Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas - Departamento de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática e Matemática Aplicada

Professores: Juliano B. Francisco e Clóvis C. Gonzaga

Primeiro Exame de Qualificação

Área: Otimização

Data: 20/08/2014 **Horário:** 14:00 às 17:00 hrs

Nome: ______________________________

Assinatura: ______________________________

Instruções:

- Coloque nome em todas as folhas.
- A prova possui 04 questões.
- A prova é individual e sem consulta.
- Respostas sem apresentar o desenvolvimento do raciocínio serão desconsideradas.

1) Considere o problema,

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) \\ s.a & h(x) = 0, \end{array}$$

em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Suponha que $x^* \in \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições suficientes de segunda ordem com vetor de multiplicadores de Lagrange λ_* e que $h'(x^*)$ tem posto completo (satisfaz a LICQ). Mostre que existe $\rho_0 > 0$ tal que, para todo $\rho \geq \rho_0$, x^* é um mínimo local de $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} L_\rho(x)$, em que $L_\rho(x) = f(x) + h(x)^T \lambda_* + \dfrac{\rho}{2}\|h(x)\|_2^2$. (Dica: mostre que x^* satisfaz as condições suficientes de segunda ordem de $\min \ L_\rho(x)$)

2) Suponha que $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições necessárias de primeira ordem do problema,

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ s.a & l \leq x \leq u, \end{array}$$

onde $l_i < u_i,\ i \in \{1, \ldots, n\}$. Mostre que $\begin{cases} \text{se } a_i = l_i, & \dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} \geq 0, \\ \text{se } a_i = u_i, & \dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} \leq 0, \\ \text{se } l_i < a_i < u_i, & \dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0. \end{cases}$

3) (Corrigida) Considere um problema de programação não linear com restrições de igualdade e desigualdade, em que f é a função objetivo e todas as funções envolvidas são convexas e $C^2(\mathbb{R}^n)$. Defina $\ell(x, \lambda, \mu)$ a função Lagrangeana do problema, onde $\lambda \in \mathbb{R}^m$ e $\mu \in \mathbb{R}^p$ são os vetores de multiplicadores de Lagrange associados as restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente. Mostre que todo ponto (x, λ, μ) viável do problema dual (de Wolfe) satisfaz $\ell(x, \lambda, \mu) \leq f(z)$, para todo z viável do problema primal.

4) Seja $x^* \in \mathbb{R}^n$ um mínimo local (irrestrito) para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Quais condições deve-se impor sobre f e x^* para que o método de Newton aplicado ao problema de minimizar $f(x)$ convirja quadraticamente para x^*. Demostre esta convergência quadrática. (Aqui refere-se à convergência localmente quadrática do Newton.)

BOM TRABALHO!