Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas - Departamento de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática e Matemática Aplicada

Professores: Juliano B. Francisco e Clóvis C. Gonzaga

Primeiro Exame de Qualificação

Área: Otimização

Data: 28/2/2014 **Horário:** 14:00 às 17:00 hrs

Nome: ____

Assinatura: ____

Instruções:

- Coloque nome em todas as folhas.
- A prova possui 04 questões.
- A prova é individual e sem consulta.
- Respostas sem apresentar o desenvolvimento do raciocínio serão desconsideradas.

1) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e suponha que existe $L > 0$ tal que $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2 \leq L\|x - y\|_2$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(a) Mostre que $f(y) \leq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \dfrac{L}{2}\|y - x\|_2^2$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(b) Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e considere a sequência gerada por $x_{k+1} = x_k - \dfrac{1}{\sigma_k}\nabla f(x_k)$. Supondo que $\sigma_k \geq L$ para todo $k \geq 0$, mostre que $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$, para todo $k \geq 0$. Conclua que se o conjunto de nível $L_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(x_0)\}$ é limitado então $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ admite pelo menos um ponto de acumulação.

(c) Suponha que $\{\sigma_k\}$ é limitada. Sob as hipóteses do item (b), mostre que todo ponto de acumulação da sequência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é um ponto estacionário (crítico) de $\min f(x)$, sujeito a $x \in \mathbb{R}^n$.

2) Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função convexa, $S \in \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e considere o problema de programação convexa:

$$\min f(x), \text{ sujeito a } x \in S.$$

Mostre que se x^* é um minimizador local então ele é global e, se f é estritamente convexa, então x^* é o único minimizador global.

3) Considere a atualização BFGS dos Métodos Quasi-Newton,

$$B_{k+1} = B_k + \frac{y_k y_k^T}{s_k^T y_k} - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k B_k s_k},$$

em que $s_k = x_{k+1} - x_k$ e $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$. Mostre que se B_k é simétrica definida positiva e $y_k^T s_k > 0$ então B_{k+1} também é simétrica definida positiva. Por quê este resultado é relevante para o método BFGS? Justifique sua resposta.

4) Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ambas de classe C^2, e considere o problema de otimização pertubado PNL(ϵ),

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) \\ s.a & h(x) = \epsilon. \end{array}$$

Denote por $x^*(\epsilon)$ a solução de PNL(ϵ) e seja x^* a solução de PNL(0) com multiplicadores de lagrange $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$. Suponha que $h'(x^*)$ tem posto completo. Prove que $\dfrac{\partial f}{\partial \epsilon_i}(x^*(0)) = -\lambda_i^*$, para $i = 1, \ldots, m$. (Dica: use o teorema da Função Implícita para mostrar a existência de $x^*(\epsilon)$ e depois as condições de otimalidade de PNL(ϵ) para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial \epsilon_i}(x^*(0))$.)

BOM TRABALHO!