Exame de Qualificação em Geometria
Pós-Graduação em Matemática MTM/UFSC
S 2016-2: Segunda chamada

Respostas sem justificativas serão desconsideradas. Bom trabalho!

Exercício 1:

Seja f uma função real de classe C^∞ sobre $\mathbb{R}^n$, satisfazendo $f(0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x_n} \neq 0$. Para $x \in \mathbb{R}^n$, seja $y = \Phi(x) := (x_1, \cdots, x_{n-1}, f(x))$. Lembramos que a aplicação Φ é um $C^\infty-$difeomorfismo em uma vizinhança U de $0 \in \mathbb{R}^n$. Escreva a forma explicita dos campos vetoriais Y_i definidos em U por $Y_i = \Phi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial y_i})$, para $1 \leq i \leq n$.

Exercício 2 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e denotamos por $\{X_1, \cdots, X_n\}$ a sua base sobre um corpo $\mathbb{K}(= \mathbb{R}, \mathbb{C})$. Pondo

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X_k$$

isto é equivalente a definir aplicações suaves c_{ij}^k, $i, j, k = 1, 2, \cdots n$, de $\mathfrak{g}$ em $\mathbb{K}$.

(i) Prove que as aplicações c_{ij}^k, $i, j, k = 1, 2, \cdots n$, são constantes e satisfazem:

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k \quad \text{e} \quad \sum_{l=0}^{n} c_{ij}^l c_{kl}^m + c_{ik}^l c_{il}^m + c_{ki}^l c_{ji}^m = 0$$

(ii) Calcule as aplicações constantes c_{ij}^k no caso da álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ do grupo $SU(2)$ das matrízes invertíveis unitárias de ordem 2 e determinante igual a 1, sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exercício 3

Seja M variedade C^∞ de dimensão m em $\mathbb{R}^n$.

(a) Seja $p \in M$. Faça a construção do espaço tangente T_pM e do espaço cotangente (dual do espaço tangente) T_pM^*.

(b) Faça construção do fibrado tangente TM e do fibrado cotangente TM^*.

(c) O que é uma seção do fibrado tangente? E do fibrado cotangente?

Exercício 4

Seja M variedade C^∞ de dimensão m. Denote $\Omega^k(M)$ o módulo das $k-$formas diferenciais em M, $k \geq 0$.

(a) Dê a definição da derivada exterior $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ e mostre que

- se $\omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M)$ então $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.
- $d(d\omega) = 0$.

(b) Faça a construção do grupo de cohomologia de de Rham $H_{dR}^p(M)$, $p \geq 0$.

(c) Calcule $H_{dR}^0(M)$.