Departamento de Matemática - UFSC
Exame de Qualificação - Doutorado

March 18, 2016

- Aluno: Felipe Wisniewski
- Banca: Prof. Fabio Silva Botelho e Prof. Clóvis Gonzaga

1. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função estritamente convexa e duas vezes diferenciável.
   Seja $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ e seja $\{\mathbf{x}_k\}$ a sequência definida por,
   $$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \frac{f'(\mathbf{x}_k)}{K}, \ \forall k \in \mathbb{N},$$
   onde $K > 0$ é tal que
   $$\left| I_d - \frac{f''(\mathbf{x})}{K} \right| < \alpha, \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$
   para algum $0 < \alpha < 1$ e onde I_d denota a matriz identidade $n \times n$.
   Mostre que $\{\mathbf{x}_k\}$ é uma sequência de Cauchy cujo limite $\mathbf{x}_0$ é o único ponto do $\mathbb{R}^n$ tal que
   $$f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0},$$
   e
   $$f(\mathbf{x}_0) = \min\{f(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

2. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.
   Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, defina
   $$r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - \langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle.$$
   Mostre que f é convexa se, e somente se,
   $$r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0, \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

3. Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções convexas e diferenciáveis.

   Suponha que $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ seja tal que existe $\lambda \geq 0$ tal que

$$f'(\mathbf{x}_0) + \lambda g'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0},$$

$$g(\mathbf{x}_0) \leq 0,$$

   e

$$\lambda g(\mathbf{x}_0) = 0.$$

   Mostre que

$$f(\mathbf{x}_0) = \min f(\mathbf{x}),$$

   sujeito a

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

   e

$$g(\mathbf{x}) \leq 0.$$

4. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que K é um cone quando,

$$\mathbf{d} \in K \Rightarrow t\mathbf{d} \in K, \ \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

   Dado um cone $K \subset \mathbb{R}^n$ não vazio, define-se o cone dual K^*, por

$$K^* = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle \mathbf{y}, \mathbf{d} \rangle \leq 0, \ \forall \mathbf{d} \in K\}.$$

   Sejam $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ cones não-vazios.

   (a) Prove que $K_1 \cup K_2$ é um cone e $(K_1 \cup K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$.

   (b) Prove que $K_1 + K_2$ é um cone e $(K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$.