Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

Exame de Qualificação - Equações Diferenciais

Agosto de 2015

Nome: ____

Assinatura: ____

(3 pontos) **Questão 1.**

(a) Sejam $R = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \colon \alpha < t < \beta, \quad \delta < s < \gamma\}$ e $f : R \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\frac{\partial f}{\partial s}$ também seja contínua no retângulo R. Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

com $(t_0, y_0) \in R$. Prove que o problema acima tem uma única solução em um intervalo contendo t_0.

(b) Sejam $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. Prove que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2}(t) + p(t)\,\dfrac{dy}{dt}(t) + q(t)\,y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

para $p(t)$, $q(t)$ e $f(t)$ funções contínuas em um intervalo aberto I contendo t_0 tem uma única solução neste intervalo.

(c) Sejam x_1, x_2, x_3 funções reais. Encontre a solução geral do sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + 2x_3(t) \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt}(t) = -2x_1(t) + x_2(t) - 2x_3(t) \\[2ex] \dfrac{dx_3}{dt}(t) = 2x_1(t) - 2x_2(t) + x_3(t). \end{cases}$$

(valor 3,5 pontos) **Questão 2.** Sobre a equação da onda:

(a) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira suave ∂U, e denote $U_T = U \times (0, T]$, $\Gamma_T = \overline{U_T} - U_T$, onde $T > 0$ e considere o problema de Cauchy para a equação da onda:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x), & \text{em } U_T \\ u(x,t) = g(x,t), & \text{sobre } \Gamma_T \\ u_t(x,0) = h(x), & \text{sobre } U, \end{cases} \tag{1}$$

onde $f \in C(U, \mathbb{R})$, $g \in C(\Gamma_T, \mathbb{R})$ e $h \in C(U, \mathbb{R})$.

Prove que existe no máximo uma solução $u \in C^2(\overline{U_T}, \mathbb{R})$ de (1).

(b) Seja $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty), \mathbb{R})$ uma solução de $u_{tt} - \Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $t_0 > 0$ defina o cone

$$C = \{(x,t) \colon 0 \leqslant t \leqslant t_0,\ \|x - x_0\| \leqslant t_0 - t\}.$$

Seja $B(x_0, t_0) = \{x \colon \|x - x_0\| \leqslant t_0\}$ e mostre que se $u \equiv u_t \equiv 0$ em $B(x_0, t_0)$ então $u \equiv 0$ em C.

(3,5 pontos) **Questão 3.**

(a) Defina a transformada de Fourier $\mathcal{F}$ para funções em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Mostre que a aplicação $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ é linear e contínua.

(b) Seja u uma função pertencente ao espaço de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Prove que para todo $k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^k u}{dx^k}\right)(x) = i^k\, x^k\, \mathcal{F}(u)(x).$$

(c) Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Encontre uma solução para o problema abaixo:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & \text{para } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$