Exame de Qualificação em Geometria
Pós-Graduação em Matemática MTM/UFSC
S 2016-2

Respostas sem justificativas serão desconsideradas. Bom trabalho!

Exercício 1:

Seja f uma função real de classe C^∞ sobre $\mathbb{R}^n$, satisfazendo $f(0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x_n} \neq 0$. Para $x \in \mathbb{R}^n$, seja $y = \Phi(x) := (x_1, \cdots, x_{n-1}, f(x))$. Lembramos que a aplicação Φ é um $C^\infty-$diferomorfismo em uma vizinhança U de $0 \in \mathbb{R}^n$. Escreva a forma explicita dos campos vetoriais Y_i definidos em U por $Y_i = \Phi_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial y_i})$, para $1 \leq i \leq n$.

Exercício 2

(i) Consideramos o grupo abeliano multiplicativo $G := \mathbb{C}\backslash\{0\}$ dos complexos não nulos. A ação de um elemento fixo $z \in G$ sobre G é o difeomorfismo dado por $L_z(w) := zw$. Encontre os campos vetoriais invariantes a esquerda sobre com respeito a L_z.

(ii) Seja

$$X = \sum_{i=0}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^n$, com X_i funções reais C^∞ nas coordenadas cartesianas $(x_1, \cdots, x_n)$. Munindo $\mathbb{R}^n$ com a sua estructura de groupo de Lie abeliano (com respeito a translação), escreve as condições sobre as funções X_i, $0 \leq i \leq n$, tais que X é invariante.

Exercício 3

Considere os conjuntos

$$S^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 = 2\}, \quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y - x^2 = 0\} \ .$$

(i) Mostre que S^2 e M são subvariedades de $\mathbb{R}^2$.

(ii) Mostre que S^2 e M são transversais.

Exercício 4

Seja $\vec{F} = F_1\frac{\partial}{\partial x} + F_2\frac{\partial}{\partial y} + F_3\frac{\partial}{\partial z}$ campo vetorial de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e defina as formas diferenciais

$$\omega_F = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$$

$$\eta_F = F_1\,dy \wedge dz + F_2\,dz \wedge dx + F_3\,dx \wedge dy \ .$$

(i) Mostre que $d\omega_F = \eta_{\mathrm{rot}\,F}$ e $d\eta_F = \mathrm{div}\,\vec{F}\,dx \wedge dy \wedge dz$.

(ii) Enuncie o Teorema de Stokes para variedades compactas com bordo.

(iii) Enuncie o Teorema de Stokes e o Teorema do Divergente em $\mathbb{R}^3$ e use os itens anteriores para demonstrá-los.