Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

Exame de Qualificação - Equações Diferenciais

12 de Dezembro de 2017

Nome: ______________________________

Assinatura: ______________________________

Questão 1. Seja $M^n(\mathbb{R})$ o espaço das matrizes quadradas de ordem n com a norma dada por

$$\|A\| := \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|,$$

quando $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M^n(\mathbb{R})$.

(a) (1 ponto) Mostre que

$$e^{At} := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i\, t^i}{i!},$$

converge para todo $t \in \mathbb{R}$. Depois conclua que se T é uma matriz invertível de ordem n, então

$$T^{-1}e^{At}T = e^{T^{-1}AT}.$$

(b) (1 ponto) Mostre que

$$\frac{d}{dt}\, e^{At} = A\, e^{At} = e^{At}\, A$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Questão 2. (2 pontos) Seja $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua tal que

$$\langle f(t,x) - f(t,y), x-y\rangle \leq 0, \quad \forall\ (t,x),(t,y) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,$$

onde $\langle\, ,\, \rangle$ denota o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$. Prove que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = \eta, \end{cases} \tag{1}$$

sendo $\eta \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ qualquer, tem no máximo uma solução $\phi(t)$ definida em $[0,\infty)$. Nas condições anteriores a unicidade de solução do PVI (1) é válida em $(-\infty, 0]$?

Questão 3. (2 pontos)

(a) (1 ponto) Seja f uma função real contínua no intervalo $[-L, L]$ satisfazendo $f(-L) = f(L)$. Suponha que $f' \in SC[-L, L]$, o espaço das funções reais seccionalmente contínuas em $[-L, L]$. Prove que a série de Fourier de f converge uniformemente em $[-L, L]$.

(b) (1,5 ponto) Considere a equação do calor

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \end{cases} \tag{2}$$

onde $f \in C([0, L])$, $f(0) = f(L) = 0$ e $f' \in SC[0, L]$. Prove que o problema (2) possui uma única solução $u = u(x, t) \in C([0, L] \times [0, \infty) \cap C^2([0, L] \times (0, \infty))$.

Questão 4. (1,5 pontos) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ uma função que satisfaz $\Delta u \geq 0$ em Ω. Prove que

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

Questão 5. (2 pontos) Considere Ω um aberto regular do $\mathbb{R}^n$. Sejam $x_0 \in \Omega$ e δ_{x_0} a forma linear definida sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ (espaço das funções testes) por

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0), \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

(a) (1 ponto) Prove que $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\Omega)$, onde $\mathcal{D}'(\Omega)$ denota o espaço das distribuições sobre Ω.

(b) (1 ponto) Prove que δ_{x_0} não é definida por função u de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, ou seja, não existe $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(x_0), \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$