Pós-Graduação em Matemática
Universidade Federal de Santa Catarina

Nome: ______________________________ **Assinatura:** ____________________

Exame de Qualificação em Análise
27.08.2015

1. Seja X um espaço de Banach. Dado um subconjunto $A \subseteq X$ definimos A^0 como sendo o subconjunto de X^* (dual topológico de X) formado por todos os funcionais lineares contínuos que se anulam em A. Dado um subconjunto $B \subseteq X^*$, definimos B_0 como sendo a intersecção dos núcleos de todos os funcionais em B. Prove que para todo $A \subseteq X$ e todo $B \subseteq X^*$ tem-se que

(i) $\overline{\operatorname{span}}\, A = (A^0)_0$;

(ii) $\overline{\operatorname{span}}\, B \subseteq (B_0)^0$;

(iii) Mostre, através de um exemplo, que a inclusão em (ii) pode ser própria.

2. Seja H um espaço de Hilbert e seja $\{T_n\}_n$ uma sequência de operadores lineares contínuos em H. Defina as noções de

(a) convergência em norma,

(b) convergência forte, e

(c) convergência fraca de operadores.

Prove que (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) e dê exemplos para ilustrar que estas implicações não são equivalências.

3. Seja X um espaço de Banach e A e B dois subespaços vetoriais fechados de X tais que $X = A \oplus B$. Prove que existe uma constante $k > 0$ tal que

$$\|a\| \leq k\|a+b\|, \qquad \forall a \in A,\ b \in B.$$

4. Seja X um conjunto e $\mathcal{B}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de X. Uma função $\nu : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ é chamada uma *medida complexa* se $\nu(\emptyset) = 0$, e $\nu(\cup_n E_n) = \sum_n \nu(E_n)$, para qualquer família $\{E_n\}_n$ de subconjuntos $\mathcal{B}$-mensuráveis dois a dois disjuntos. Prove que dada uma tal ν, existem medidas (positivas) finitas μ_1, μ_2, μ_3 e μ_4 tais que

$$\nu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E) + i\mu_3(E) - i\mu_4(E), \qquad \forall E \in \mathcal{B}.$$

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha que exista uma função integrável g, definida em $\mathbb{R}$, tal que

$$|f(x,y)| \leq g(x) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Prove que a função F dada por

$$F(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx,$$

está bem definida e é contínua.

6. Seja $(a_n)_n$ uma enumeração do conjunto $\mathbb{Q} \cap (0,1)$, e considere o operador $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ dado por

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, \ldots).$$

Determine o espectro deste operador. O operador T é compacto?

7. Suponha que X é um espaço normado e $S \subseteq X$ é *fracamente limitado*, ou seja, $\varphi(S)$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{C}$ para todo $\varphi \in X^*$. Prove que S é um subconjunto limitado de X.