^{\frac{1}{a}} \left(\int (1)^b dw(\lambda) \right)^{\frac{1}{b}} \\
&= \left(\int \lambda^{2q} dw(\lambda) \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int dw(\lambda) \right)^{1-\frac{r}{q}} \\
&= \left\langle (T^*T)^{2q} x, x \right\rangle^{\frac{r}{q}} \langle x, x \rangle^{1-\frac{r}{q}} \\
&= \left[\|(T^*T)^q x\|^{\frac{r}{q}} \|x\|^{1-\frac{r}{q}} \right]^2.
\end{aligned}$$

■

Para facilitar a notação vamos definir $A := F'(x^+)$, $A_n := F'(x_n^\delta)$, $e_n := x^+ - x_n^\delta$, $T = A^*A$, $T_n = A_n^*A_n$, $V := (\gamma_n I + T)$, $V_n := (\gamma_n I + T_n)$, $Q(x^+, x_n^\delta) := Q_{\infty, n}$, $Q(x_n^\delta, x^+) := Q_{n, \infty}$, $R(x^+, x_n^\delta) := R_{\infty, n}$ e $R(x_n^\delta, x^+) := R_{n, \infty}$.

Lema 32 *Assuma (1.2), (1.3), (1.5), (1.18), (1.19), (1.20), (3.2), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.8), (3.9) e que $\|e_n\| \leq E$, para algum $E > 0$ e para*

$0 \leq n < N$. Então:

- (i) $\|e_{n+1}^{ap}\| \leq c_f f(\gamma_n) \rho;$
- (ii) $\|e_{n+1}^{noi}\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\gamma_n}} \delta;$
- (iii) $\|e_{n+1}^{nl}\| \leq C_R \frac{\|Ae_{n+1}^{ap}\|}{\sqrt{\gamma_n}} + \frac{3c_f}{2} C_Q \frac{\|Ae_n\|}{\sqrt{\gamma_n}} f(\gamma_n) \rho;$
- (iv) $\|e_{n+1}^{tay}\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\gamma_n}} (2C_R + \frac{3}{2} C_Q \|e_n\|) \|Ae_n\|;$
- (I) $\|Ae_{n+1}^{ap}\| \leq c_f \sqrt{\gamma_n} f(\gamma_n) \rho;$
- (II) $\|Ae_{n+1}^{noi}\| \leq \left(C_R + 1 + C_Q \frac{\|Ae_n\|}{2\sqrt{\gamma_n}} \right) \delta;$
- (III) $\|Ae_{n+1}^{nl}\| \leq (C_R + 1) [2C_R \|Ae_{n+1}^{ap}\| + C_Q \|e_{n+1}^{ap}\| \cdot \|Ae_n\|$
 $+ \frac{\|Ae_{n+1}^{ap}\|}{2\sqrt{\gamma_n}} C_Q \|Ae_n\|] + C_Q \|Ae_n\| \cdot \|e_{n+1}^{nl}\|;$
- (IV) $\|Ae_{n+1}^{tay}\| \leq \left(C_R + 1 + C_Q \frac{\|Ae_n\|}{2\sqrt{\gamma_n}} \right) (2C_R + \frac{3}{2} \|e_n\| C_Q) \|Ae_n\|.$

Demonstração: Usando a definição de e_{n+1}^{ap} (3.10) e em seguida o item (c) do teorema 30, obtemos

$$\|e_{n+1}^{ap}\| \leq \|p_n(T) f(T)\| \cdot \|w\| \leq \max_{0 < \lambda \leq \|A\|^2} |p_n(\lambda) f(\lambda)| \rho.$$

Usando agora (3.7) e a condição $f(\lambda) \geq 0$ (3.2),

$$\|e_{n+1}^{ap}\| \leq \max_{0 < \lambda \leq \|A\|^2} |p_n(\lambda)| f(\lambda) \rho \leq c_f f(\gamma_n) \rho,$$

o que prova (i). Para provar (I), usamos mais uma vez o teorema 30 e também (3.6):

$$\begin{aligned} \|Ae_{n+1}^{ap}\| &\leq \|A\| \cdot \|e_{n+1}^{ap}\| \leq \|T\|^{\frac{1}{2}} \|p_n(T) f(T)\| \cdot \|w\| \\ &\leq \max_{0 \leq \lambda \leq \|A\|^2} \lambda^{\frac{1}{2}} |p_n(\lambda)| f(\lambda) \rho \leq c_f \sqrt{\gamma_n} f(\gamma_n). \end{aligned}$$

A prova de (ii) é mais simples. Basta usar a definição de e_{n+1}^{noi} , o lema 21 e (1.3),

$$\begin{aligned} \|e_{n+1}^{noi}\| &= \|g_n(T_n) A_n^* (y^\delta - y)\| \leq \|g_n(T_n) A_n^*\| \cdot \|y^\delta - y\| \\ &\leq \|V_n^{-1} A_n^*\| \delta \leq \frac{1}{2\sqrt{\gamma_n}} \delta. \end{aligned}$$

Para verificarmos que (II) é verdadeiro, usamos (1.20) para obter

$$\begin{aligned} A &= F'(x^+) = R_{\infty,n} A_n + Q_{\infty,n} \\ &= (R_{\infty,n} - I) A_n + A_n + Q_{\infty,n} \end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned} \|AV_n^{-1} A_n^*\| &\leq \|R_{\infty,n} - I\| \cdot \|A_n V_n^{-1} A_n^*\| \\ &\quad + \|A_n V_n^{-1} A_n^*\| + \|Q_{\infty,n}\| \cdot \|V_n^{-1} A_n^*\| \\ &\leq \left(C_{R,1} + 1 + C_Q \|Ae_n\| \frac{1}{2\sqrt{\gamma_n}} \right) \end{aligned} \tag{B.1}$$

pelo lema 21. Agora, pela definição de e_{n+1}^{noi} , e usando (1.3),

$$\begin{aligned} \|Ae_{n+1}^{noi}\| &= \|Ag_n(T_n) A_n^* (y^\delta - y)\| \leq \|AV_n^{-1} A_n^*\| \delta \\ &\leq \left(C_R + 1 + C_Q \|Ae_n\| \frac{1}{2\sqrt{\gamma_n}} \right) \delta. \end{aligned}$$

As provas de (iii) e (III) exigem um pouco mais. Usaremos o lema 21. Iniciemos com a demonstração de (iii) :

$$\begin{aligned} V + T_n &= \gamma_n I + T + T_n = V_n + T \implies \\ (I + T_n V^{-1}) V &= V_n (V_n^{-1} T + I) \implies \\ V_n^{-1} (I + T_n V^{-1}) &= (V_n^{-1} T + I) V^{-1}. \end{aligned}$$

Como $p_n(T_n) = \gamma_n V_n^{-1}$ e $p_n(T) = \gamma_n V^{-1}$, decorre que

$$\begin{aligned} V_n^{-1} + V_n^{-1} T_n V^{-1} &= V_n^{-1} T V^{-1} + V^{-1} \implies \\ V_n^{-1} - V^{-1} &= V_n^{-1} (T_n - T) V^{-1} \implies \\ p_n(T_n) - p_n(T) &= \gamma_n V_n^{-1} (T - T_n) V^{-1} \end{aligned}$$

que pela definição de e_{n+1}^{nl} (3.10), implica em

$$\begin{aligned} e_{n+1}^{nl} &= \gamma_n V_n^{-1} (T - T_n) V^{-1} f(T) w \implies \\ e_{n+1}^{nl} &= \gamma_n V_n^{-1} [A_n^* (R_{\infty,n}^* - R_{n,\infty}) A + Q_{\infty,n} A - A_n^* Q_{n,\infty}] V^{-1} f(T) w. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|e_{n+1}^{nl}\| &\leq \|\gamma_n V_n^{-1} A_n^* [(R_{\infty,n}^* - R_{n,\infty})] AV^{-1} f(T) w\| \\ &\quad + \|\gamma_n V_n^{-1} [(Q_{\infty,n}^* A - A_n^* Q_{n,\infty})] V^{-1} f(T) w\| \\ &\leq \|V_n^{-1} A_n^*\| (\|R_{\infty,n}^* - I\| + \|I - R_{n,\infty}\|) \|A \gamma_n V^{-1} f(T) w\| \\ &\quad + \|V_n^{-1} Q_{\infty,n}^* A \gamma_n V^{-1} f(T) w\| \\ &\quad + \|V_n^{-1} A_n^* Q_{n,\infty} \gamma_n V^{-1} f(T) w\|. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \|e_{n+1}^{nl}\| &\leq \frac{1}{2\sqrt{\gamma_n}} 2C_R \|Ae_{n+1}^{ap}\| \\ &\quad + \|V_n^{-1}\| \cdot \|Q_{\infty,n}\| \cdot \|A\| \cdot \|\gamma_n V^{-1}\| \cdot \|f(T)\| \cdot \|w\| \\ &\quad + \|V_n^{-1} A_n^*\| \cdot \|Q_{n,\infty}\| \cdot \|\gamma_n V^{-1}\| \cdot \|f(T)\| \cdot \|w\|, \end{aligned}$$

que pelo lema 21 implica que

$$\begin{aligned} \|e_{n+1}^{nl}\| &\leq C_R \frac{\|Ae_{n+1}^{ap}\|}{\sqrt{\gamma_n}} + \frac{1}{\gamma_n} C_Q \|Ae_n\| \left(\|T\|^{\frac{1}{2}} \|p_n(T)\| \cdot \|f(T)\| \right) \rho \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\gamma_n}} C_Q \|Ae_n\| (\|p_n(T)\| \cdot \|f(T)\|) \rho, \end{aligned}$$

e que com o uso do item (c) do teorema 30 e com as condições (3.6) e (3.7) implicam em

$$\begin{aligned} \|e_{n+1}^{nl}\| &\leq C_R \frac{\|Ae_{n+1}^{ap}\|}{\sqrt{\gamma_n}} + \frac{C_Q}{\gamma_n} \|Ae_n\| c_f \sqrt{\gamma_n} f(\gamma_n) \rho \\ &\quad + C_Q \frac{\|Ae_n\|}{2\sqrt{\gamma_n}} c_f f(\gamma_n) \rho \\ &= C_R \frac{\|Ae_{n+1}^{ap}\|}{\sqrt{\gamma_n}} + \frac{3c_f}{2} C_Q \frac{\|Ae_n\|}{\sqrt{\gamma_n}} f(\gamma_n) \rho. \end{aligned}$$

Agora, provemos (III). Por (1.20), $A = R_{\infty,n} A_n + Q_{\infty,n}$. Usando a igualdade em (B.2),

$$\begin{aligned} Ae_{n+1}^{nl} &= A\gamma_n V_n^{-1} (T - T_n) V^{-1} f(T) w \\ &= \gamma_n R_{\infty,n} A_n V_n^{-1} \\ &\quad [A_n^* (R_{\infty,n}^* - R_{n,\infty}) A + Q_{\infty,n}^* A - A_n^* Q_{\infty,n}] \\ &\quad V^{-1} f(T) w + Q_{\infty,n} e_{n+1}^{nl}, \end{aligned}$$

que implica em

$$\begin{aligned}
\|Ae_{n+1}^{nl}\| \leq \|R_{\infty,n}\| & \{ \|A_n V_n^{-1} A_n^*\| \\
& (\|R_{\infty,n}^* - I\| + \|I - R_{n,\infty}\|) \|A \gamma_n V^{-1} f(T) w\| \\
& + \|A_n V_n^{-1}\| \cdot \|Q_{\infty,n}^*\| \cdot \|A \gamma_n V^{-1} f(T) w\| \\
& + \|A_n V_n^{-1} A_n^*\| \cdot \|Q_{n,\infty}\| \cdot \|\gamma_n V^{-1} f(T) w\| \} \\
& + \|Q_{\infty,n}\| \cdot \|e_{n+1}^{nl}\|,
\end{aligned}$$

que por sua vez implica na desigualdade desejada. Resta somente provar (iv) e (IV). Iniciemos com (iv).

$$\begin{aligned}
E(x^+, x_n^\delta) &= \int_0^1 [F'(x^+ + te_n) - A_n] e_n dt \\
&= \int_0^1 [F'(x^+ + te_n) - A] e_n dt + \int_0^1 [A - A_n] e_n dt \\
&= -E(x_n^\delta, x^+) + \int_0^1 [A - A_n] e_n dt.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Mas, usando a fatoração de F' (1.20),

$$\begin{aligned}
A - A_n &= A - R_{n,\infty} A - Q_{n,\infty} \\
&= (I - R_{n,\infty}) A - Q_{n,\infty},
\end{aligned}$$

Dai,

$$\int_0^1 \|[A - A_n] e_n\| dt \leq \int_0^1 \|I - R_{n,\infty}\| \cdot \|Ae_n\| dt + \int_0^1 C_Q \|Ae_n\| \cdot \|e_n\| dt$$

o que implica em

$$\int_0^1 \|[A - A_n] e_n\| dt \leq C_R \|Ae_n\| + C_Q \|e_n\| \cdot \|Ae_n\|. \tag{B.4}$$

De (B.3), (B.4) e da desigualdade (3.12) decorre que

$$\begin{aligned}
\|E(x_n^\delta, x^+)\| &\leq \left(C_R + \frac{1}{2}C_Q \|e_n\|\right) \|Ae_n\| \\
&\quad + (C_R + C_Q \|e_n\|) \|Ae_n\| \\
&= \left(2C_R + \frac{3}{2}C_Q \|e_n\|\right) \|Ae_n\|.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Logo, como $g_n(T_n) = V_n^{-1}$, segue da definição de e_{n+1}^{tay} (3.10) e do lema 21 que

$$\begin{aligned}
\|e_{n+1}^{tay}\| &\leq \|g_n(T_n) A_n^*\| \cdot \|E(x^+, x_n^\delta)\| \\
&\leq \|V_n^{-1} A_n^*\| \left(2C_R + \frac{3}{2}C_Q \|e_n\|\right) \|Ae_n\| \\
&\leq \frac{1}{2\sqrt{\gamma_n}} \left(2C_R + \frac{3}{2}C_Q \|e_n\|\right) \|Ae_n\|.
\end{aligned}$$

Por fim, provemos (IV) usando (B.1) e (B.5),

$$\begin{aligned}
\|Ae_{n+1}^{tay}\| &= \|Ag_n(T_n) A_n^* E(x^+, x_n^\delta)\| \\
&\leq \|AV_n^{-1} A_n^*\| \cdot \|E(x^+, x_n^\delta)\| \\
&\leq \left(C_R + 1 + C_Q \frac{\|Ae_n\|}{2\sqrt{\gamma_n}}\right) \left(2C_R + \frac{3}{2}C_Q \|e_n\|\right) \|Ae_n\|,
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração. ■

Temos condições de estimar a norma do erro total e de sua imagem pelo operador A .

Lema 33 *Assuma todas as hipóteses do lema 32. Então se $\tau > 1$ é suficientemente grande, valem as seguintes desigualdades:*

$$\begin{aligned}
(i) \quad &\|e_{n+1}\| \leq \|e_{n+1}^{ls}\| + (c_f + C_{Rc_f}) \rho_f(\gamma_n) + \frac{\bar{c}}{C_Q} \frac{\|Ae_n\|}{\sqrt{\gamma_n}}; \\
(ii) \quad &\|Ae_{n+1}\| \leq \|Ae_{n+1}^{ls}\| + \bar{a} \|Ae_{n+1}^{ap}\| + \bar{b} \|Ae_n\| + \frac{\bar{c}}{\sqrt{\gamma_n}} \|Ae_n\|^2; \\
(iii) \quad &\underline{a} \|Ae_{n+1}^{ap}\| \leq \|Ae_{n+1}^{ls}\| + \|Ae_{n+1}\| + \bar{b} \|Ae_n\| + \frac{\bar{c}}{\sqrt{\gamma_n}} \|Ae_n\|^2,
\end{aligned}$$

com constantes

$$\begin{aligned}\bar{a} &:= 1 + 2C_R (C_R + 1), \underline{a} := 1 - 2C_R (C_R + 1); \\ \bar{b} &:= (C_R + 1) \left(\frac{1 + C_R + \frac{1}{2}EC_Q}{\tau - 1} + \left(2C_R + \frac{3}{2}EC_Q \right) + C_Q \left(\frac{3c_f}{2} + C_R c_f \right) \rho \right); \\ \bar{c} &:= C_Q \left(\frac{1 + C_R + \frac{1}{2}EC_Q}{2(\tau - 1)} + \frac{3c_f}{2} C_Q \rho + \frac{1}{2} \left(2C_R + \frac{3}{2}EC_Q \right) \right).\end{aligned}$$

Demonstração: Usando a igualdade (1.2) obtemos

$$\|F(x_n^\delta) - y\| \leq \|E(x_n^\delta, x^+)\| + \|F'(x^+)(x_n^\delta - x^+)\|.$$

Usando agora a desigualdade (3.12) obtemos

$$\begin{aligned}\|F(x_n^\delta) - y\| &\leq \left(1 + C_R + \frac{1}{2}C_Q \|x_n^\delta - x^+\| \right) \|F'(x^+)(x_n^\delta - x^+)\| \\ &\leq \left(1 + C_R + \frac{1}{2}C_Q E \right) \|Ae_n\|.\end{aligned}$$

Agora (1.5) e (1.3) resultam em

$$\begin{aligned}\tau\delta &\leq \|y^\delta - F(x_n^\delta)\| \leq \|y^\delta - y\| + \|y - F(x_n^\delta)\| \\ &\leq \delta + \left(1 + C_R + \frac{1}{2}C_Q E \right) \|Ae_n\|,\end{aligned}$$

o que implica em

$$(\tau - 1)\delta \leq \left(1 + C_R + \frac{1}{2}C_Q E \right) \|Ae_n\|.$$

Usando o fato de que $\tau > 1$ conseguimos

$$\delta \leq \frac{1}{\tau - 1} \left(1 + C_R + \frac{1}{2}C_Q E \right) \|Ae_n\|. \quad (\text{B.6})$$

Usando a igualdade (3.11), somando as desigualdades (i), (ii), (iii)

e (iv) do lema anterior e usando (B.6) obtem-se a desigualdade (i). Somando agora as desigualdades (I), (II), (III) e (IV) do lema anterior, usando mais uma vez (B.6), usando ainda a desigualdade (i)

já provada nesse lema, juntamente com (3.9), obtem-se a desigualdade (ii). Para obter (iii), fazemos uso de (1.20), da definição de e_{n+1}^{nl} (3.10) e da definição de p_n (3.1) para obtermos a igualdade

$$Ae_{n+1}^{nl} = R_{\infty,n} A_n [\gamma_n T_n^{-1} (A^* A - A_n^* A_n) T^{-1} f(A^* A) w] + Q_{\infty,n} e_{n+1}^{nl}.$$

Usando (3.11) obtemos que a igualdade

$$Ae_{n+1}^{ap} + Ae_{n+1}^{nl} = Ae_{n+1} - Ae_{n+1}^{noi} - Ae_{n+1}^{tay} - Ae_{n+1}^{ls}$$

que com a utilização de (1.20) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & Ae_{n+1}^{ap} \tag{B.7} \\ & + \gamma_n R_{\infty,n} A_n T_n^{-1} A_n^* [R_{\infty,n}^* - R_{n,\infty}] A T^{-1} f(A^* A) w \\ = & -\gamma_n R_{\infty,n} A_n T_n^{-1} [Q_{\infty,n}^* A - A^* Q_{n,\infty}] T^{-1} f(A^* A) w \\ & - Q_{\infty,n} e_{n+1}^{nl} + Ae_{n+1} - Ae_{n+1}^{noi} - Ae_{n+1}^{tay} - Ae_{n+1}^{ls}. \end{aligned}$$

Mas, pela definição de $\underline{a}$, (1.20) e pelo lema 21,

$$\begin{aligned} \underline{a} \|Ae_{n+1}^{ap}\| &= \|Ae_{n+1}^{ap}\| - 2C_R (C_R + 1) \|Ae_{n+1}^{ap}\| \\ &\leq \|Ae_{n+1}^{ap}\| - \|R_{\infty,n}\| \cdot \\ &\quad \|A_n T_n^{-1} A_n^*\| \cdot \|R_{\infty,n}^* - I\| \cdot \|R_{n,\infty} - I\| \cdot \|Ae_{n+1}^{ap}\| \\ &\leq \|Ae_{n+1}^{ap} + R_{\infty,n} A_n T_n^{-1} A_n^* \\ &\quad [R_{\infty,n}^* - I + I - R_{n,\infty}] A \gamma_n T^{-1} f(A^* A) w\|. \end{aligned}$$

Perceba que o lado direito desta última desigualdade é exatamente a norma do lado esquerdo de (B.7). Para estimar a norma do lado direito de (B.7) utilizamos (1.20), o lema 21, (3.6), (3.9) e os itens (iii), (II)

e (IV) do lema 22 obtendo

$$\begin{aligned}
& \|R_{\infty,n}\| \cdot \|A_n T_n^{-1}\| \cdot \|Q_{\infty,n}^*\| \cdot \|A \gamma_n T_n^{-1} f(A^* A) w\| \\
& + \|R_{\infty,n}\| \cdot \|A_n T_n^{-1} A_n^*\| \cdot \|Q_{\infty,n}\| \cdot \|\gamma_n T_n^{-1} f(A^* A) w\| \\
& + \|Q_{\infty,n}\| \cdot \|e_{n+1}^{nl}\| + \|Ae_{n+1}\| + \|Ae_{n+1}^{noi}\| + \|Ae_{n+1}^{tay}\| + \|Ae_{n+1}^{ls}\| \\
\leq & (C_R + 1) \frac{1}{2\sqrt{\gamma_n}} C_Q \|Ae_n\| c_f \sqrt{\gamma_n} f(\gamma_n) \rho \\
& + (C_R + 1) \cdot 1 \cdot C_Q \|Ae_n\| c_f f(\gamma_n) \rho \\
& + C_Q \|Ae_n\| \left(C_R \frac{\|Ae_{n+1}^{ap}\|}{\sqrt{\gamma_n}} + \frac{3}{2} c_f C_Q \frac{\|Ae_n\|}{\sqrt{\gamma_n}} f(\gamma_n) \rho \right) + \|Ae_{n+1}\| \\
& + C_R + 1 + C_Q \frac{\|Ae_n\|}{2\sqrt{\gamma_n}} \delta \\
& + \left(C_R + 1 + C_Q \frac{\|Ae_n\|}{2\sqrt{\gamma_n}} \right) \left(2C_R + \frac{3}{2} \|e_n\| C_Q \right) \|Ae_n\| + \|Ae_{n+1}^{ls}\|.
\end{aligned}$$

Usando agora $\|e_n\| \leq E$, (3.9), o item (I) do lema 22 e (B.6), conseguimos estimar a norma do lado direito de (B.7) por

$$\|Ae_{n+1}^{ls}\| + \|Ae_{n+1}\| + \bar{b} \|Ae_n\| + \frac{\bar{c}}{\sqrt{\gamma_n}} \|Ae_n\|^2,$$

que é o lado direito em (iii). Conclui-se portanto que a desigualdade (iii) é verdadeira. ■

Apêndice C

Técnicas de Regularização

Nesse apêndice nos dedicaremos a estudar técnicas de regularização iterativas para a obtenção de soluções estáveis de problemas lineares mal postos. Para isso, suponha que $A : X \longrightarrow Y$ seja um operador linear e limitado entre espaços de Hilbert X e Y . Suponha que estamos interessados em determinar um vetor $x \in X$ tal que

$$Ax = y, \tag{C.1}$$

onde $y \in Y$. Suponha ainda que o vetor y não é conhecido exatamente, mas apenas uma versão perturbada y^δ satisfazendo (1.3). Para facilitar o raciocínio, imaginemos por enquanto que A é bijetiva. Nesse caso, existe um único $x^\delta \in X$ satisfazendo a equação

$$Ax^\delta = y^\delta. \tag{C.2}$$

Se esse sistema é mal posto, pode não ser vantajoso calcular x^δ exatamente. Por exemplo, A é um operador linear e contínuo, mas sua inversa (caso exista) pode não ser contínua. Assim, mesmo que o vetor y esteja muito próximo de y^δ , o vetor x , solução do sistema (C.1) pode estar muito distante de x^δ , solução exata do sistema perturbado (C.2). Podemos utilizar uma *técnica de regularização* para contornar o problema. Repare que caso A^*A seja inversível, teremos pela equação

(C.2) que $x^\delta = (A^*A)^{-1} A^*y^\delta$. Mas caso o operador $(A^*A)^{-1} A^*$ não seja contínuo, teremos problemas de instabilidade, conforme acabamos de argumentar. Devemos aproximar (em algum sentido) o operador não contínuo $(A^*A)^{-1} A^*$ por uma sequência de operadores contínuos $g_m(A^*A)A^* : Y \longrightarrow X$, onde $g_m : [0, \|A\|^2] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua por partes¹. Para isso, gostaríamos que

$$[g_m(A^*A)A^*]Ax \longrightarrow x, \text{ quando } m \longrightarrow \infty, \text{ para todo } x \in X. \quad (C.3)$$

Observação 19 A convergência (C.3) significa que a sequência de operadores $g_m(A^*A)A^*A : X \longrightarrow X$ converge pontualmente para o operador identidade mas não é possível mostrar convergência na norma do operador. De fato, se o operador A for compacto por exemplo, então $g_m(A^*A)A^*A$ também será e se caso tivéssemos $g_m(A^*A)A^*A \longrightarrow I$ na norma do operador, então teríamos que o operador identidade seria compacto, o que não pode ocorrer caso $\dim X = \infty$ por exemplo. Também não é difícil provar (veja a referência [20]) sob as mesmas hipóteses que o operador $g_m(A^*A)A^* : Y \longrightarrow X$ não é uniformemente limitado, isto é, existe uma subsequência $g_{m_k}(A^*A)A^* : Y \longrightarrow X$ tal que $\|g_{m_k}(A^*A)A^*\| \longrightarrow \infty$ quando $k \longrightarrow \infty$.

Observe que caso consigamos uma sequência satisfazendo (C.3), então aplicando-a a equação (C.1) teremos

$$g_m(A^*A)A^*y = [g_m(A^*A)A^*]Ax \longrightarrow x \text{ quando } m \longrightarrow \infty. \quad (C.4)$$

Defina para $m \in \mathbb{N}$ fixo,

$$x_m^\delta := g_m(A^*A)A^*y^\delta.$$

Podemos utilizar esse vetor como uma aproximação para o vetor x , solução de (C.1). Observe que como $g_m(A^*A)A^* : Y \longrightarrow X$ é um operador linear e contínuo, para $m \in \mathbb{N}$ fixo,

$$\begin{aligned} \|x_m^\delta - x\| &= \|g_m(A^*A)A^*y^\delta - x\| \\ &\leq \|g_m(A^*A)A^*(y^\delta - y)\| + \|g_m(A^*A)A^*y - x\| \\ &\leq \|g_m(A^*A)A^*\| \cdot \delta + \|g_m(A^*A)A^*y - x\|. \end{aligned} \quad (C.5)$$

¹Consulte a referência [12], ou apêndice A, para uma definição precisa do operador $g_m(A^*A)$.

Veja que por (C.4), $\|g_m(A^*A)A^*y - x\| \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$. Mas para $m \in \mathbb{N}$ grande, podemos ter também $\|g_m(A^*A)A^*\|$ muito grande, conforme a observação 19. Falando informalmente, se o número $m \in \mathbb{N}$ (chamado de *parâmetro de regularização*) for muito pequeno, $g_m(A^*A)A^*$ é um operador "bastante limitado", isto é, possui uma norma pequena, mas fica muito distante do operador original $(A^*A)^{-1}A^*$ e o erro $\|g_m(A^*A)A^*y - x\|$ se torna grande. Em contrapartida, se m é muito grande, estes dois operadores ficam próximos, mas o operador $g_m(A^*A)A^*$ fica "pouco limitado", isto é, com a norma muito grande e então teremos $\|g_m(A^*A)A^*\|$ grande. Na prática não fazemos $m \rightarrow \infty$. É necessário encontrarmos de alguma maneira um parâmetro m_0 conveniente para que $x_{m_0}^\delta := g_{m_0}(A^*A)A^*y^\delta$ aproxime x de modo que a estimativa em (C.5) fique controlada.

Em um contexto mais geral, a transformação linear A pode não ser bijetiva. Nesse caso, o vetor com ruídos y^δ pode por exemplo, não pertencer a imagem de A e portanto não existirá $x^\delta \in X$ tal que a equação (C.2) seja satisfeita. Para uma situação dessas, procuraremos um vetor $u \in X$ de tal modo que

$$\|Au - y^\delta\| = \inf_{s \in X} \|As - y^\delta\|.$$

Um vetor $u \in X$ com essa propriedade é chamado de *solução de mínimos quadrados*. O lema a seguir coleta alguns resultados importantes nessa direção.

Lema 34 *Seja $A : X \rightarrow Y$ um operador linear e limitado, onde X e Y são espaços de Hilbert. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $\|Au - y\| = \inf_{s \in X} \|As - y\|;$
- (ii) $A^*Au = A^*y;$
- (iii) $Au = P_{\overline{R(A)}}y,$

onde $P_{\overline{R(A)}} : Y \rightarrow Y$ é o operador projeção ortogonal de Y em $\overline{R(A)}$.

Pela equação (iii) do lema acima, vemos que a equação (C.1) possui uma solução de mínimos quadrados se e somente se $P_{\overline{R(A)}}y \in R(A)$, ou seja, y pertence ao conjunto $R(A) + R(A)^\perp$ que é denso em $Y = \overline{R(A)} + R(A)^\perp$. Nesse caso, o conjunto de soluções de mínimos

quadrados é não vazio e convexo e portanto possui um único elemento de menor norma, denotado por $A^\dagger y$. Desse modo, podemos definir o operador $A^\dagger : R(A) + R(A)^\perp \longrightarrow X$ que a cada $y \in R(A) + R(A)^\perp$ associa o vetor $A^\dagger y \in X$, solução de mínimos quadrados de (C.1) com a menor norma possível. O operador $A^\dagger$ é chamado de *inversa generalizada de Moore Penrose (ou pseudo-inversa)*. É claro que se A é inversível, então $A^\dagger = A^{-1}$.

Observe que caso $A^*A : X \longrightarrow X$ seja inversível, teremos pela condição (ii) do lema acima que $u = (A^*A)^{-1} A^*y$. Nesse contexto mais geral, gostaríamos de substituir a convergência (C.4) por

$$g_m(A^*A) A^*y \longrightarrow A^\dagger y, \text{ quando } m \longrightarrow \infty, \quad (\text{C.6})$$

para todo $y \in D(A^\dagger)$.

Lema 35 *Seja $A : X \longrightarrow Y$ um operador linear e limitado e (g_m) uma sequência de funções com $g_m : [0, \|A\|^2] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$|tg_m(t)| \leq C_g, \quad (\text{C.7})$$

$$g_m(t) \longrightarrow \frac{1}{t} \text{ pontualmente para todo } t > 0,$$

onde $C_g > 0$ é uma constante. Se tomarmos $u = \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(A^*A) A^*y$, onde $y \in D(A^\dagger)$, então²

$$\|Au - y\| = \inf_{s \in X} \|As - y\|, \quad (\text{C.8})$$

ou seja, a condição (i) do lema 34 é satisfeita.

Demonstração: De fato, se $y \in D(A^\dagger) = R(A) + R(A)^\perp$ então $y = y_1 + y_2$ com $y_1 \in R(A)$ e $y_2 \in R(A)^\perp = N(A^*)$. Portanto, existe $z \in X$ tal que $y_1 = Az$ e também, $A^*y_2 = 0$. Daí, considerando

²Na verdade é possível provar que $u = A^\dagger y$, ou seja, que a condição C.6 é satisfeita (veja a referencia [12]).

$J := [0, \|A\|^2]$ e (E_λ) a família espectral³ associada ao operador A^*A ,

$$\begin{aligned} g_m(A^*A)A^*y &= g_m(A^*A)A^*(y_1 + y_2) \\ &= g_m(A^*A)A^*Az = \int_J \lambda g_m(\lambda) dE_\lambda z. \end{aligned}$$

Mas, pelas condições (C.7), vemos que $f_m(t) := tg_m(t) \rightarrow 1$ para todo $t > 0$ fixo, ou seja, $f_m \rightarrow 1$ quase sempre em J . Como $|f_m(t)|$ é limitado por uma função integrável em J , segue do teorema da convergência dominada de Lebesgue que⁴

$$g_m(A^*A)A^*y = \int_J \lambda g_m(\lambda) dE_\lambda z = \int_J f_m(\lambda) dE_\lambda z \rightarrow \int_J 1 dE_\lambda z = z.$$

Logo, como $-y_2 \in R(A)^\perp$, para qualquer $s \in X$,

$$\begin{aligned} \|As - y\| &= \|As - (y_1 + y_2)\| = \|A(s - z) - y_2\| \\ &= \|A(s - z)\| + \|-y_2\| \geq \|-y_2\| = \|y_1 - y\| \\ &= \|Az - y\| = \left\| A \left[\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(A^*A)A^*y \right] - y \right\|. \end{aligned}$$

Isso significa que

$$\left\| A \left[\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(A^*A)A^*y \right] - y \right\| \leq \|As - y\| \text{ para todo } s \in X,$$

ou seja

$$\left\| A \left[\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(A^*A)A^*y \right] - y \right\| = \inf_{s \in X} \|As - y\|,$$

conforme queríamos. ■

Observação 20 *Pela condição (iii) do lema 34 e porque o operador A é contínuo, segue que*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A[g_m(A^*A)A^*y] = P_{\overline{R(A)}}y,$$

³Veja o apêndice A para uma definição precisa.

⁴Consulte a referencia [8] para o enunciado preciso do teorema da convergência dominada de Lebesgue.

para todo $y \in D(A^\dagger)$.

Uma sequência de funções (g_m) com $g_m : [0, \|A_n\|^2] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua por partes satisfazendo as propriedades (C.7) é chamada de *filtro de regularização*.

Alguns exemplos de filtros de regularização são:

Filtro de Tikhonov:

$$g_m(t) := \frac{1}{t + \gamma_m}, \quad \gamma_m > 0 \text{ e } \gamma_m \longrightarrow 0 \text{ quando } m \longrightarrow \infty. \quad (\text{C.9})$$

Para esse filtro de regularização, vemos que

$$|tg_m(t)| = \left| \frac{t}{t + \gamma_m} \right| = \frac{t}{t + \gamma_m} \leq 1 =: C_g$$

Ainda, para $t > 0$ fixo,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{t + \gamma_m} = \frac{1}{t + 0} = \frac{1}{t}.$$

Repare que nesse filtro de regularização, o operador $g_m(A^*A) : X \longrightarrow X$ é dado por $(A^*A + \gamma_m I)^{-1}$. Observe também esse operador linear é limitado, uma vez que o menor valor espectral possível do operador $A^*A + \gamma_m I$ é $\gamma_m > 0$. Segue que $\left\| (A^*A + \gamma_m I)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\gamma_m}$.

Truncated Singular Value Decomposition:

$$g_m(t) := \begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{se } t \geq \frac{1}{m} \\ 0, & \text{se } t < \frac{1}{m} \end{cases}.$$

Nesse caso temos,

$$tg_m(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq \frac{1}{m} \\ 0, & \text{se } t < \frac{1}{m} \end{cases},$$

logo, $|tg_m(t)| \leq 1 =: C_g$. Mais, $\frac{1}{m} \longrightarrow 0$ quando $m \longrightarrow \infty$ e portanto, para cada $t > 0$ fixo, $t \geq \frac{1}{m}$ para m suficientemente grande. Logo, para m suficientemente grande teremos $g_m(t) = \frac{1}{t}$. Daí,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{t} = \frac{1}{t}.$$

Para esse filtro de regularização, temos que para cada $x \in X$,

$$\begin{aligned} g_m(A^*A)x &= \int_0^{\|A\|^2} g_m(\lambda) dE_\lambda x \\ &= \int_0^{1/m} 0 dE_\lambda x + \int_{1/m}^{\|A\|^2} \frac{1}{\lambda} dE_\lambda x = \int_{1/m}^{\|A\|^2} \frac{1}{\lambda} dE_\lambda x, \end{aligned}$$

onde mais uma vez, (E_λ) é a família espectral associada ao operador auto-adjunto A^*A . Portanto,

$$\|g_m(A^*A)\| \leq \sup_{\lambda \in [\frac{1}{m}, \|A\|^2]} \left| \frac{1}{\lambda} \right| = m.$$

Filtro de Landweber:

$$g_m(t) := \sum_{j=0}^{m-1} (1-t)^j, \text{ com } \|A\| \leq 1.$$

Como $t \in [0, \|A\|^2] \subset [0, 1]$, temos que $0 \leq 1-t \leq 1$. Se $t = 0$, então $|tg_m(t)| = 0 \leq 1$ e se $t \neq 0$ temos,

$$|tg_m(t)| = t \sum_{j=0}^{m-1} (1-t)^j \leq t \sum_{j=0}^{\infty} (1-t)^j = \frac{t}{1-(1-t)} = 1 =: C_g.$$

Para $t > 0$ fixo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_m(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (1-t)^j = \frac{1}{1-(1-t)} = \frac{1}{t}.$$

Outros filtros de regularização são⁵: Iteração Implícita, filtro de Showalter e ϑ -métodos semi iterativos.

Observação 21 Defina $J := [0, \|A\|^2]$. Como $g_m : J \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua por partes, podemos encontrar, para $m \in \mathbb{N}$ fixo, uma sequência de polinômios (p_{m_j}) convergindo pontualmente para g_m . Além disso,

⁵veja o artigo [32] para maiores detalhes.

podemos encontrar uma sequência de polinômios que seja limitada por uma função integrável f , isto é, $|p_{m_j}| \leq f$. Utilizamos então o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja referência [12]) para obter,

$$p_{m_j}(A^*A)x = \int_J p_{m_j}(\lambda) dE_\lambda x \longrightarrow \int_J g_m(\lambda) dE_\lambda x = g_m(A^*A)x,$$

onde $x \in X$ e $E_\lambda : X \longrightarrow X$ é a família espectral associada ao operador auto-adjunto A^*A . Isso significa que a sequência de vetores $(p_{m_j}(A^*A)x)_{j \in \mathbb{N}}$ converge para o vetor $g_m(A^*A)x$ na norma padrão em X . Em particular, se $y \in Y$ e $x = A^*y$, então

$$p_{m_j}(A^*A)A^*y \longrightarrow g_m(A^*A)A^*y.$$

Analogamente,

$$p_{m_j}(AA^*)y \longrightarrow g_m(AA^*)y \text{ para todo } y \in Y.$$

Também, como $A^* : Y \longrightarrow X$ é um operador contínuo,

$$A^*p_{m_j}(AA^*)y \longrightarrow A^*g_m(AA^*)y.$$

Repare agora que p_{m_j} é um polinômio para qualquer $j \in \mathbb{N}$ e então podemos provar sem grandes problemas a propriedade

$$p_{m_j}(A^*A)A^* = A^*p_{m_j}(AA^*).$$

Portanto, segue da unicidade do limite que

$$g_m(A^*A)A^*y = A^*g_m(AA^*)y, \tag{C.10}$$

para todo $y \in Y$.

Observação 22 Como $p_{m_j}(A^*A)$ é um operador auto-adjunto, com um raciocínio parecido, podemos mostrar que o operador $g_m(A^*A)$ também é auto-adjunto, valendo o mesmo para $g_m(AA^*)$.

Uma maneira alternativa de se definir regularização, é utilizando a abordagem proposta no artigo [27]. A chave é a próxima definição.

Definição 6 *Seja $a > 0$. Uma família de funções reais $(g_\alpha)_{0 < \alpha \leq a}$ é chamada de regularização se existem constantes $\gamma_*, \gamma^* > 0$ para as quais*

$$\sup_{0 < \lambda \leq a} |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \leq \gamma^*, \text{ para todo } 0 < \alpha \leq a \quad (\text{C.11})$$

e

$$\sup_{0 < \lambda \leq a} \sqrt{\lambda} |g_\alpha(\lambda)| \leq \frac{\gamma_*}{\sqrt{\alpha}}, \text{ para todo } 0 < \alpha \leq a.$$

*Dizemos que a regularização $(g_\alpha)_{0 < \alpha \leq a}$ tem qualificação ψ , para uma função crescente $\psi : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}_+$ se existe $\gamma^{**} > 0$ tal que*

$$\sup_{0 < \lambda \leq a} |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \psi(\lambda) \leq \gamma^{**} \psi(\alpha), \text{ para todo } 0 < \alpha \leq a. \quad (\text{C.12})$$

Dizemos ainda que a qualificação ψ cobre a função $\varphi : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}_+$ com constante c , se existir $c > 0$ tal que

$$c \frac{\psi(\alpha)}{\varphi(\alpha)} \leq \inf_{\alpha \leq \lambda \leq a} \frac{\psi(\lambda)}{\varphi(\lambda)}, \text{ para todo } 0 < \alpha \leq a. \quad (\text{C.13})$$

Por fim, dizemos que a regularização $(g_\alpha)_{0 < \alpha \leq a}$ tem qualificação clássica de ordem p , se para cada q satisfazendo $0 \leq q \leq p$ existir $\gamma_q > 0$ tal que

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq a} |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \lambda^q \leq \gamma_q \alpha^q, \text{ para todo } 0 < \alpha \leq a.$$

Observe que a condição (C.13) implica em

$$\sup_{\alpha \leq \lambda \leq a} \frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)} \leq \frac{1}{c} \frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\alpha)}, \text{ para todo } 0 < \alpha \leq a. \quad (\text{C.14})$$

Observação 23 *Observe que o filtro de regularização de Tikhonov, $g_n(\lambda) := \frac{1}{\gamma_n + \lambda}$ é uma regularização ($\gamma^* = 1$, $\gamma_* = \frac{1}{2}$ e $a = \|A\|^2$) com qualificação $\psi(\lambda) = \lambda$ ($\gamma^{**} = 1$) e com qualificação clássica de ordem $p = 1$.*

Observação 24 *É claro que se a função $\lambda \mapsto \frac{\psi(\lambda)}{\varphi(\lambda)}$ for não decrescente, então ψ cobre φ com constante $c = 1$, pois nesse caso teremos para*

$$0 < \alpha \leq a,$$

$$\begin{aligned} c \frac{\psi(\alpha)}{\varphi(\alpha)} &= \frac{\psi(\alpha)}{\varphi(\alpha)} \leq \frac{\psi(\lambda)}{\varphi(\lambda)}, \text{ para todo } \alpha \leq \lambda \leq a \implies \\ c \frac{\psi(\alpha)}{\varphi(\alpha)} &\leq \inf_{\alpha \leq \lambda \leq a} \frac{\psi(\lambda)}{\varphi(\lambda)}. \end{aligned}$$

Utilizando essa definição podemos provar o lema a seguir. Esse lema garante que se uma regularização tem qualificação ψ , então essa mesma regularização terá qualificação φ , desde que ψ cubra φ .

Lema 36 *Sejam $\varphi : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ uma função crescente e $(g_\alpha)_{0 < \alpha \leq a}$ uma regularização de qualificação $\psi : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ que cubra φ . Então,*

$$\sup_{0 < \lambda \leq a} |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \varphi(\lambda) \leq \frac{\gamma^{**}}{c} \varphi(\alpha), \text{ para todo } 0 < \alpha \leq a,$$

onde γ^{**} é dado em (C.12) e c é dado em (C.13).

Demonstração: Inicialmente repare que se (C.13) é satisfeito com constante $c > 0$ então é certamente satisfeito com $c_1 > 0$ onde $0 < c_1 < c$. Podemos portanto assumir sem perda de generalidade que $0 < c \leq \frac{\gamma^{**}}{\gamma^*}$, onde γ^* é dado em (C.11). Seja $0 < \alpha \leq a$

Primeiro suponha que $\lambda \leq \alpha$. Nesse caso, como φ é crescente, temos por (C.11),

$$\begin{aligned} \sup_{0 < \lambda \leq a} |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \varphi(\lambda) &\leq \sup_{0 < \lambda \leq a} |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \sup_{0 < \lambda \leq a} \varphi(\lambda) \\ &\leq \gamma^* \varphi(\alpha) \leq \frac{\gamma^{**}}{c} \varphi(\alpha). \end{aligned}$$

Suponha agora que $\alpha \leq \lambda \leq a$. Como $(g_\alpha)_{0 < \alpha \leq a}$ é uma regularização

de qualificação ψ e ψ cobre φ , usamos (C.12) e (C.14) para obter

$$\begin{aligned}
 |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \varphi(\lambda) &= |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \psi(\lambda) \frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)} \\
 &\leq \gamma^{**} \psi(\alpha) \frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)} \\
 &\leq \gamma^{**} \psi(\alpha) \sup_{0 < \lambda \leq a} \frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)} \\
 &\leq \gamma^{**} \psi(\alpha) \frac{1}{c} \frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\alpha)} = \frac{\gamma^{**}}{c} \varphi(\alpha).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{0 < \lambda \leq a} |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \varphi(\lambda) \leq \frac{\gamma^{**}}{c} \varphi(\alpha) \text{ para todo } \alpha \leq a.$$

■

Referências Bibliográficas

- [1] Baumeister, J., Leitão, A.. *Topics in Inverse Problems*. Lecture Notes: 25th CBM, IMPA, 2005.
- [2] Bender, C., Orszag, S.. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, 1978.
- [3] Blaschke, B., Neubauer, A., Scherzer, O.. *On Convergence Rates for the Iteratively Regularized Gauss-Newton Method*. IMA Journal of Numerical Analysis, 17 (1997), pp. 421-436.
- [4] Brézis, H.. *Analyse fonctionnelle*. Masson Editeur, Paris, 1983.
- [5] Burden, R., Faires, J.. *Análise Numérica*. Cengage Learning, tradução da 8^a edição, 2008.
- [6] Bleyer, I.. *Funcionais de Tikhonov e penalização com distâncias de Bregman*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.
- [7] Cesaro, A. *Métodos de Regularização tipo Level Set para Problemas Inversos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2006.
- [8] Chaim, H. *A Integral de Lebesgue e suas Aplicações*. IMPA, 1977.
- [9] Dembo, R. S., Eisenstat, S. C., Steihaug, T.. *Inexact Newton Methods*. SIAM J. Numer. Anal. 19(1982), pp. 400-408.

- [10] Eisenstat, S. C., Walker, H.. *Choosing the Forcing Terms in an Inexact Newton Method*. SIAM J. Sci. Comput. 17 (1996), pp. 16-32.
- [11] Eldén, L., Wittmeyer-Koch, L.. *Numerical Analysis. An Introduction*. Academic Press, 1990.
- [12] Engl, H. W., Hanke, M., Neubauer, A.. *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [13] Evans, L. C.. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [14] Golub, G., Van Loan, C., *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 3^a ed., 1996.
- [15] Groetsch, C.. *The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equation of First Kind*. Pitman Advanced Publishing Program, 1984.
- [16] Hohage, T., Langer, S.. *Convergence Analysis of an Inexact Iteratively Regularized Gauss-Newton Method Under General Source Conditions*. Journal of inverse and ill-posed problems 15 (2007), pp. 311-327.
- [17] Hohage, T.. *Logarithmic Convergence Rates of the Iteratively Regularized Gauss Newton Method for an Inverse Potencial and an Inverse Scattering Problem*. Inverse Problems 13 (1997), pp. 1279-1299.
- [18] Kaltenbacher, B., Neubauer, A., Scherzer, O.. *Iterative Regularizations Methods for Nonlinear Ill-posed problems*. Walter de Gruyter, 2008.
- [19] Kaltenbacher, B.. *A posteriori parameter choice strategies for some Newton type methods for the regularization of nonlinear ill-posed problems*. Numerische Mathematik, 79 (1998), pp. 501-528.
- [20] Kirsch, A.. *An Introduction the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Springer, 1996.
- [21] Kreyszig, E.. *Introductory Funcional Analysis with applications*, John Wiley & Sons, 1978.

- [22] Langer, S.. *Preconditioned Newton Methods for ill-posed Problems*. Dissertação de doutorado. Georg-August-Universität zu Göttingen, 2007.
- [23] Lechleiter, A. Rieder, A.. *Newton Regularizations for Impedance Tomography: A Numerical Study*. Inverse Problems, 22 (2006), pp. 1887-1967.
- [24] Mair, B.. *Tikhonov Regularization for finitely and infinitely smoothing operators*. SIAM J. Math. Anal., 25 (1994), pp. 135-147.
- [25] Martinez, J., Santos, S.. *Métodos Computacionais de Otimização*. 20º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 1995.
- [26] Marsden, J., Hoffman, M.. *Elementary Classical Analysis*, 2 ed. W. H. Freeman and Company, 1993.
- [27] Mathé, P., Pereverzev, S.. *Geometry of linear ill-posed problems in variable scales*. Inverse Problems, 19 (2003), pp. 789-803.
- [28] Ortega, J., Rheinboldt, W.. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Academic Press, 1970.
- [29] Ortega, J. *The Newton-Kantorovich Theorem*. The American Mathematical Monthly. Vol. 75, nº 6 (1968), pp. 658-660.
- [30] Rieder, A.. *On Convergence Rates of Inexact Newton Regularizations*. Numerische Mathematik, 88 (2001), pp. 347-365.
- [31] Rieder, A.. *On the regularization of nonlinear ill-posed problems via inexact Newton iterations*. Inverse Problems, 15 (1999), pp. 309-327.
- [32] Rieder, A., Lechleiter, A.. *Towards a general convergence Theory of Inexact Newton Regularizations*. Numerische Mathematik, 114 (2010), pp. 521-548.
- [33] Rieder, A.. *Inexact Newton regularization using conjugate gradients as inner iteration*. SIAM, Vol. 43, No 2 (2005), pp. 604-622.
- [34] Rieder, A.. *Keine Problem mit Inversen Problemen. Eine Einführung in ihre stabile Lösung*. Friedr. Wieweg & Sohn Verlag, 2003.

- [35] Rudin, W.. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1970.
- [36] Ruggiero, M., Lopes, V.. *Cálculo Numérico. Aspectos Teóricos e Computacionais*. Person Makron Books, 2^a ed., 1996.
- [37] Scherzer, O. et al. *Variational Methods in Imaging*. Springer, 2009.
- [38] Solodov, M., Izmailov, A.. *Otimização - Volume 2. Métodos Computacionais*. IMPA, 2007.
- [39] Toews, C., Nelson, B.. *Improving de Gauss-Newton Convergence of a Certain Position Registration Scheme*. Inverse Problems 26 (2010).