Exame de qualificação em Análise Numérica 2016.2

Resolva 2 questões de cada bloco

Bloco A

1. Em que fundamentos teóricos se apoiam os métodos do tipo Runge-Kutta? Exemplifique, formulando um método de Runge-Kutta de 2^a ordem e verificando seu erro de truncamento local. Determine também a região de estabilidade absoluta de tal método.

2. Os métodos de diferenças finitas para a equação da onda

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$$

com condições

$$u(x,0) = f(x),\ \ u_t(x,0) = g(x),\ \ u(0,t) = u(1,t) = 0,$$

exigem o conhecimento de 2 níveis de tempo para o início do processo. Uma das possibilidades é obter a solução numérica no nível $j = 1$ usando a condição inicial $u_t(x,0)$ e o teorema de Taylor fazendo $u(x,0+k) \approx u(x,0) + ku_t(x,0) = f(x) + kg(x)$. Isso produz aproximação de primeira ordem. No entanto, se f tem duas derivadas contínuas é possível obter aproximação de segunda ordem. Podemos obter resultados com ordem mais alta? Como?

3. Considere o método

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{ak}{2h}\left(U_j^n - U_{j-1}^n + U_j^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}\right),$$

para a equação de advecção $u_t + au_x = 0$ em $0 \le x \le 1$, para $t > 0$, com condições de contorno *periódicas*. Aplique a análise de von Neumann a este método. Qual é o fator de amplificação ?

Bloco B

1. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com posto$(A) \le n \le m$ e pseudo-inversa A^+.

a) Mostre que $x^+ = A^+b$ é solução de $\min\limits_x \|Ax - b\|_2$.

b) Explique porque o sistema linear $A^TAx = A^Tb$ sempre tem solução. Mostre que a solução geral para este sistema linear pode ser escrita como

$$x = A^+b + (I - A^+A)h,$$

onde $h \in \mathbb{R}^n$.

c) Se posto$(A) = n$, explique porque $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$.

d) E se $m \le n$ e posto$(A) = m$, qual a expressão para a pseudo-inversa?

2. Descreva o algoritmo de Lanczos como uma especialização do processo de Arnoldi. Qual a relação entre Lanczos e o método de gradientes conjugados aplicado a resolução de $Ax = b$, com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica definida positiva?

3. Seja $b \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n = posto(A)$. Defina o processo iterativo em $\mathbb{R}^n$:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \gamma^2 A^T (b - Ax^{(k)}), \; k \geq 0,$$

onde γ um parâmetro positivo. Reescreva o processo na forma $x^{(k+1)} = Rx^{(k)} + c$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, e determine os valores de γ que garantem convergência. Quando a convergência é assegurada, qual é o limite da sequência?