Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Catarina

Nome: ______________________________ **Assinatura:** ____________________

Exame de Qualificação em Análise
14.03.2016

1. Seja H um espaço de Hilbert de dimensão infinita.

(a) Prove que toda sequência ortonormal em H converge fracamente para o vetor nulo em H.

(b) Prove que toda sequência fracamente convergente em H é limitada.

(c) Dado um vetor $v \in H$ com $\|v\| < 1$, construa uma sequência de vetores unitários que converge fracamente para v.

2. Seja

$$K = \{f \in L_2[a,b] \mid \int_a^b f(t)dt = 0\}.$$

Mostre que K é subespaço fechado de $L_2[a,b]$ e encontre $K^\perp$.

3. Sejam H um espaço de Hilbert e $T : H \longrightarrow H$ uma transformação linear que satisfaz, para quaisquer $u, v \in H$, a expressão

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle.$$

Prove que T é limitada.

4. A *topologia cofinita* em um conjunto X é aquela cujos fechados são X e os seus subconjuntos finitos (incluindo o conjunto vazio). Mostre que $\mathbb{R}$ com a topologia cofinita é separável, mas não é Hausdorff.

5. Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é Lebesgue mensurável, prove que a função $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x,y) = f(x-y)$ é Lebesgue mensurável.

6. Seja (X, S, μ) um espaço de medida finita. Dados $p, q \in (1, \infty)$ com $p < q$, e uma função real S-mensurável f em X, prove que

$$\int_X |f(x)|^q d\mu(x) < \infty \Rightarrow \int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty.$$

7. Sejam (X, S, μ) um espaço de medida com $0 < \mu(X) < +\infty$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função S-mensurável, e para cada inteiro $n \geq 1$ considere o conjunto

$$E_n := \{x \in X \mid n - 1 \leq |f(x)| < n\}.$$

Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mu(E_n) < \infty$, então $f \in L_1(X, S, \mu)$.