Universidade Federal de Santa Catarina
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Exame de qualificação de doutorado
Álgebra

Nome:__________________________

1) Seja R um anel que contém pelo menos 2 elementos. Suponha que para cada $a \neq 0$ existe um único b tal que $aba = a$.

- **a)** Mostre que R não tem divisores de zero.
- **b)** Mostre que $bab = b$.
- **c)** Mostre que R possui unidade.
- **d)** Mostre que R é um anel de divisão.

2) Seja R um anel com unidade, mostre os seguintes resultados:

- **a)** Se M e N são dois R-módulos à esquerda simples e $\varphi : M \to N$ é um homomorfismo não nulo de R-módulos, então φ é um isomorfismo.
- **b)** Se M é um R-módulo à esquerda simples, então ${}_R\mathrm{End}(M) = {}_R\mathrm{Hom}(M, M)$ é um anel de divisão.

3) Seja R um domínio principal e M um R-módulo finitamente gerado e sem torção. Mostre que M é um R-módulo livre.

4) Considere R um anel, M um R-módulo à direita e N e P dois R-módulos à esquerda. Mostre o seguinte isomorfismo de grupos abelianos

$$M \otimes_R (N \oplus P) \cong (M \otimes_R N) \oplus (M \otimes_R P)$$

5) Considere R um anel e $f : N \to P$ um morfismo injetivo de R-módulos à esquerda. Mostre que se M um R-módulo projetivo à direita, então o morfismo de grupos abelianos

$$(\mathrm{Id}_M \otimes_R f) : M \otimes_R N \to M \otimes_R P$$

é injetivo.

Coragem, força, determinação!