Florianópolis, 9 de agosto de 2013.
Universidade Federal de Santa Catarina
Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada
Exame de Qualificação para o Doutorado
Área de Concentração: Álgebra
Nome: ______________________________ **Matrícula:** ______________

1. Sejam R um anel unital, M um R-módulo à esquerda, N um submódulo de M e $f : N \longrightarrow M$ e $g : M \longrightarrow N$ R-homomorfismos.

   (a) Mostre que se N é noetheriano, então f é epimorfismo se, e somente se, f é isomorfismo.

   (b) Mostre que se N é artiniano, então g é monomorfismo se, e somente se, $N = M$ e g é isomorfismo.

2. Sejam R um anel unital e M um R-módulo à esquerda. O **dual** de M é definido como o R-módulo à direita $M^* = \mathrm{Hom}(M, R)$ e o **bidual** de M é definido como o R-módulo à esquerda $M^{**} = (M^*)^*$. Existe um R-homomorfismo natural

$$\begin{aligned} \Delta : M &\longrightarrow M^{**} \\ m &\longmapsto m^{**}, \end{aligned}$$

   em que $m^{**}(f) = f(m)$. M é dito **semirreflexivo** se Δ é um monomorfismo.

   (a) Mostre que M é semirreflexivo se, e somente se, M pode ser imerso em algum produto direto de cópias de R. Conclua que todo módulo livre e todo módulo projetivo são semirreflexivos.

   (b) Suponha que R seja um domínio de integridade. Mostre que se M é semirreflexivo, então M é livre de torção.

3. Seja R um domínio de integridade. Um R-módulo M é denominado **divisível** se, para quaisquer $r \in R$ não nulo e $m \in M$, existe $m' \in M$ tal que $m = rm'$.

   (a) Mostre que M é um R-módulo divisível se, e somente se, para qualquer $r \in R$, todo R-homomorfismo $f : (r) \longrightarrow M$ se estende a um R-homomorfismo de R para M.
   Observação: (r) denota o ideal gerado por r.

   (b) Mostre que todo módulo injetivo é divisível e use o critério de Baer para mostrar que o contrário também é válido se R é um domínio principal.

   (c) Mostre que se R não é um corpo, então o único R-módulo projetivo e injetivo é o módulo nulo.

   Sugestão para o item (c): Seja M um R-módulo projetivo e injetivo não nulo. Verifique que M pode ser imerso em um módulo livre e use que M é divisível para mostrar que R é corpo.

4. Seja k um corpo. Uma **álgebra de Lie** sobre k é um par $(\mathfrak{g}, [,])$ (colchete de Lie), em que $\mathfrak{g}$ é um k-espaço vetorial e $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ é uma aplicação k-bilinear antissimétrica (i.e., $[x, y] = -[y, x]$, $\forall x, y \in \mathfrak{g}$) e que satisfaz a identidade de Jacobi:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]], \; \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Sejam $(\mathfrak{g}, [,])$ e $(\mathfrak{h}, [,])$ duas álgebras de Lie. Uma aplicação k-linear $\alpha : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ diz-se um **morfismo de álgebras de Lie** se $\alpha([x, y]) = [\alpha(x), \alpha(y)]$.

(a) Mostre que toda álgebra associativa U sobre k é uma álgebra de Lie com colchete definido por $[x, y] = xy - yx$, para quaisquer $x, y \in U$.
Observação: Pode supor que $[,]$ *assim definido seja* k*-bilinear.*

(b) Mostre que todo morfismo de álgebras associativas é morfismo de álgebras de Lie.

5. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Considere a álgebra tensorial

$$T(\mathfrak{g}) = \oplus_{n \geq 0} T^n(\mathfrak{g}) = k \oplus \mathfrak{g} \oplus (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \oplus (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \oplus \cdots .$$

Essa é uma álgebra associativa cujo produto está induzido pela associatividade do produto tensorial, isto é, $T^s(\mathfrak{g}) \otimes T^r(\mathfrak{g}) = T^{s+r}(\mathfrak{g})$ e que possui unidade $1 = 1_k$.

Propriedade universal da álgebra tensorial: Dada uma k-álgebra associativa A, $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow A$ um morfismo de k-espaços vetoriais, existe um único morfismo de k-álgebras associativas $\varphi : T(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$ tal que $\varphi \circ \iota = \phi$, em que $\iota : \mathfrak{g} \longrightarrow T(\mathfrak{g})$ é a inclusão de $\mathfrak{g}$ em $T(\mathfrak{g})$.

Uma **álgebra envolvente** (ou **universal**) de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma k-álgebra associativa $\mathfrak{b}$ munida de um morfismo de álgebras de Lie $\iota : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{b}$ que satisfaz: dada uma k-álgebra associativa A e $\eta : \mathfrak{g} \longrightarrow A$ um morfismo de álgebras de Lie, então existe único morfismo de k-álgebras associativas $F : \mathfrak{b} \longrightarrow A$ tal que $F \circ \iota = \eta$.

Agora, considere o ideal I da álgebra $T(\mathfrak{g})$ gerado por elementos da forma: $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ para $x, y \in \mathfrak{g}$.

Mostre que $\mathfrak{u}(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I$ é uma álgebra envolvente da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e que tal álgebra é única a menos de isomorfismo.

6. (a) Defina módulo semissimples. Mostre que submódulos e quocientes de módulos semissimples são semissimples.

(b) Enuncie o Teorema de Wedderburn e diga qual a sua principal consequência.

Bom exame!