Florianópolis, 14 de agosto de 2015.
Universidade Federal de Santa Catarina
Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada
Exame de Qualificação para o Doutorado
Área de Concentração: Álgebra
Nome: ________________________________ **Matrícula:** ________________

1. (a) Mostre que se R é um anel unital tal que todo elemento não nulo possui inverso à esquerda, então R é um anel de divisão.

   (b) Mostre que se R é um anel unital artiniano à esquerda sem divisores de 0, então R é um anel de divisão. *Sugestão:* Use o item (a).

   (c) Mostre que todo domínio de integridade artiniano é um corpo.

2. Sejam R um anel unital, M_R e ${}_RN$ R-módulos à direita e à esquerda, respectivamente, e sejam M' e N' submódulos de M e N, respectivamente. Mostre que

$$M/M' \otimes_R N/N' \cong (M \otimes_R N)/K,$$

   em que K é o subgrupo de $M \otimes_R N$ gerado pelos elementos da forma $m' \otimes n$ e $m \otimes n'$, com $m \in M$, $n \in N$, $m' \in M'$ e $n' \in N'$.

3. Sejam R um domínio principal e M um R-módulo livre de posto finito n. Mostre que todo submódulo de M é livre e de posto (finito) menor ou igual a n. *Sugestão:* Use indução sobre o posto de M.

4. Seja R um anel unital. Considere as definições abaixo.
   Definição. Um R-módulo à esquerda ${}_RM$ é dito ser *Dedekind finito* se o único R-módulo à esquerda N tal que $M \cong M \oplus N$ é o R-módulo nulo $N = \{0\}$.
   Definição. Um R-módulo à esquerda ${}_RM$ é dito *hopfiano* se todo epimorfismo $\varphi : M \longrightarrow M$ é um isomorfismo.

   (a) Mostre que todo R-módulo hopfiano é Dedekind finito.

   (b) Mostre que se M é um R-módulo projetivo, então a recíproca do item (a) é verdadeira. *Sugestão:* Para um epimorfismo $\varphi : M \longrightarrow M$, considere a sequência

$$0 \longrightarrow \ker \varphi \longrightarrow M \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Bom exame!