Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

C*-álgebra de Rotação Irracional: Projeções e Morita Equivalência

Eneilson Campos Fontes

Orientador: Prof. Dr. Eliezer Batista

Florianópolis
Outubro de 2009

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

C*-álgebra de rotação irracional:
Projeções e Morita equivalência

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Física-Matemática.

Eneilson Campos Fontes
Florianópolis
Outubro de 2009

C*-álgebra de rotação irracional: Projeções e Morita equivalência

por

Eneilson Campos Fontes

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre" em Matemática, Área de Concentração em Física-Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Clóvis Caesar Gonzaga
Coordenador da Pós-Graduação em Matemática

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Eliezer Batista (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Ruy Exel Filho

Prof. Dr. Severino Toscano do Rêgo Melo

Prof. Dr. Danilo Royer

Florianópolis, Outubro de 2009.

Aos meus pais

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, por serem meus maiores incentivadores, pelo apoio emocional e financeiro. Aos professores Eliezer Batista, pela paciência e dedicação, Danilo Royer pela importante contribuição no terceiro capítulo deste trabalho, e também aos professores Mario Zambaldi, Ruy Charão, Marcelo Carvalho, Celso Doria, Ruy Exel, que de uma forma ou de outra contribuiram significativamente para que eu conseguisse concluir com êxito este começo de estudos em matemática. Aos meus colegas Lucas Spillere e Graciele Amorim, pelas intermináveis e agradáveis horas de estudos e também ao Alisson, Daiane e Felipe, pelos inesquecíveis momentos de descontração. Agradeço a secretária da Pós-Graduação Elisa Amaral, pelo constante apoio em questões burocráticas. Ao CNPq, pelo suporte financeiro

Resumo

Neste trabalho apresentamos as duas principais caracterizações da $C^\star$- álgebra de rotação irracional A_θ: como objeto universal na categoria das $C^\star$-algebras unitais e como um produto cruzado. Estudamos as suas projeções, culminando no cálculo do seu grupo-$\mathcal{K}_0$, utilizando a técnica desenvolvida por Pimsner e Voiculescu que consiste no mergulho da $C^\star$-álgebra de rotação irracional A_θ em uma AF-álgebra. Também apresentamos o importante resultado que afirma a Morita Equivalência de duas $C^\star$-algebras de rotação irracional para argumentos na mesma órbita da ação do grupo $GL(2,\mathbb{Z})$.

Abstract

In this work we present the two main characterizations of the irrational rotation $C^{\star}$-algebra A_{θ}: as universal object in the category of unital $C^{\star}$-algebras and as a crossed product, as well as a study on its projections culminating in the calculation of its $\mathcal{K}_0$-group using the technique developed for Pimsner and Voiculescu which consists in imbedding the irrational rotation $C^{\star}$-algebra into an AF-algebra. Also we present the important result that stated the Morita Equivalence of two irrational rotation $C^{\star}$-algebras for arguments in the same orbit of the action of the group $GL(2,\mathbb{Z})$.

Sumário

Introdução

Historicamente o primeiro exemplo de um espaço não comutativo surgiu a partir da formulação de Heinsenberg da lei observacional da espectroscopia. De fato, a mecânica quântica mostrou que o espaço de fase do sistema mecânico dado por um único átomo não pode ser considerado como uma variedade. Esta conclusão foi ditada pelos resultados experimentais da espectroscopia. Mais precisamente, no começo do século XX uma grande quantidade de dados experimentais foram coletados sobre o espectro de vários elementos químicos. Estes espectros obedecem experimentalmente a leis importantes como por exemplo, o princípio de combinação de Ritz-Rydberg. Tal princípio pode ser enunciado como: "linhas espectrais são indexadas por pares de rótulos", ou seja certos pares de linhas espectrais quando expressadas em termos de frequências se somam para dar origem a outra linha no espectro. Além disso, isto acontece quando os rótulos são da forma i, j e j, k. O que Heisenberg entendeu, por analogia com o tratamento clássico de interação de um sistema mecânico com o campo eletromagnético é que o princípio de combinação de Rietz-Rydberg obedece a uma certa fórmula algébrica para o produto de quaisquer duas quantidades físicas observáveis associadas ao sistema atômico. Heisenberg exibiu a seguinte fórmula para o produto de dois observáveis,

$$(AB)_{(i,k)} = A_{(i,j)}B_{(j,k)}$$

e observou que álgebra obtida não era comutativa,

$$AB \neq BA$$

Mas Heisenberg não conhecia a teoria de matrizes e suas idéias somente foram estendidas a um nível mais abstrato, por Max Born, Pascual Jordan e Paul Dirac que já dominavam técnicas de álgebra matricial.

A descoberta de Heisenberg mostrou que a familiar dualidade entre um espaço e sua álgebra de coordenadas (isto é a álgebra de funções sobre este espaço) é também inadequada ao modelo do espaço de fase de sistemas físicos microscópicos. A idéia básica então é estender esta dualidade. O trabalho de Gelfand inter-relaciona $C^\star$-álgebras comutativas com espaços topológicos Haussdorff localmente compactos. Existe uma quantidade muito grande de espaços que possuem um significado geométrico óbvio, mas que são melhores descritos por uma algebra de coordenadas não comutativa. Os primeiros exemplos provém de espaços de fase em mecânica quântica, como mencionamos brevemente acima, no entanto existem muitos outros, como por exemplo o toro não comutativo, o espaço de folhas de folheação, o espaço de representações irredutíveis de grupos discretos, zona de Brillouin na física do estado sólido, e também vários outros modelos recentes. A característica principal destes espaços é que quando se tenta analizá-los sob o ponto de vista usual da teoria de conjuntos, as ferramentas usuais não são úteis pela simples razão, muito embora como um conjunto eles tenham a cardinalidade do contínuum, é impossível descrever separadamente seus pontos por um conjunto finito (ou enumerável) de funções explícitas. Em outras palavras, qualquer família enumerável explícita de invariantes não separa pontos.

Descreveremos brevemente o princípio geral que nos permite mesmo assim representar os espaços mencionados por uma álgebra de funções, que não será comutativa. Estes espaços são obtidos como quocientes de relações de equivalência. Considere um espaço ordinário comutativo $\mathcal{X}$, que pode ser uma variedade suave ou mais geralmente um espaço topológico Hausdorff localmente compacto. Este pode ser descrito via sua álgebra de funções $\mathcal{C}_0(\mathcal{X})$, e $C^\star$-álgebra abeliana. Suponha que estejamos interessados em estudar o quociente $\mathcal{Y} = \mathcal{X}/\sim$ de $\mathcal{X}$ por uma dada relação de equivalência. Em geral não se espera que este quociente represente um bom espaço, até mesmo quando $\mathcal{X}$ é uma variedade suave, o quociente $\mathcal{Y}$ pode não ser Hausdorff. Usualmente se define $\mathcal{C}(\mathcal{Y})$ como sendo o espaço das funções sobre $\mathcal{X}$ que são invariantes sobre a relação de equivalência definida, ou seja:

$$\mathcal{C}(\mathcal{Y}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathcal{X}) : f(a) = f(b), \forall a \sim b\}$$

Claramente para uma "má"relação de equivalência tipicamente se consegue desta forma somente funções constantes ou seja $\mathcal{C}(\mathcal{Y}) = \mathbb{C}$. Existe um modo melhor para associar ao espaço quociente $\mathcal{Y}$ um anel de funções que é não trivial para qualquer relação de equivalência. No entanto isto exige a quebra da comutatividade. Podemos considerar funções de duas variáveis f_{ab} definidas sobre o gráfico da relação de equivalência, com um produto que não é mais o produto comutativo ponto a ponto, mas o produto de convolução não comutativo. Em geral os elementos na álgebra

$$"\mathcal{C}(\mathcal{Y})" = \{f_{ab} : a \sim b\}$$

agem como operadores limitados sobre o espaço $\mathcal{L}^2(\mathcal{Y})$. Isto também garante a convergência na norma de operadores do produto de convolução

$$(f * g)_{ac} = \sum_{a \sim b \sim c} f_{ab} g_{bc}$$

O toro não comutativo é considerado como um exemplo protótipo de um espaço não comutativo desde que este ilustra muito claramente as propriedades e estruturas das geometrias não comutativas. O toro não comutativo representou um papel chave no começo do desenvolvimento da teoria na década de 80 dando origem à análogos não comutativos de fibrados vetoriais, conexões, curvaturas, etc. Pode-se pensar o toro não comutativo como um caso especial de espaços não comutativos gerados por folheações. Vamos discutir um pouco este ponto de vista.

Seja $\theta \in \mathbb{R}$, as curvas integrais do campo de vetores

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1} + \theta \frac{\partial}{\partial x_2},$$

definem uma folheação $\mathcal{F}_\theta$ sobre o toro $\mathbb{T}^2$. Se θ é racional, cada folha é uma circunferência. Se θ é irracional cada folha é densa, de fato, uma cópia de $\mathbb{R}$, "colocada densamente"no toro, e a folheação induzida é chamada folheação de Kronecker $\mathcal{F}_\theta$. No espaço de folhas desta folheção, $\mathbb{T}^2/\mathcal{F}_\theta$, é um espaço não discreto, sem nenhum interesse. No entanto existe a $C^\star$-álgebra associada a folheação, $C^\star(\mathbb{T}^2/\mathcal{F}_\theta)$, que é não trivial e que descreve as propriedades topológicas deste espaço de folhas. Seja A_θ a $C^\star$-álgebra universal gerada por dois unitários u e v, com a relação de comutação

$$uv = e^{-2\pi i\theta} vu.$$

É a álgebra de rotação irracional, toro não comutativo ou toro quântico, que generaliza a álgebra de funções sobre o toro de dimensão dois. Um elemento genérico de A_θ é

$$\widehat{a} = \sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{m=M_1}^{M_2} a_{mn} u^m v^n,$$

e a família destes elementos formam uma subálgebra densa em A_θ.

Esta família é muito mais complicada que $C(\mathbb{T}^2)$, cujo os elementos são funções contínuas:

1)$C(\mathbb{T}^2)$ possui muitos ideais e A_θ é simples;

2)$C(\mathbb{T}^2)$ é comutativa e A_θ não. De fato seu centro está formado somente por escalares;

3)A_θ tem um único traço e $C(\mathbb{T}^2)$ tem muitos traços;

4)A_θ possui muitas projeções e $C(\mathbb{T}^2)$ somente $\{0, 1\}$.

No capítulo 1 apresentamos brevemente a construção da $C^\star$-álgebra universal, para em seguida caracterizar a $C^\star$-álgebra de rotação irracional A_θ de modo abstrato, ou seja como um objeto universal na categoria das $C^\star$-álgebras. Na sequência, estudaremos um pouco da teoria de produtos cruzados dando ênfase para o caso em que A é uma $C^\star$-álgebra com unidade e G é um grupo discreto. E encerraremos o capítulo mostrando a caracterização concreta de A_θ. No segundo capítulo faremos um estudo sobre as projeções de A_θ, mostraremos que o traço sobre A_θ fica completamente determinado quando restrito às suas projeções, e para concluir este fato, apresentaremos a técnica desenvolvida por Pimsner e Voiculescu que consiste no mergulho da álgebra A_θ em uma AF álgebra na qual se tem conhecimento da estrutura projetiva. No capítulo 3 definiremos uma relação de morita equivalência forte, provaremos quando duas álgebra de rotação irracional são fortemente morita equivalentes. Além disso, acrescentamos a este trabalho quatro apêndices onde constam definições e resultados básicos utilizados ou mencionados no decorrer do texto.

Capítulo 1

Álgebra de Rotação Irracional A_θ

1.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos a algebra de rotação irracional A_θ sob dois pontos de vista, o algébrico, ou seja A_θ como um objeto universal na categoria das $C^\star$-algebras e o ponto de vista concreto, ou seja A_θ gerada por operadores unitários e certas relações. Seja θ um número irracional, considere a ação de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{S}^1$, no sentido das potências do operador rotação dado por $vf(t) := f(t+\theta)$. Consideremos tal operador v agindo sobre o espaço $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ das funções contínuas no círculo unitário, donde teremos $v \in Aut(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1))$. Portanto temos uma ação de $\mathbb{Z}$ sobre o grupo $Aut(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1))$ o que mais tarde associaremos a $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1) \rtimes \mathbb{Z}$ como sendo a definição da álgebra A_θ.

1.2 $C^\star$-algebra universal

A $C^\star$-álgebra universal é um objeto na categoria das $C^\star$-algebras que é construído de modo a conter elementos específicos e satisfazer relações pré-determinadas. Para sua construção consideremos inicialmente um conjunto $\mathcal{G}$ arbitrário, que chamaremos de conjunto de geradores e defina

$$\mathcal{G}^\star = \{g^\star / g \in \mathcal{G}\},$$

de modo que $\mathcal{G} \bigcap \mathcal{G}^\star = \emptyset$.

Defina também o seguinte conjunto:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}} = \{r_1 \cdots r_n / r_1, \cdots, r_n \in \mathcal{G} \cup \mathcal{G}^\star \quad e \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Podemos interpretar $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ como sendo o conjunto das "palavras"finitas escritas com as letras do "alfabeto"$\mathcal{G} \cup \mathcal{G}^\star$; por isso, às vezes nos referiremos ao conjunto $\mathcal{G}$ como sendo o conjunto de geradores.

Considere sobre $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ o produto por concatenação,

$$r_1 \cdots r_n . s_1 \cdots s_m = r_1 \cdots r_n s_1 \cdots s_m$$

e agora defina a extensão linear de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$, ou seja:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{G}} = span(\mathcal{F}_{\mathcal{G}}) = \{ \sum^{finito} \lambda_r r / r \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}}, \lambda_r \in \mathbb{C}\}$$

Considere em $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ soma e multiplicação por escalar usuais, um produto que seja distributivo em relação a soma e que nos geradores seja da forma:

$$(\lambda_r r)(\lambda_s s) = (\lambda_r \lambda_s)(r.s)$$

para todo $r, s \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}}$,$\lambda_r, \lambda_s \in \mathbb{C}$.

Defina em $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ a seguinte operação:

$$\begin{array}{rccc} \star : & \mathcal{F}_{\mathcal{G}} & \longrightarrow & \mathcal{F}_{\mathcal{G}} \\ & r_1 \cdots r_n & \longmapsto & r_n^\star \cdots r_1^\star, \end{array}$$

onde

$$r_i^\star = \begin{cases} g, & \text{se} \quad r_i = g^\star \in \mathcal{G}^\star \\ g^\star, & \text{se} \quad r_i = g \in \mathcal{G} \end{cases}$$

e em $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$,

$$\begin{array}{rccc} \star : & \mathcal{B}_{\mathcal{G}} \longrightarrow & \mathcal{B}_{\mathcal{G}} \\ \sum \lambda_r r & \longmapsto & \sum \overline{\lambda}_r r^\star, \end{array}$$

Verifica-se sem dificuldades que a operação $\star$ definida acima satisfaz as propriedades de uma involução. Portanto temos que $(\mathcal{B}_{\mathcal{G}}, +, ., \star)$ é uma $\star$-algebra.

Definição 1.1. *Uma relação em $\mathcal{G}$ é um par (x, η) onde $x \in \mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ e $\eta \in \mathbb{R}_+$.*

Observação 1.1. *A finalidade das relações na construção da $C^\star$-álgebra universal é garantir que a $C^\star$-álgebra satisfaça certas propriedades. Se a relação (x, η) for incluída na construção, a desigualdade $\|x\| \leq \eta$ será satisfeita dentro da $C^\star$-álgebra universal.*

Fixemos um conjunto $\mathcal{R}$ de relações.

Do modo como foi definido relação, uma relação da forma $x = y$ não é permitida. Uma maneira de expressar tal relação sob a forma da definição 1.1 é incluirmos a relação $(x - y, 0)$ em $\mathcal{R}$. Desta forma, pela observação anterior na $C^\star$-álgebra universal teremos,

$$\|x - y\| \leq 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Definição 1.2. *Uma representação de $\mathcal{G}$ que satisfaz $\mathcal{R}$, um conjunto de relações, é um $\star$-homomorfismo $\rho : \mathcal{B}_{\mathcal{G}} \to \mathcal{A}$, sendo $\mathcal{A}$ uma $C^\star$-álgebra, tal que,*

$$\|\rho(x)\| \leq \eta,$$

para todo par $(x, \eta) \in \mathcal{R}$.

Definição 1.3. *Um par $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ é dito ser admissível se, para todo $g \in \mathcal{G}$, existe $\eta_g \in \mathbb{R}_+$ tal que*

$$\|\rho(g)\| \leq \eta_g,$$

para toda representação ρ de $\mathcal{G}$ que satisfaz $\mathcal{R}$.

O próximo passo na construção da $C^\star$-álgebra universal seria definir convenientemente uma norma $(\|.\|)$ sobre $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ e garantir que com esta tal norma tenhamos uma $C^\star$ álgebra. Na tentativa de definir uma norma conseguiremos inicialmente a $C^\star$-seminorma $|||.||| : \mathcal{B}_{\mathcal{G}} \to \mathbb{R}_+$ definida por:

$$|||x||| = \sup_{\rho \text{ rep. de } (\mathcal{G},\mathcal{R})} \{\|\rho(x)\|\}$$

e a $C^\star$-norma é obtida quando passamos ao quociente de $\mathcal{B}_\mathcal{G}$ pelo ideal fechado $\mathcal{N} = \{x \in \mathcal{B}_\mathcal{G} / |||x||| = 0\}$, ou seja

$$\begin{array}{rccc} \|.\| : & \mathcal{B}_\mathcal{G}/\mathcal{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & \overline{x} & \longmapsto & |||x||| \end{array}$$

é uma $C^\star$-norma, onde $\overline{x}$ denota a classe de equivalência do elemento $x \in \mathcal{B}_\mathcal{G}$ em $\mathcal{B}_\mathcal{G}/\mathcal{N}$, para maiores detalhes, ver [1]. Desta forma definimos:

Definição 1.4. *A $C^\star$-álgebra universal gerada por $\mathcal{G}$ e com relações $\mathcal{R}$, denotada por $C^\star(\mathcal{G}, \mathcal{R})$, é o completamento de $\mathcal{B}_\mathcal{G}/\mathcal{N}$ na norma $\|.\|$, isto é,*

$$C^\star(\mathcal{G}, \mathcal{R}) = \overline{\mathcal{B}_\mathcal{G}/\mathcal{N}}^{\|.\|}.$$

Observação 1.2. *Identificando $\mathcal{B}_\mathcal{G}/\mathcal{N}$ como uma sub-$\star$-álgebra de $C^\star(\mathcal{G}, \mathcal{R})$, podemos definir a projeção canônica*

$$\begin{array}{rccc} i : & \mathcal{B}_\mathcal{G} & \longrightarrow & C^\star(\mathcal{G}, \mathcal{R}) \\ & x & \longmapsto & \overline{x} \end{array}$$

Proposição 1.1. *(Propriedade Universal)Sejam A uma $C^\star$-álgebra e $\rho : \mathcal{B}_\mathcal{G} \to A$ uma representação de $\mathcal{G}$ que satisfaz $\mathcal{R}$. Então existe um único homomorfismo*

$$\psi : C^\star(\mathcal{G}, \mathcal{R}) \to A$$

tal que $\psi \circ i = \rho$.

Demonstração:

A demonstração pode ser encontrada em [1].

□

1.3 A_θ como $C^\star$-álgebra universal

O que faremos agora é a construção da álgebra A_θ como um objeto universal na categoria das $C^\star$-algebras.

Seja A uma $C^\star$- álgebra com unidade, $\theta \in$ (0,1) irracional, $\mathcal{G} = \{u, v\}$ um conjunto de geradores e

$$\mathcal{R} = \{u, v / u^\star u = uu^\star = I; vv^\star = v^\star v = I; uv = e^{2\pi i\theta} vu\}$$

um conjunto de relações. Vamos provar que existe $C^\star(\mathcal{G},\mathcal{R})$.

Lema 1.1. *O par $(\mathcal{G},\mathcal{R})$ definido anteriormente é admissível.*

Demonstração:
Se $\rho : G \to A$ é uma representação:

$$\rho(u^\star u) = \rho(u)^\star \rho(u) = 1_A$$

e

$$\rho(v^\star v) = \rho(v)^\star \rho(v) = 1_A$$

e ainda

$$\|\rho(u)\|^2 = \|\rho(u)^\star \rho(u)\| = \|1_A\|$$

o mesmo segue para v.

□

Então existe a **C*-álgebra universal** à qual denominamos álgebra de rotação irracional e denotamos por $C^\star(\mathcal{G},\mathcal{R}) =: A_\theta$.

Lema 1.2. $u^\star v = e^{-2\pi i\theta} v u^\star$.

Demonstração:
Se $uv = e^{2\pi i\theta} vu \Rightarrow v^\star u^\star = e^{-2\pi i\theta} u^\star v^\star \Rightarrow u^\star = e^{-2\pi i\theta} v u^\star v^\star \Rightarrow u^\star v = e^{-2\pi i\theta} v u^\star$.

□

Lema 1.3. *Vale que $u^k v^l = e^{2\pi i\theta kl} v^l u^k$ para $l, k \in \mathbb{Z}$, onde $u^k = (u^\star)^{|k|}$ para $k < 0$, $v^l = (v^\star)^{|l|}$ para $l < 0$.*

Demonstração:
A prova deste lema é trivial.

□

Seja,

$$\widehat{A}_\theta = span\{\overline{u}^k\overline{v}^l / k, l \in \mathbb{Z}\}$$

Pelo lema anterior, segue que $\widehat{A}_\theta$ é subálgebra densa em A_θ.

Nosso objetivo a partir de agora é exibir de modo concreto a $C^\star$-álgebra A_θ. Dada uma $C^\star$-álgebra com unidade A, já sabemos que existe um único $\star$-homomorfismo $\psi : C^\star(\mathcal{G}, \mathcal{R}) \to A$, e veremos adiante que esta aplicação é de fato um isomorfismo.

Proposição 1.2. *Para todo λ , μ de módulo unitário existe um automorfismo em A_θ $\rho_{\lambda,\mu}$ tal que $\rho_{\lambda,\mu}(u) = \lambda u$ e $\rho_{\lambda,\mu}(v) = \mu v$.*

Demonstração:

Consideremos a aplicação:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\lambda,\mu} : \mathcal{G} &\to A_\theta \\ u &\mapsto \lambda u \\ v &\mapsto \mu v \end{aligned}$$

Temos que $\tilde{\rho}_{\lambda,\mu}$ satisfaz às relações, logo pela propriedade universal da álgebra A_θ sabemos que existe um único $\star$-homomorfismo $\rho_{\lambda,\mu}$ de A_θ em A_θ, e da mesma forma $\rho_{\bar{\lambda},\bar{\mu}}$ é $\star$-homomorfismo de A_θ em A_θ e além disso,

$$\rho_{\lambda,\mu} \circ \rho_{\bar{\lambda},\bar{\mu}} = Id_{A_\theta}$$

$\square$

Observação 1.3. *A injetividade do $\star$-homomorfismo ρ na demonstração acima nos garante que ele é isométrico (ver pg. 10 de [14]) .*

Proposição 1.3. *Para todo $a \in A_\theta$ a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} f_a: & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & A_\theta \\ & (\lambda, \mu) & \longmapsto & \rho_{\lambda,\mu}(a) \end{array}$$

é contínua.

Demonstração:

Seja $a = u^k v^l \in A_\theta$ com $k, l \in \mathbb{Z}$, um elemento não nulo, $(\lambda_0,\mu_0) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Dado $\epsilon > 0$ temos que existe $\delta' > 0$ tal que $\|(\lambda,\mu) - (\lambda_0,\mu_0)\| < \delta' \Rightarrow \|\lambda^k\mu^l - \lambda_0^k\mu_0^l\| < \frac{\epsilon}{\|a\|}$.

Donde segue que:

$$\begin{aligned} \|f_a(\lambda,\mu) - f_a(\lambda_0,\mu_0)\| &= \|\rho_{\lambda,\mu}(u^k v^l) - \rho_{\lambda_0,\mu_0}(u^k v^l)\| = \|\lambda^k\mu^l u^k v^l - \lambda_0^k\mu_0^l u^k v^l\| \\ &\leq \|\lambda^k\mu^l - \lambda_0^k\mu_0^l\|\|u^k v^l\| < \frac{\epsilon}{\|a\|}\|a\| = \epsilon \end{aligned}$$

Da mesma forma garantimos que f_a é contínua para $a = P(u, v, u^\star, v^\star) \in A_\theta$, representando um polinômio nas variáveis indicadas.

Considere,

$$p = \sum_{k=n_1, l=-n_2}^{n_1', n_2'} a_{kl} u^k v^l \in \widehat{A},$$

$$\begin{aligned} \|f_p(\lambda,\mu) - f_p(\lambda_0,\mu_0)\| &= \|\rho_{\lambda,\mu}(p) - \rho_{\lambda_0,\mu_0}(p)\| \\ &= \|\rho_{\lambda,\mu}(\sum_{k=-n_1, l=-n_2}^{n_1', n_2'} a_{kl} u^k v^l) - \rho_{\lambda_0,\mu_0}(\sum_{k=-n_1, l=-n_2}^{n_1', n_2'} a_{kl} u^k v^l)\| \\ &= \|(\sum_{k=-n_1, l=-n_2}^{n_1', n_2'} a_{kl} \lambda^k\mu^l u^k v^l) - (\sum_{k=-n_1, l=-n_2}^{n_1', n_2'} a_{kl} \lambda_0^k\mu_0^l u^k v^l)\| \\ &= \|\sum_{k=-n_1, l=-n_2}^{n_1', n_2'} a_{kl} u^k v^l (\lambda^k\mu^l - \lambda_0^k\mu_0^l)\| \\ &\leq \sum_{k=-n_1, l=-n_2}^{n_1', n_2'} |a_{kl}| \|(\lambda^k\mu^l - \lambda_0^k\mu_0^l)\|. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, tendo em vista a continuidade de ρ teremos que:

$$\begin{aligned}
\exists\delta_1 > 0 \,\text{tal que}\, |(\lambda,\mu) - (\lambda_0,\mu_0)| &< \delta_1 \Rightarrow |\lambda^{k_1}\mu^{l_1} - \lambda_0^{k_1}\mu_0^{l_1}| < \frac{\epsilon}{|3Na_{kl}|},\\
\exists\delta_2 > 0 \,\text{tal que}\, |(\lambda,\mu) - (\lambda_0,\mu_0)| &< \delta_2 \Rightarrow |\lambda^{k_2}\mu^{l_2} - \lambda_0^{k_2}\mu_0^{l_2}| < \frac{\epsilon}{|3Na_{kl}|},\\
&.\\
&.\\
&.\\
\exists\delta_N > 0 \,\text{tal que}\, |(\lambda,\mu) - (\lambda_0,\mu_0)| &< \delta_N \Rightarrow |\lambda^{k_N}\mu^{l_N} - \lambda_0^{k_N}\mu_0^{l_N}| < \frac{\epsilon}{|3Na_{kl}|},
\end{aligned}$$

onde $N = (n_2' + n_2 + 1)(n_1' + n_1 + 1)$.

Seja $\epsilon > 0$ então para todo $a \in A_\theta$ tome $p \in \widehat{A}_\theta$ e escolha $\lambda, \mu, \lambda_0, \mu_0$ tal que $\|\rho_{\lambda,\mu}(p) - \rho_{\lambda_0,\mu_0}(p)\| = \|p - a\| < \frac{\epsilon}{3}$ então

$$\|\rho_{\lambda,\mu}(a) - \rho_{\lambda_0,\mu_0}(a))\| \leq \|\rho_{\lambda,\mu}(a) - \rho_{\lambda,\mu}(p)\| + \|\rho_{\lambda,\mu}(p) - \rho_{\lambda_0,\mu_0}(p)\| +$$
$$+\|\rho_{\lambda_0,\mu_0}(p) - \rho_{\lambda_0,\mu_0}(a)\| < \epsilon.$$

$\square$

Portanto fica provada a continuidade da aplicação f_a para todo $a \in A_\theta$.

Seja A uma $C^\star$-álgebra, vejamos algumas definições importantes:

Definição 1.5. *Um funcional $\phi : A \to \mathbb{C}$ é positivo se $\phi(a) \geq 0$ $\forall a \geq 0$ em A ou equivalentemente se $\phi(b^\star b) \geq 0$ $\forall b \in A$.*

Observação 1.4. [1] *Se A é unital (na definição acima), isto implica que $0 \leq \phi(a) \leq \|a\|\phi(1)$ logo ϕ é contínuo com $\|\phi\|$=$\phi(1)$.*

Definição 1.6. *Um funcional linear $\tau : A \to \mathbb{C}$ é chamado* ***tracial*** *se $\tau(ab) = \tau(ba)$ $\forall a, b \in A$.*

Definição 1.7. *Um funcional linear positivo de norma 1 é chamado um estado da $C^\star$-álgebra.*

[1] ver mais detalhes no apêndice

Observação 1.5. *Se A é unital (na definição acima) então qualquer estado satisfaz $\phi(1) = 1$. Um estado ϕ é dito cheio se $a \geq 0$ e $\phi(a) = 0 \Rightarrow a = 0$.*

Definição 1.8. *Um* ***traço*** *(normalizado) sobre A é um estado tracial não trivial (não nulo).*

Nosso objetivo agora é definir um traço sobre a álgebra A_θ.

Vamos definir inicialmente duas aplicações sobre a A_θ :

$$\begin{array}{rccc} \Phi_1 : & A_\theta & \longrightarrow & A_\theta \\ & a & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \rho_{1,e^{2\pi it}}(a)dt \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \Phi_2 : & A_\theta & \longrightarrow & A_\theta \\ & a & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \rho_{e^{2\pi it},1}(a)dt \end{array}$$

Proposição 1.4. *A aplicação Φ_1 é linear, contrativa, positiva e se valer que $a \geq 0$ e $a \neq 0$ então teremos que $\Phi_1(a) > 0$ (ou seja Φ_1 é fiél).*

Demonstração:

A linearidade segue diretamente do fato que ρ é automorfismo. Além disso, Φ_1 é contrativa pois:

$$\|\Phi_1(a)\| = \|\int_0^1 \rho_{1,e^{2\pi it}}(a)dt\| \leq \int_0^1 \|\rho_{1,e^{2\pi it}}(a)\|dt = \int_0^1 \|a\|dt = \|a\|.$$

Para provar que Φ_1 é positivo considere a afirmação abaixo:

Afirmação 1.1. $a = a^\star \Rightarrow \Phi_1(a) = \Phi_1(a)^\star$.

$$\Phi_1(a^\star) = \int_0^1 \rho_{1,e^{2\pi it}}(a^\star)dt = \int_0^1 \rho_{1,e^{2\pi it}}(a)^\star dt = (\int_0^1 \rho_1, e^{2\pi it}(a)dt)^\star$$
$= (\Phi_1(a))^\star$.

Seja $a \geq 0$ e $\varphi : A_\theta \rightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear positivo. Segue que:

$$\varphi(\Phi_1(a)) = \varphi(\int_0^1 \rho_{1,e^{2\pi it}}(a)dt) = \int_0^1 \varphi(\rho_{1,e^{2\pi it}}(a))dt \geq 0,$$

pois ρ é automorfismo e preserva elementos positivos. Portanto $\Phi_1(a) \geq 0$.

Agora, se $a \geq 0$ e $a \neq 0$, seja $\varphi : A_\theta \to \mathbb{C}$, um funcional linear positivo, e considere $t_0 \in [0,1]$ tal que $\varphi(\rho_{1,e^{2\pi i t_0}}(a)) > 0$, em particular se $t_0 = 1$ segue que $\rho_{1,1}(a) = a$ e $\varphi(\rho_{1,1}(a)) = \varphi(a) > 0$ então $\varphi(\Phi_1(a)) = \int_0^1 \varphi(\rho_{1,e^{2\pi i t}}(a))dt > 0$.

E portanto isto completa a prova da proposição.

□

Proposição 1.5. *A aplicação Φ_2 é linear, contrativa, positiva e se valer que $a \geq 0$ e $a \neq 0$ então teremos que $\Phi_2(a) > 0$ (ou seja Φ_2 é fiél).*

Demonstração:

A demonstração é análoga a 1.4

□

Proposição 1.6. *1)*

$$\Phi_1(u^k v^l) = \begin{cases} u^k, & se \quad l=0 \\ 0, & se \quad l \neq 0 \end{cases}$$

2) Seja $E_n : A_\theta \to A_\theta$ definida por:

$$E_n(a) := \tfrac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} u^j a u^{-j}.$$

Então $\Phi_1(a) = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} E_n(a)$

Demonstração:

1)

$$\Phi_1(u^k v^l) = \int_0^1 e^{2\pi i t} u^k v^l dt = u^k v^l \int_0^1 e^{2\pi i t l} dt = u^k v^l \delta_{l,0}. \tag{1.1}$$

2) Como u é unitário, E_n é linear com $\|E_n\| \leq 1$. Além disso:

Seja $a = u^k v^l$, temos:

$$E_n(u^k v^l) = \tfrac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} u^j u^k v^l u^{-j} = \frac{1}{2n+1} u^k v^l \sum_{j=-n}^{n} e^{2\pi i \theta l j} u^j u^{-j} = \frac{1}{2n+1} u^k v^l \sum_{j=-n}^{n} e^{2\pi i \theta l j}.$$

Logo, se $l = 0$:

$$E_n(u^k v^l) = \frac{1}{2n+1} u^k (2n+1) = u^k.$$

E, se $l \neq 0$, fazendo $r = e^{2\pi i\theta}$ teremos:

$$\begin{aligned} E_n(u^k v^l) &= \frac{1}{2n+1} u^k v^l \sum_{j=-n}^{n} r^{lj} = \frac{1}{2n+1} u^k v^l \frac{r^{l(n+1)} - r^{-ln}}{r^l - 1} \\ &= \frac{1}{2n+1} u^k v^l \frac{r^{\frac{l}{2}(2n+1)} - r^{-\frac{l}{2}(2n+1)}}{r^{\frac{l}{2}} - r^{-\frac{l}{2}}} = \frac{1}{2n+1} u^k v^l \frac{e^{i\pi\theta l(2n+1)} - e^{-i\pi\theta l(2n+1)}}{e^{i\pi l\theta} - e^{-i\pi n l\theta}} \\ &= \frac{1}{2n+1} u^k v^l \frac{sin((2n+1)\pi l\theta)}{sin(\pi l\theta)}. \end{aligned}$$

E portanto

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} E_n(u^k v^l) = 0$$

Donde segue que

$$\Phi_1(a) = \lim_{n \longrightarrow \infty} E_n(a) \tag{1.2}$$

para todo a na subálgebra densa $\widehat{A}_\theta$.

Vamos agora verificar que 1.2 vale para todo $a \in A_\theta$. Fixe $\epsilon > 0$ e $a \in A_\theta$. Então existe $b \in \widehat{A}_\theta$ tais que $\|a - b\| < \frac{\epsilon}{3}$ e $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n \geq N$ implica que $\|\Phi(b) - E_n(b)\| < \frac{\epsilon}{3}$.

Como ambos Φ e E_n tem norma 1, segue que se $n \geq N$ temos:

$$\|\Phi(a) - E_n(a)\| \leq \|\Phi(a-b)\| + \|\Phi(b) - E_n(b)\| + \|E_n(b-a)\| \leq \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Portanto 1.2 vale para todo $a \in A_\theta$.

□

Proposição 1.7. *1)*

$$\Phi_2(u^k v^l) = \begin{cases} v^l, & se \quad k = 0 \\ 0, & se \quad k \neq 0 \end{cases}$$

2) $\Phi_2(a)$=$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} v^j a v^{-j}$

Demonstração:

A demonstração é análoga a da proposição anterior.

□

Proposição 1.8. $\Phi_1 \circ \Phi_2(A_\theta) \subseteq \mathbb{C}I$.

Demonstração:

Seja $a = u^k v^l$ temos:

$$\Phi_1 \circ \Phi_2(u^k v^l) = \begin{cases} \Phi_1(\delta_{k,0} v^l), & \text{se} \quad k = l = 0 \\ 0, & \text{se} \quad k \neq 0 \end{cases}$$

Donde teremos também que $\Phi_1 \circ \Phi_2(p) \in \mathbb{C}I$ para todo polinômio $p = p(u, v, u^\star, v^\star)$.

Se $a \in A_\theta$ dado $\epsilon > 0$ tome p tal que $\|p - a\| < \epsilon$

Portanto:

$$\|\Phi_1 \circ \Phi_2(a) - \Phi_1 \circ \Phi_2(p)\| \leq \|a - p\| < \epsilon.$$

Então $\Phi_1 \circ \Phi_2(a) \in \overline{\mathbb{C}I} = \mathbb{C}I$.

$\square$

Observação 1.6. *A mesma fórmula vale para $\Phi_2 \circ \Phi_1$ e por isso $\Phi_1 \circ \Phi_2 = \Phi_2 \circ \Phi_1$. O que a partir de agora denotaremos por $\tau = \Phi_1 \circ \Phi_2 = \Phi_2 \circ \Phi_1$.*

Como ambas aplicações Φ_1 e Φ_2 são positivas, fiéis e contrativas, τ também terá estas propriedades. E como $\tau(I) = I$ temos $\|\tau\| = 1$.

Proposição 1.9. *τ é um traço.*

Demonstração:

Sejam $a = u^k v^l, b = u^m v^n \in A_\theta$, $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$.

$$\tau((u^k v^l)(u^m v^n)) = \Phi_1 \Phi_2((u^k v^l)(u^m v^n)) = \Phi_1 \Phi_2(u^{k+m} v^{l+n}) = e^{-2\pi i l m \theta} \tau(u^{k+m} v^{l+n})$$
$$= \begin{cases} e^{-2\pi i l m \theta}, & \text{se} \quad k + m = l + n = 0 \\ 0, & \text{se} \quad cc \end{cases}$$

E também,

$$\tau((u^m v^n)(u^k v^l)) = e^{-2\pi i k n \theta} \tau(u^{k+m} v^{l+n}) = \begin{cases} e^{-2\pi i k n \theta}, & \text{se} \quad k + m = l + n = 0 \\ 0, & \text{se} \quad cc \end{cases}$$

Quando $k+m=l+n=0$, temos que $kn=lm$ e portanto τ assume os mesmos valores sobre estes produtos. Pela linearidade, obtemos $\tau(ab)$=$\tau(ba)$ para todos os polinômios em $u^k v^l$. Pela continuidade estendemos para todo $a \in A_\theta$. Portanto τ é um **traço**.

$\square$

Observação 1.7. *Tendo em vista a definição 1.8 devemos notar que estamos usando $\mathbb{C} \cong \mathbb{C}I$ para afirmar que τ é um traço.*

Proposição 1.10. *A álgebra A_θ possui um único traço τ para θ irracional.*

Demonstração:

Suponha que ζ é um outro traço sobre A_θ. Então para qualquer $a \in A_\theta$, temos $\zeta(a) = \zeta(u^j a u^{-j})$. Então pela proposição 1.6 item 2, temos:

$$\zeta(a) = \zeta(u^j a u^{-j}) = \lim_{n\to\infty} \zeta(\frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n} u^j a u^{-j}) = \zeta(\Phi_1(a)).$$

Similarmente temos: $\zeta(a) = \zeta(\Phi_2(a)) = \zeta(\Phi_1\Phi_2(a)) = \zeta(\tau(a)) = \tau(a)$, pois $\zeta(I)$=I e $\tau(a)$ é sempre um escalar (Atente a última observação).

A prova da simplicidade de A_θ, para θ irracional, que faremos a seguir nos possibilitará provar um dos principais resultado deste capítulo que diz respeito a unicidade da $C^\star$-álgebra gerada por operadores unitários satisfazendo $uv = e^{2\pi i\theta} vu$.

Teorema 1.1. *Se θ é irracional então A_θ é simples.*

Demonstração:

Seja $J \trianglelefteq A_\theta$ ideal bilateral fechado de A_θ e $J \neq 0$, então se $a \in J$, temos:

$$\Phi_2(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n} v^j a v^{-j} \in J$$

e

$$\Phi_2(a) \in J$$

Além disso $\lambda I = \Phi_1 \circ \Phi_2(a) \in J$. Seja $a \in J$ tal que $a \neq 0$ sendo $a^\star a \geq 0$ e $a^\star a \neq 0$ logo $\Phi_1 \circ \Phi_2(a^\star a) \neq 0$. Portanto $J = A_\theta$.

$\square$

Corolário 1.1. *Sejam* $\widetilde{u}$,$\widetilde{v} \in A \neq 0$ *com* $\widetilde{u}$,$\widetilde{v}$ *unitários e* $\widetilde{u}\widetilde{v} = e^{2\pi i\theta}\widetilde{v}\widetilde{u}$ *então* $A_\theta \cong C^\star(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \subseteq A$.

Demonstração:

Defina

$$\begin{array}{rccc} \rho: & \mathcal{G} & \longrightarrow & A \\ & u & \longmapsto & \widetilde{u} \\ & v & \longmapsto & \widetilde{v} \end{array}$$

A aplicação acima define um $\star$-homomorfismo $\psi : A_\theta \to A$, já que $\widetilde{u}, \widetilde{v}$ satisfazem a relação. Como A_θ é simples temos que $ker\psi = 0$ e portanto ψ é um isomorfismo sobre $C^\star(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \subseteq A$.

$\square$

Vamos fazer agora a realização concreta de A_θ. Sejam $u, v \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{S}^1))$ operadores unitários tais que $u = m_{z(t)}$ é a multiplicação pela função unimodular $z(t) = e^{2\pi it}$ e v o operador rotação por um ângulo θ. Ou seja:

$$(uf)(t) = z(t)f(t) \qquad e \qquad (vf)(t) = f(t - \theta),$$

onde estamos identificando funções contínuas em $\mathbb{S}^1$ como funções periódicas sobre $\mathbb{R}$ com período 1.

Vale também que:

$$(u^\star f)(t) = \overline{z(t)}f(t) \qquad e \qquad (v^\star f)(t) = f(t + \theta)$$

Os operadores u e v definidos acima são unitários, pois dada $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$, temos,

$$u^\star uf(t) = \overline{z(t)}(uf)(t) = \overline{z(t)}z(t)f(t) = |z(t)|^2 f(t) = f(t),$$

ou seja $u^\star u = I$, e de maneira análoga vemos que $uu^\star = I$.

E também ,

$$(v^{\star}vf)(t) = v^{\star}(v(f))(t) = v(f)(t+\theta) = f(t+\theta-\theta) = f(t),$$

e obviamente

$$vv^{\star} = I.$$

Logo u e v são unitários, e também vale que:
$v(uf)(e^{2\pi it}) = u(f)(e^{2\pi i(t-\theta)}) = e^{2\pi i(t-\theta)}f(e^{2\pi i(t-\theta)})$
$u(vf)(e^{2\pi it}) = e^{2\pi it}v(f)(e^{2\pi it}) = e^{2\pi it}f(e^{2\pi i(t-\theta)}) \therefore vu(f) = e^{-2\pi i\theta}uv(f)$.
Donde temos,

$$uv = e^{2\pi i\theta}vu \tag{1.3}$$

Temos que $C^{\star}(u,v) \subseteq \mathcal{B}(L^2(\mathbb{S}^1))$ e pelo corolário 1.1 temos o isomorfismo $C^{\star}(u,v) \cong A_{\theta}$.

A partir dos geradores e da relação 1.3 podemos obter certos isomorfismos entre algebras de rotação irracional para diferentes valores de θ. Por exemplo quando aplicamos $\theta \mapsto \theta + n$ para $n \in \mathbb{Z}$ e substituimos em 1.3, temos,

$$vu = e^{2\pi i(\theta+n)}uv \Rightarrow vu = e^{2\pi i\theta}uv$$

e obviamente a recíproca é verdadeira, logo $A_{\theta} \cong A_{\theta+n}$. Portanto quando nos for conveniente podemos restringir a imagem do parâmetro θ ao intervalo $0 \leq \theta < 1$.
Por outro lado como $uv = e^{2\pi i(1-\theta)}vu$ a aplicação que associa $u \mapsto v$ e $v \mapsto u$ nos dá que $A_{\theta} \cong A_{1-\theta}$.

Vimos que a álgebra A_{θ} é a $C^{\star}$-álgebra gerada pelos operadores unitários $u = m_z, v \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{S}^1))$ e que satisfaz $uv = e^{2\pi i\theta}vu$. Consideremos agora, o operador m_f que é o operador multiplicação em $L^2(\mathbb{S}^1)$ por uma função $f \in C(\mathbb{S}^1)$, e donde verifica-se facilmente que $C^{\star}(\{u\}) = \{m_f : f \in C(\mathbb{S}^1)\}$. Sejam $f = \sum_m a_{m0}z^m = \sum_m a_{m0}e^{2\pi imt}$ a expansão de f em série de Fourier e $a = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{mn}u^m v^n \in A_{\theta}$, temos:

$$\Phi_1(a) = \sum_{m,n}\int_0^1 a_{mn}u^m v^n e^{2\pi int}dt = \sum_m a_{m0}u^m = m_f.$$

Donde segue que,

$$\tau(a) = \Phi_2\Phi_1(a) = \Phi_2(m_f) = \sum_m \int_0^1 a_{m0}u^m e^{2\pi imt}dt = a_{00}.$$

Por outro lado, observe que:

$$\int_0^1 f(\lambda)d\lambda = \sum_{m=0}^{N} \int_0^1 a_{m0}e^{2\pi i\lambda m}d\lambda = a_{00}$$

Portanto, temos que

$$\tau(a) = \int_0^1 f(\lambda)d\lambda$$

Definição 1.9. [2] *Um bi-toro não comutativo é a $C^\star$-álgebra universal gerada por 2 elementos unitários u, v, com uma relação de comutação como em 1.3, sendo $\theta \in \mathbb{R}$.*

Observação 1.8. *Nos referimos, algumas vezes, neste texto à A_θ como álgebra do toro não comutativo, ou simplismente, álgebra do toro.*

Observe também que álgebra A_θ é abeliana se e somente se $\theta \in \mathbb{Z}$, em particular se $\theta = 0$ identifica-se A_0 com a $C^\star$-álgebra $\mathcal{C}(\mathbb{T}^2)$, isto é funções contínuas sobre o toro com coordenadas angulares (φ_1, φ_2) fazendo $u := e^{2\pi i\varphi_1}$ e $v := e^{2\pi i\varphi_2}$.

[2]Existe uma versão mais geral da definição 1.9 que é a seguinte: Um n-toro não comutativo é a $C^\star$-álgebra universal gerada por n unitários $u_1, u_2, \cdots, u_n$ com relações de comutação lineares não triviais dadas por $u_j u_i = (\exp(2\pi i\theta_{ij}))u_i u_j, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \theta \in \mathbb{R}$.

1.4 A_θ como produto cruzado

1.4.1 Introdução

Definição 1.10. *Se X é um espaço topológico, dizemos que um grupo G age à esquerda sobre X se existe uma aplicação:*

$$(s,x) \mapsto s.x \quad de \quad G \times X \to X \tag{1.4}$$

tal que para todo $s, r \in G$ e $x \in X$

$$e.x = x \text{ e } s.(r.x) = sr.x$$

Se G é um grupo topológico e X um espaço topológico, então dizemos que a ação é contínua se 1.4 é contínua de $G \times X \to X$. Neste caso X é dito um G-espaço à esquerda e o par (G, X) é dito um grupo de transformação.

Observação 1.9. *Se X é um espaço topológico , $h \in Homeo(X)$, então $\mathbb{Z}$ age sobre X da seguinte forma:*

$$n.x := h^n(x) \text{ e } (\mathbb{Z}, X) \text{ é um grupo de transformação.}$$

1.4.2 Produto Cruzado

Em termos gerais o produto cruzado é uma $C^\star$-álgebra $A \rtimes_\alpha G$ construída apartir de uma $C^\star$-álgebra A e um grupo localmente compacto G de automorfismos de A. Quando $A = \mathbb{C}$ então a construção do produto cruzado se reduz a chamada $C^\star$-álgebra de grupo. Estas álgebras também nos fornecem modelos não comutativos para espaços topológicos "mal comportados". Os produtos cruzados foram introduzidas como uma ferramenta para se fazer um estudo sistemático de grupos agindo sobre $C^\star$-álgebras como automorfismos.

Definição 1.11. *Um $C^\star$-sistema dinâmico é uma tripla (A, G, α) consistindo de um grupo localmente compacto G, uma $C^\star$-álgebra A e um homomorfismo α de G em $Aut(A)$(espaço dos automorfismos de A), tal que $g \mapsto \alpha_g(a)$ é contínua para todo $a \in A$.*

Sejam (A, G, α) um $C^{\star}$-sistema dinâmico, onde A é uma $C^{\star}$-álgebra unital com a unidade denotada por $\mathbf{1}$, e o espaço vetorial

$C_{00}(G, A) = \{f : G \to A / f$ é contínua e $\quad supp(f)$ é compacto$\}$,

onde $supp(f) := \overline{\{g \in G / f(g) \neq 0\}}$ é o suporte de f. Se G é um grupo discreto e $f \in C_{00}(G, A)$ então f tem suporte finito, ou seja existe uma quantidade finita de $g \in G$ tal que $f(g) \neq 0$. Vamos dar a $C_{00}(G, A)$ uma estrutura de $\star$ algebra normada.

Dadas $f_1, f_2 \in C_{00}(G, A)$, $g \in G$ vamos definir um produto de convolução em $C_{00}(G, A)$ por:

$$(f_1 * f_2)(g) = \sum_{h \in G} f_1(h) \alpha_h(f_2(h^{-1}g)). \tag{1.5}$$

Observação 1.10. *Estamos supondo que G é um grupo discreto, no caso geral em que G é localmente compacto teríamos que usar a medida de Haar para definir o produto de convolução que seria dado por:*

$$(f_1 * f_2)(g) = \int_G f(h) \alpha_h(f_2(h^{-1}g)) dh.$$

Vamos provar agora a associatividade da aplicação (*) definida em 1.5: Sejam $f_1, f_2, f_3 \in C_{00}(G, A)$, $g \in G$,

$$\begin{aligned} (f_1 * f_2) * f_3(g) &= \sum_{s \in G} (f_1 * f_2)(s) \alpha_s f_3(s^{-1}g) = \sum_{s,h \in G} f_1(h) \alpha_h(f_2(h^{-1}s)) \alpha_s(f_3(s^{-1}g)) \\ &= \sum_{s,h \in G} f_1(h) \alpha_h(f_2(h^{-1}s) \alpha_{h^{-1}s} f_3(s^{-1}g)) = \sum_{h,k \in G} f_1(h) \alpha_h(f_2(k) \alpha_k f_3(k^{-1}h^{-1}g)) \\ &= \sum_{h \in G} f_1(h) \alpha_h(f_2 * f_3(h^{-1}g)) = f_1 * (f_2 * f_3)(g). \end{aligned}$$

Vamos definir uma involução $(\star)$ em $C_{00}(G, A)$.

Dado $g \in G$, defina:

$$f^{\star}(g) = \alpha_g(f(g^{-1})^{\star})$$

Vamos provar que $\star$ é uma involução:

$$(i) f^{\star\star}(g) = (f^{\star}(g))^{\star} = (\alpha_g(f^{\star}(g^{-1})^{\star})) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(f(g)^{\star\star})) = f(g).$$

$$\begin{aligned}(ii)(f_1 * f_2)^{\star}(g) &= \alpha_g([(f_1 * f_2)(g^{-1})]^{\star}) = \alpha_g(\sum_k (f_1(k)(\alpha_k(f_2(k^{-1}g^{-1}))))^{\star}) \\ &= \alpha_g(\sum_k \alpha_k(f_2(k^{-1}g^{-1})^{\star}) f_1(k)^{\star}) = \sum_k \alpha_{gk}(f_2(k^{-1}g^{-1})^{\star})\alpha_g(f_1(k)^{\star}).\end{aligned}$$

Por outro lado, usando que $h = gk$ temos,

$$\begin{aligned}f_2^{\star} * f_1^{\star}(g) &= \sum_h f_2^{\star}(h)\alpha_h(f_1^{\star}(h^{-1}g)) = \sum_h \alpha_k(f_2(h^{-1})^{\star})\alpha_k(\alpha_{k^{-1}g}(f_1(g^{-1}h)^{\star})) \\ &= \sum_k \alpha_{gk}(f_2(k^{-1}g^{-1})^{\star})\alpha_g(f_1(k)^{\star}).\end{aligned}$$

E portanto,

$$(f_1 * f_2)^{\star} = f_2^{\star} * f_1^{\star}.$$

Lema 1.4. *As funções*

$$\begin{aligned}\delta_g : \quad G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ h &\longmapsto \delta_{g,h}\end{aligned}$$

formam uma base para $C_{00}(G, A)$ como A módulo livre.

Demonstração:

Vamos provar inicialmente que $\{\delta_g\}_{g\in G}$ gera o espaço $C_{00}(G, A)$. Dada $f \in C_{00}(G, A)$, defina $F = \sum_{g\in G} a_g\delta_g$, onde $a_g \in A$, temos:
$F(h) = \sum_{g\in G} a_g\delta_g(h) = a_h := f(h)$.
Agora, seja $0 \equiv \sum_{g\in G} a_g\delta_g$, logo, para todo $h \in G$, vale que $0 = \sum_{g\in G} a_g\delta_g(h)$ e portanto $a_h = 0$ para todo $h \in G$.

□

A estrutura de $\star$ álgebra normada em $C_{00}(G,A)$ reescrito na base δ_h fica dada a partir dos resultados apresentados abaixo,

Lema 1.5. $(a_g\delta_g) * (b_h\delta_h) {=} a_g\alpha_g(b_h)\delta_{gh}$.

Demonstração:

Dado $j \in G$, temos

$$(a_g\delta_g) * (b_h\delta_h)(j) = \sum_{i\in G}(a_g\delta_g)(i)\alpha_i(b_h\delta_h(i^{-1}j)) = a_g\alpha_g(b_h\delta_h(g^{-1}j)) = a_{h^{-1}j}\alpha_{h^{-1}j}(b_h)\delta_j$$

e por outro lado,

$$a_g\alpha_g(b_h)\delta_{gh}(j) = a_{h^{-1}j}\alpha_{h^{-1}j}(b_h)\delta_j.$$

$\square$

Agora vamos estender linearmente esta operação para $C_{00}(G,A)$, para isso basta considerar $f_1 = \sum_{g\in G} a_g\delta_g, f_2 = \sum_{h\in G} b_h\delta_h \in C_{00}(G,A)$, e concluímos pelo lema acima diretamente que,

Corolário 1.2. $f_1 * f_2 = (\sum_{g\in G} a_g\delta_g) * (\sum_{h\in G} b_h\delta_h) = \sum_{g\in G}(\sum_{h\in G} a_h(\alpha_h(b_{h^{-1}g}))\delta_g$.

Note que $\mathbf{1}\delta_e \in C_{00}(G,A)$, e esta é a unidade de $C_{00}(G,A)$, pois:

$$\mathbf{1}\delta_e * (\sum_{g\in G} a_g\delta_g) = \sum_{g\in G} a_g\delta_e * \delta_g = \sum_{g\in G} a_g\delta_{eg} = \sum_{g\in G} a_g\delta_g$$

E o mesmo vale na multiplicão à direita por $\mathbf{1}\delta_e \in C_{00}(G,A)$.

Observação 1.11. *Podemos identificar A com $A\delta_e$ via aplicação de inclusão do seguinte modo:*

$$\begin{array}{rccc} i: & A & \longrightarrow & C_{00}(G,A) \\ & a & \longmapsto & a\delta_e \end{array}$$

Vamos verificar agora como fica a involução. Sabemos que para todo $g \in G$ e $a_g \in A$ que:

$$(a_g\delta_g)^\star {=} \alpha_{g^{-1}}(a_g^\star)\delta_{g^{-1}}$$

Como anteriormente, estendendo para $C_{00}(G,A)$, teremos que a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \star: & C_{00}(G,A) & \longrightarrow & C_{00}(G,A) \\ & \displaystyle\sum_{g\in G} a_g\delta_g & \longmapsto & \displaystyle\sum_{g\in G} (a_g\delta_g)^\star \end{array}$$

é uma involução. Portanto até aqui garantimos que $C_{00}(G,A)$ é uma $\star$-álgebra.

Vamos agora definir uma norma sobre $C_{00}(G,A)$:

Proposição 1.11. *A aplicação definida por:*

$$\begin{array}{rccc} \|.\|_1: & C_{00}(G,A) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & \displaystyle\sum_{g\in G} a_g\delta_g & \longmapsto & \displaystyle\sum_{g\in G} \|a_g\|_A \end{array}$$

é uma norma sobre $C_{00}(G,A)$, e satisfaz ainda que $\|a^\star\| = \|a\|_1$.

Demonstração:

Sejam $\sum_{g\in G} a_g\delta_g, \sum_{h\in G} b_h\delta_h \in C_{00}(G,A)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Temos:

(i)

$$\|\sum_{g\in G} a_g\delta_g\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{g\in G} a_g\delta_g = 0.$$

$$\|\sum_{g\in G} a_g\delta_g\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{g\in G} \|a_g\|_A = 0 \Leftrightarrow \|a_g\|_A = 0 \quad \forall g \in G,$$

isto é equivalente a $\displaystyle\sum_{g\in G} a_g\delta_g = 0$.

(ii)

$$\|\lambda \sum_{g\in G} a_g\delta_g\|_1 = |\lambda| \|\sum_{g\in G} a_g\delta_g\|_1.$$

$$\begin{aligned} \|\lambda \sum_{g\in G} a_g\delta_g\|_1 &= \|\sum_{g\in G} \lambda a_g\delta_g\|_1 = \sum_{g\in G} \|\lambda a_g\|_A = \sum_{g\in G} |\lambda| \|a_g\|_A \\ &= |\lambda| \sum_{g\in G} \|a_g\|_A = |\lambda| \|\sum_{g\in G} a_g\delta_g\|_1. \end{aligned}$$

(iii)

$$\|(\sum_{g\in G} a_g\delta_g) * (\sum_{h\in G} b_h\delta_h)\|_1 \leq \|\sum_{g\in G} a_g\delta_g\|_1 \|\sum_{h\in G} b_h\delta_h\|_1.$$

$$\begin{aligned}
\|(\sum_{g\in G} a_g\delta_g) * (\sum_{h\in G} b_h\delta_h)\|_1 &= \|\sum_{g\in G}\sum_{h\in G}(a_g\delta_g) * (b_h\delta_h)\|_1 \\
&= \|\sum_{g\in G}\sum_{h\in G} a_g\alpha_g(b_h)\delta_{gh}\|_1 = \sum_{g\in G}\sum_{h\in G}\|a_g\alpha_g(b_h)\|_A \\
&\leq \sum_{g\in G}\sum_{h\in G}\|a_g\|\|b_h\|_A = \sum_{g\in G}\|a_g\|_A\sum_{h\in G}\|b_h\|_A \\
&= \|\sum_{g\in G} a_g\delta_g\|_1\|\sum_{h\in G} b_h\delta_h\|_1.
\end{aligned}$$

e finalmente temos:

$$\begin{aligned}
\|(\sum_{g\in G} a_g\delta_g)^\star\|_1 &= \|\sum_{g\in G}\alpha_{g^{-1}}(a_g^\star)\delta_{g^{-1}}\|_1 = \sum_{g\in G}\|\alpha_{g^{-1}}(a_g^\star)\|_A = \sum_{g\in G}\|a_g^\star\|_A \\
&= \sum_{g\in G}\|a_g\|_A = \|\sum_{g\in G} a_g\delta_g\|_1.
\end{aligned}$$

Portanto chegamos a conclusão que $C_{00}(G,A)$ é uma $\star$-álgebra normada.

□

Observação 1.12. *O completamento da $\star$-álgebra de Banach $C_{00}(G,A)$ na norma definida acima nos dá então uma $\star$-álgebra de Banach que denotaremos por $L^1(G,A)$.*

Faremos agora uma pausa para considerações gerais que serão imprescindíveis ao que segue.

Proposição 1.12. *Se B é uma $\star$-álgebra de Banach com unidade δ_e e com norma $\|.\|_1$, qualquer representação involutiva ρ de B, ou seja um $\star$-homomorfismo de B em $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)$, satisfaz $\|\rho(b)\| \leq \|b\|_1$, donde segue que ρ é contrativo.*

Demonstração:

Se ρ é uma representação de B em $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)$ então dado $b \in B$, temos:

$$\|\rho(b)\| = \sup_{\|\xi\|\leq 1}\|\rho(b)\xi\|_{H_\rho}$$

onde:

$$\|\rho(b)\xi\|^2 = \langle \rho(b)\xi, \rho(b)\xi\rangle = \langle \rho(b)^\star \rho(b)\xi, \xi\rangle = \langle \rho(b^\star b)\xi, \xi\rangle$$

Consideremos agora o seguinte funcional

$$\begin{array}{rccc} F_\xi : & B & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & a & \longmapsto & \langle \rho(a)\xi, \xi\rangle \end{array}$$

Por definição o funcional F_ξ é positivo. Vamos denotar por $r(a)$ o raio espectral de $a \in B$. Observamos que

$$F_\xi(b^\star b) = |F_\xi(b^\star b)| \leq F_\xi(\delta_e) r(b^\star b) \leq \|b^\star b\|_1 \leq \|b\|_1^2$$

Com isto teremos,

$\|\rho(b)\xi\| \leq \|b\|_1$ para todo $\xi \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)$ com $\|\xi\| \leq 1$. Portanto,

$$\|\rho(b)\| = \sup_{\|\xi\|\leq 1} \{\|\rho(b)\xi\|\} \leq \|b\|_1.$$

$\square$

Observação 1.13. *O supremo sobre todas as representações involutivas é limitado ou seja,*

$$|||b||| := \sup_\rho \|\rho(b)\| \leq \|b\|_1$$

e portanto isto define uma seminorma sobre B. Em muitos casos, isto já nos dá uma norma, se não der, passamos ao quociente de B pelo núcleo da aplicação $|||.|||$, definida acima, e desta forma conseguiremos uma $\star$-álgebra normada. Como $\|\rho(b^\star b)\| = \|\rho(b)\|^2$ para cada representação ρ, temos uma $C^\star$-norma. E portanto o completamento de B nesta norma será uma $C^\star$- álgebra.

Vamos ver com maiores detalhes o que foi observado acima.

Afirmação 1.2. $|||.|||$ *é uma* $C^\star$*-seminorma*

Demonstração:

Sejam $x, y \in B$, $\alpha \in \mathbb{C}$,

(i)

$$\begin{aligned} |||\alpha x||| &= \sup\{\|\rho(\alpha x)\|\} = \sup\{\|\alpha\rho(x)\|\} = \sup\{|\alpha|\|\rho(x)\|\} \\ &= |\alpha| \sup\{\|\rho(x)\|\} = |\alpha||||x|||; \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} |||x+y||| &= \sup\{\|\rho(x+y)\|\} = \sup\{\|\rho(x)+\rho(y)\|\} \\ &\leq \sup\{\|\rho(x)\| + \|\rho(y)\|\} \leq \sup\{\|\rho(x)\|\} + \sup\{\|\rho(y)\|\} = |||x||| + |||y|||; \end{aligned}$$

(iii)

$$|||x^\star||| = \sup\{\|\rho(x^\star)\|\} = \sup\{\|\rho(x)^\star\|\} = \sup\{\|\rho(x)\|\} = |||x|||;$$

(iv)

$$\begin{aligned} |||xy||| &= \sup\{\|\rho(xy)\|\} = \sup\{\|\rho(x)\rho(y)\|\} \leq \sup\{\|\rho(x)\|\|\rho(y)\|\} \\ &\leq \sup\{\|\rho(x)\|\} \sup\{\|\rho(y)\|\} = |||x||||||y|||; \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned} |||x^\star x||| &= \sup\{\|\rho(x^\star x)\|\} = \sup\{\|\rho(x)^\star \rho(x)\|\} = \sup\{\|\rho(x)\|^2\} \\ &= \sup\{\|\rho(x)\|\})^2 = |||x|||^2. \end{aligned}$$

$\square$

Defina agora $\mathcal{N} = \{x \in B / |||x||| = 0\}$. Sejam $x, y \in \mathcal{N}$, $z \in B$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ temos:

$\|\alpha x + y\| \leq \|\alpha x\| + \|y\| = |\alpha|\|x\| + \|y\| = 0$, donde segue que $\alpha x + y \in \mathcal{N}$;
$\|xz\| \leq \|x\|\|z\| = 0 \Rightarrow xz \in \mathcal{N}$ e $\|zx\| \leq \|z\|\|x\| = 0 \Rightarrow zx \in \mathcal{N}$;
e de (iii) decorre imediatamente que $\mathcal{N} = \mathcal{N}^\star$.

Portanto garantimos que $\mathcal{N}$ é um ideal bilateral autoadjunto de B. Donde segue que $B/\mathcal{N}$ é uma $\star$-álgebra e ainda que:

$$\begin{aligned} \|.\| : \quad B/\mathcal{N} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \overline{x} \qquad &\longmapsto |||x||| \end{aligned}$$

é uma $C^\star$-norma.

E portanto $\overline{(B/\mathcal{N})}^{\|.\|}$ será uma $C^\star$-álgebra.

Definição 1.12. *À $C^\star$-álgebra obtida acima daremos o nome de $C^\star$-álgebra envolvente de B.*

Definição 1.13. *Dado um $C^\star$-sistema dinâmico (A, G, α) , a $C^\star$-álgebra envolvente de $L^1(G, A)$ é denotada por $A \rtimes_\alpha G$ e é chamado o* ***Produto Cruzado*** *de A pela ação α de G.*

Voltamos ao caso de $\overline{C_{00}(G, A)}^{\|.\|_1} = L_1(G, A)$.

Nosso objetivo agora é construir a $C^\star$-álgebra envolvente de $L^1(G, A)$, para isto vamos inicialmente encontrar uma representação de $C_{00}(G, A)$ como operador em algum espaço de Hilbert. A existência de uma representação fiél para uma $C^\star$-álgebra qualquer como um conjunto de operadores limitados em um espaço de Hilbert é garantida pelo Teorema de Gelfand-Naimark.

Seja então, uma representação fiél da $C^\star$-álgebra A,

$$\rho : A \to \mathcal{B}(\widehat{H}).$$

Considere o espaço de Hilbert definido por

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{g \in G} H_g = \{(\xi_g)_{g \in G}, (\sum \|\xi_g\|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty\}$$

onde

$$H_g \cong \widehat{H}$$

Defina também:

$$\begin{array}{rcl} \pi: \quad A & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ a & \longmapsto & \pi(a)(\xi_g)_{g\in G} = (\rho(\alpha_{g^{-1}}(a))\xi_g)_{g\in G} \end{array}$$

Proposição 1.13. *: π é uma representação.*

Demonstração:

Inicialmente vamos mostrar que esta é uma boa definição:

Sejam $(\xi_g)_g, (\eta_g)_g \in \mathcal{H}$ $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que:

$$\begin{aligned} \pi(a)((\xi_g)_g + \lambda(\eta_g)_g) &= \pi(a)(\xi_g + \lambda\eta_g)_g = (\rho(\alpha_{g^{-1}}(a))(\xi_g + \lambda\eta_g))_g \\ &= (\rho(\alpha_{g^{-1}}(a))\xi_g + \lambda\rho(\alpha_{g^{-1}}(a))\eta_g)_g \\ &= (\rho(\alpha_{g^{-1}}(a))\xi_g)_g + \lambda(\rho(\alpha_{g^{-1}}(a))\eta_g)_g = \pi(a)((\xi_g)_g) + \lambda\pi(a)((\eta_g)_g) \end{aligned}$$

Logo, $\pi(a)$ é linear.

E se $(\xi_g)_g \in \mathcal{H}$ então:

$$\begin{aligned} \|\pi(a)(\xi_g)_g\| &= \|(\rho(\alpha_{g^{-1}}(a))\xi_g)_g\| = (\sum_g \|(\rho(\alpha_{g^{-1}}(a))\xi_g)\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\sum_g \|\rho(\alpha_{g^{-1}}(a))\|^2\|\xi_g\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_g \|a\|^2\|\xi_g\|^2)^{\frac{1}{2}} = \|a\|\|(\xi_g)_g\|. \end{aligned}$$

Logo $\pi(a)$ é contínuo.

Portanto $\pi(a) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, e com isso mostramos que a aplicação π está bem definida.

Observe também que:

$$\begin{aligned} \langle \pi(a)\xi, \eta\rangle &= \langle \pi(a)(\xi_g)_g, (\eta_g)_g\rangle = \langle (\rho(\alpha_{g^{-1}}(a))\xi_g)_g, (\eta_g)_g\rangle \\ &= \sum_g \langle \rho(\alpha_{g^{-1}}(a))\xi_g, \eta_g\rangle_{H_g} = \sum_g \langle \xi_g, \rho(\alpha_{g^{-1}}(a^\star))\eta_g\rangle_{H_g} = \langle \xi, \pi(a^\star)\eta\rangle. \end{aligned}$$

Logo $\pi(a^\star) = \pi(a)^\star$, onde $\pi(a)^\star$ é o operador adjunto de $\pi(a)$.

Além disto, temos:

(i)$\pi(a+\lambda b) = \pi(a) + \lambda\pi(b)$

(ii)$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$

(iii)$\pi(\mathbf{1}) = 1$

Seja $(\xi_g)_g \in \mathcal{H}$:

(i)

$$\begin{aligned}
\pi(a+\lambda b)(\xi_g)_{g\in G} &= \rho(\alpha_{g^{-1}}(a+\lambda b))\xi_g = \rho(\alpha_{g^{-1}}(a) + \lambda\alpha_{g^{-1}}(b))\xi_g \\
&= \rho(\alpha_{g^{-1}}(a)) + \lambda\rho(\alpha_{g^{-1}}(b)))\xi_g = \rho(\alpha_{g^{-1}}(a))(\xi_g) + \lambda\rho(\alpha_{g^{-1}}(b))(\xi_g) \\
&= \pi(a)(\xi_g)_{g\in G} + \lambda\pi(b)(\xi_g)_{g\in G}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\pi(ab)(\xi_g)_{g\in G} &= (\rho(\alpha_{g^{-1}}(ab))\xi_g)_{g\in G} = (\rho(\alpha_{g^{-1}}(a)\alpha_{g^{-1}}(b))\xi_g)_{g\in G} \\
&= ((\rho(\alpha_{g^{-1}}(a))\rho(\alpha_{g^{-1}}(b)))\xi_g)_{g\in G} = (\rho(\alpha_{g^{-1}}(a))\xi_g)(\rho(\alpha_{g^{-1}}(b))\xi_g)_{g\in G} \\
&= (\pi(a)(\xi_g)\pi(b)(\xi_g))_{g\in G} = ((\pi(a)\pi(b))(\xi_g))_{g\in G}
\end{aligned}$$

(iii)

$$\pi(\mathbf{1})(\xi_g)_{g\in G} = (\rho(\alpha_{g^{-1}}(1))\xi_g)_{g\in G} = (\xi_g)_{g\in G}.$$

□

Concluimos então que π é um $\star$-homomorfismo. E portanto o par $(\mathcal{H},\pi)$ é uma representação da $C^\star$-álgebra A.

Defina

$$\begin{aligned}
u: \quad G &\longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\
h &\longmapsto u_h(\xi_g)_g = (\xi_{h^{-1}g})_g
\end{aligned}$$

Proposição 1.14. *O operador $u_h \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é unitário para todo $h \in G$.*

Demonstração:

É fácil ver que a aplicação está bem definida ou seja u_h é operador linear e contínuo.

E ainda que:

$u_h u_l(\xi_g)_g = u_h(\xi_{l^{-1}g})_g(\xi_{l^{-1}h^{-1}g})_g = (\xi_{(hl)^{-1}g})_g = u_{hl}(\xi_g)_g$, donde tiramos que $u_h u_l = u_{hl}$. E portanto $u_h u_{h^{-1}} = u_e = Id$.

Observe também que:

$$\begin{aligned} \langle u_h \xi, \eta \rangle &= \langle (\xi_{h^{-1}g})_g, (\eta_g)_g \rangle = \sum_g \langle \xi_{h^{-1}g}, \eta_g \rangle = \sum_g \langle \xi_g, \eta_{hg} \rangle \\ &= \langle \xi, u_{h^{-1}}(\eta) \rangle. \end{aligned}$$

Ou seja $u_h^\star = u_{h^{-1}}$.

$\square$

Proposição 1.15. $u_h \pi(a) u_h^\star = \pi(\alpha_h(a))$.

Demonstração:

Seja $(\xi_g)_g \in \mathcal{H}$, temos:

$$\begin{aligned} u_h \pi(a) u_h^\star (\xi_g)_g &= u_h \pi(a)(\xi_{hg})_g = u_h(\rho(\alpha_{g^{-1}}(a))\xi_{hg})_g = (\rho(\alpha_{(h^{-1}g)^{-1}}(a))\xi_{hh^{-1}g})_g \\ &= (\rho(\alpha_{g^{-1}h}(a))\xi_g)_g = (\rho(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_h(a)))\xi_g)_g = \pi(\alpha_h(a))(\xi_g)_g. \end{aligned}$$

$\square$

Proposição 1.16. *Temos que a aplicação dada por:*

$$\begin{aligned} \pi \times u : \ C_{00}(G, A) &\longrightarrow \quad \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ \sum_{t \in G} a_t \delta_t &\longmapsto \sum_{t \in G} \pi(a_t) u_t \end{aligned}$$

é um $\star$-homomorfismo contrativo.

Demonstração:

É fácil ver que $\pi \times u$ é linear e também que satisfaz $(\pi \times u)(a_g \delta_g) = \pi(a_g) u_g$. Logo, para mostramos que a aplicação definida preserva produto e involução é suficiente verificar que esta propriedade é válida sobre os geradores de $C_{00}(G, A)$.

Desta forma, temos:

$$\begin{aligned}(\pi\times u)((a_g\delta_g)*(b_h\delta_h))(\xi_k)_k &= (\pi\times u)(a_g\alpha_g(b_h)\delta_{gh})(\xi_k)_k = \pi(a_g\alpha_g(b_h))u_{gh}(\xi_k)_k = \\ &= \pi(a_g\alpha_g(b_h))(\xi_{h^{-1}g^{-1}k})_k = \rho(\alpha_{k^{-1}}(a_g\alpha_g(b_h)))(\xi_{h^{-1}g^{-1}k})_k.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(\pi\times u)(a_g\delta_g)(\pi\times u)(b_h\delta_h)(\xi_k)_k &= \pi(a_g)u_g\pi(b_h)(\xi_{h^{-1}k})_k \\ &= \pi(a_g)u_g(\rho(\alpha_{k^{-1}}(b_h))\xi_{h^{-1}k})_k \\ &= \pi(a_g)(\rho(\alpha_{k^{-1}g}(b_h)\xi_{h^{-1}g^{-1}k})_k \\ &= (\rho(\alpha_{k^{-1}}(a_g))\rho(\alpha_{k^{-1}g}(b_h))\xi_{h^{-1}g^{-1}k})_k \\ &= \rho(\alpha_{k^{-1}}(a_g\alpha_g(b_h)))(\xi_{h^{-1}g^{-1}k})_k.\end{aligned}$$

Portanto

$$(\pi\times u)((a_g\delta_g)*(b_h\delta_h)) = (\pi\times u)(a_g\delta_g)(\pi\times u)(b_h\delta_h)$$

E ainda,

$$\begin{aligned}(\pi\times u)(a_g\delta_g)^\star &= (\pi\times u)(\alpha_{g^{-1}}(a_g^\star)\delta_{g^{-1}} = \pi(\alpha_{g^{-1}}(a_g^\star))u_{g^{-1}} \\ &= (u_{g^{-1}}\pi(a_g^\star)u_g)u_{g^{-1}} = u_{g^{-1}}\pi(a_g^\star) = u_g^\star\pi(a_g^\star) = (\pi(a_g)u_g)^\star \\ &= [(\pi\times u)(a_g\delta_g)]^\star\end{aligned}$$

Ou seja $\pi\times u$ preserva involução.

Vamos provar agora que $\pi \times u$ é uma aplicação contrativa. Considere $(\xi_h)_h \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}
\|(\pi \times u)(\sum_{g\in G} a_g\delta_g)(\xi_h)_{h\in G}\|^2 &= |\langle(\pi \times u)(\sum_{g\in G} a_g\delta_g)(\xi_h)_{h\in G}, (\pi \times u)(\sum_{g\in G} a_g\delta_g)(\xi_h)_{h\in G}\rangle| \\
&\leq \sum_{g,g'\in G} |\langle(\pi \times u)(a_g\delta_g)(\xi_h), (\pi \times u)(a_{g'}\delta'_g)(\xi_h)\rangle| \\
&= \sum_{g,g'\in G} |\langle\pi(\alpha_{g^{-1}}(a_g))u_g(\xi_h), \pi(\alpha_{g'^{-1}}(a_{g'}))u_{g'}(\xi_h)\rangle| \\
&\leq \sum_{g,g'\in G} \|\pi(\alpha_{g^{-1}}(a_g))u_g(\xi_h)\|\|\pi(\alpha_{g'^{-1}}(a_{g'})u_{g'}(\xi_h)\| \\
&\leq \sum_{g,g'\in G} \|\alpha_{g^{-1}}(a_g)\|\|\alpha_{g'^{-1}}(a_{g'})\|\|\xi_h\|^2 \\
&= \sum_{g,g'\in G} \|a_g\|\|a_{g'}\|\|\xi_h\|^2 = \sum_{g\in G} \|a_g\|^2\|\xi_h\|^2.
\end{aligned}$$

Proposição 1.17. *A aplicação $\pi \times u$ é fiél.*

Demonstração:

Sejam $f = \sum_{t\in G} a_t\delta_t \neq 0$, $a_{t_0} \neq 0$ e $(\xi_g)_g \in \mathcal{H}$, temos que:

$$((\pi \times u)(\sum_t a_t\delta_t))(\xi_g)_g = \sum_t \pi(a_t)u_t(\xi_g)_g = \sum_t \pi(a_t)(\xi_{t^{-1}g})_g = \sum_t (\rho(\alpha_{g^{-1}}(a_t)))(\xi_{t^{-1}g})_g$$

Como ρ é injetor e $a_{t_0} \neq 0$, existe $\eta \in H$ tal que $\rho(a_{t_0})\eta \neq 0$.

Defina:

$$\xi_t = \begin{cases} \eta, & \text{se} \quad t = t_0^{-1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

temos que: $((\pi \times u)(\sum_t a_t\delta_t))(\xi_g)_g = \sum_t (\rho(\alpha_{g^{-1}}(a_t))\xi_{t^{-1}g})_g = \rho(a_{t_0})\eta$

Portanto $(\pi \times u)(f)|_\xi \neq 0$, donde $\pi \times u$ é fiél.

$\square$

Sabemos que $C_{00}(G, A)$ é densa em $L^1(G, A)$, portanto toda $\star$-representação contrativa de $C_{00}(G, A)$ se estende a uma representação de $L^1(G, A)$ e além disso como $A \rtimes_\alpha G$ é a $C^\star$-álgebra envolvente de $L^1(G, A)$ podemos estender esta representação ao produto cruzado, ou seja qualquer $\star$-representação contrativa de $C_{00}(G, A)$ se estende a uma representação de $A \rtimes_\alpha G$. Em particular $\pi \times u : A \rtimes_\alpha G \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ estende $\pi \times u$.

Defina: $\|f\|_r = \|(\pi \times u)(f)\|$, esta norma independe da representação ρ, desde que ρ seja injetora e, $\overline{C_{00}(G, A)}^{\|\cdot\|_r} = A \rtimes_{\alpha,r} G$,
onde $\|f\|_r = \|(\pi \times u)(f)\| \leq \||f\||$.

Observação 1.14. *Se A é uma $C^\star$-álgebra e (π, H) é uma representação de A, vamos definir:* $\pi(A)H := span\{\pi(a)\xi / a \in A, \xi \in H\}$.

Uma definição importante é a seguinte:

Definição 1.14. *Uma representação covariante de um $C^\star$-dinâmico (A, G, α) é uma tripla (π, u, H) onde:*

$$\pi : \quad A \longrightarrow \mathcal{B}(H)$$

é uma representação não degenerada, isto é $\overline{\pi(A)H} = H$*;*

e

$$u : \quad G \longrightarrow \mathcal{B}(H)$$

é uma representação unitária

$$\begin{cases} u_r^\star = u_{r^{-1}} \\ u_r u_s = u_{rs} \end{cases}$$

e

$$u_r \pi(a) u_{r^{-1}} = \pi(\alpha_r(a)).$$

Teorema 1.2. *Seja A uma $C^\star$-álgebra com unidade* $\mathbf{1}$. *Então existe uma bijeção entre as representações covariantes de (A, G, α) e as representações não degeneradas de $A \rtimes_\alpha G$.*

Demonstração:

Seja (π, u, H) uma representação covariante, então é possível construir uma representação $\pi \times u$ de $A \rtimes_\alpha G$. E além disso, $\overline{(\pi \times u)(a\delta_e)} = \pi(a)$ para todo $a \in A$, donde segue que $\overline{(\pi \times u)(A \rtimes_\alpha G)H} \supseteq \overline{\pi(A)H} = H$ e $\overline{(\pi \times u)(A \rtimes_\alpha G))H} \subseteq H$, ou seja $\overline{(\pi \times u)(A \rtimes_\alpha G)H} = H$, isto é $\pi \times u$ é representação não degenerada.

Por outro lado, seja:

$$\rho: \quad A \rtimes_\alpha G \longrightarrow \mathcal{B}(H)$$

uma representação não degenerada.

Defina:

$$\begin{aligned} \pi: \ A &\longrightarrow \mathcal{B}(H) \\ a &\longmapsto \rho(a\delta_e) \end{aligned}$$

Como ρ é representação, segue diretamente que π é uma representação, e também vale que, $\overline{\pi(A)H} \subseteq \overline{\rho(A \rtimes_\alpha G)H} = H$ e para todo $\xi \in H$, $\xi = \rho(\mathbf{1}\delta_e)\xi = \pi(\mathbf{1})\xi$, logo $H \subseteq \pi(A)H$ e portanto $H = \overline{\pi(A)H}$, ou seja π é representação não degenerada de A.

Defina também:

$$\begin{aligned} T: \ G &\longrightarrow \mathcal{B}(H) \\ g &\longmapsto \rho(\mathbf{1}\delta_g) \end{aligned}$$

Afirmação 1.3. *T é representação unitária.*

Demonstração:

Considerando primeiramente $\eta = \rho(a_t\delta_t)\xi \in H$, temos:

$$\begin{aligned} T_rT_s(\rho(a_t\delta_t)\xi) &= T_r(\rho(\mathbf{1}\delta_s)\rho(a_t\delta_t)\xi) = T_r(\rho(\alpha_s(a_t)\delta_{st})\xi) \\ &= (\rho(\alpha_r(\alpha_s(a_t)))\delta_{rst})\xi = \rho(\alpha_{rs}(a_t)\delta_{(rs)t})\xi = T_{rs}(\rho(a_t\delta_t))\xi, \end{aligned}$$

donde segue que $T_rT_s = T_{rs}$.

Para provar que T é operador unitário observe que:

$$T_e(\rho(a_t\delta_t)\xi) = \rho(\alpha_e(a_t)\delta_{et})\xi = \rho(a_t\delta_t)\xi$$

ou seja $T_e = Id_H$. Como $T_rT_{r^{-1}} = Id$, basta mostrar que $T_r^\star = T_{r^{-1}}$, para isso tome $\xi, \eta \in H$:

$$\begin{aligned} \langle T_r(\xi), \eta\rangle &= \langle \rho(\mathbf{1}\delta_r)\xi, \eta\rangle = \langle \xi, \rho(\mathbf{1}\delta_r)^\star\eta\rangle = \langle \xi, \rho(\alpha_{r^{-1}}(\mathbf{1})\delta_{r^{-1}}\eta\rangle \\ &= \langle \xi, \rho(\mathbf{1}\delta_{r^{-1}})\eta\rangle = \langle \xi, T_{r^{-1}}(\eta)\rangle. \end{aligned}$$

Afirmação 1.4. $T_r\pi(a)T_{r^{-1}} = \pi(\alpha_r(a))$

Demonstração:

Seja $\eta = \rho(a_t\delta_t)\xi \in H$,

$$\begin{aligned}
T_r\pi(a)T_{r^{-1}}(\rho(a_t\delta_t)\xi) &= T_r\pi(a)(\rho(\mathbf{1}\delta_{r^{-1}})\rho(a_t\delta_t)\xi) = T_r\pi(a)(\rho(\alpha_{r^{-1}}(a_t)\delta_{r^{-1}t})\xi) \\
&= T_r\rho(a\delta_e)\rho(\alpha_{r^{-1}}(a_t)\delta_{r^{-1}t})\xi = T_r\rho(a\alpha_{r^{-1}}(a_t)\delta_{r^{-1}t})\xi \\
&= \rho(\alpha_r(a\alpha_{r^{-1}}(a_t))\delta_t)\xi = \rho(\alpha_r(a)a_t\delta_t)\xi = \rho(\alpha_r(a)\delta_e)\rho(a_t\delta_t)\xi \\
&= \pi(\alpha_r(a))\rho(a_t\delta_t)\xi.
\end{aligned}$$

Portanto mostramos que (π, T, H) é uma representação covariante de (A, G, α). Agora, somente resta mostrar que $\rho = \pi \times T$.

Afirmação 1.5. $\pi(a_t)T_t = \rho(a_t\delta_t)$

Demonstração:

Seja $\eta = \rho(a_t\delta_t)\xi \in H$,

$$\begin{aligned}
\pi(a_t)T_t(\rho(a_r\delta_r)\xi) &= \pi(a_t)\rho(\alpha_t(a_r)\delta_{tr})\xi = \rho(a_t\delta_e\alpha_t(a_r)\delta_{tr})\xi = \rho(a_t\alpha_t(a_r)\delta_{tr})\xi \\
&= \rho(a_t\delta_t)\rho(a_r\delta_r)\xi.
\end{aligned}$$

Defina:

$$\begin{aligned}
\rho_{(\pi,T)} : \ C_{00}(G, A) &\longrightarrow \quad \mathcal{B}(H) \\
\sum_{t\in G} a_t\delta_t &\longmapsto \sum_{t\in G} \pi(a_t)T_t
\end{aligned}$$

É fácil ver que esta aplicação é um $\star$-homomorfismo contrativo, logo como $A \rtimes_\alpha G$ é $C^\star$-álgebra envolvente de $C_{00}(G, A)$, temos que existe um único homomorfismo $\pi \times T : A \rtimes_\alpha G \to \mathcal{B}(H)$. Portanto $\rho = \pi \times T$.

$\square$

Observação 1.15. *O teorema 1.2 também vale para $C^\star$-álgebras não unitais.*

1.4.3 $A_\theta \cong \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$

Vamos considerar agora um produto cruzado $A \rtimes_\alpha G$, onde $A = \mathcal{C}(X)$, sendo X um espaço topológico Hausdorff compacto e no qual consideramos uma ação de G sobre X,

$$\varphi : \quad G \longrightarrow Homeo(X).$$

Desta forma, podemos definir uma ação de G sobre $\mathcal{C}(X)$ do seguinte modo:

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & G & \longrightarrow & Aut(C(X)) \\ & g & \longmapsto & \alpha_g \end{array}$$

dada por

$$(\alpha_g(f))(x) = f(\varphi_{g^{-1}}(x)).$$

Vamos construir a sub-álgebra densa $C_{00}(G, C(X))$, para isto inicialmente estabeleceremos uma relação entre os espaços $C_{00}(G, C(X))$ e $C_{00}(G \times X, \mathbb{C})$.

Seja

$$\begin{array}{cccc} \widehat{\ } & : & C_{00}(G \times X, \mathbb{C}) & \longrightarrow & C_{00}(G, C(X)) \\ & & f & \longmapsto & \widehat{f} \end{array}$$

definida da seguinte forma:

$$[\widehat{f}(g)](x) = f(g, x)$$

Provaremos que $\widehat{\ }$ é um isomorfismo de espaços vetoriais. Sejam $\widehat{f_1}, \widehat{f_2} \in C_{00}(G, C(X))$, $g \in G$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in X$,

$$[\widehat{f_1 + \lambda f_2}(g)](x) = (f_1 + \lambda f_2)(g, x) = f_1(g, x) + \lambda f_2(g, x) = [\widehat{f_1}(g)](x) + [\widehat{\lambda f_2}(g)](x).$$

Agora suponha que $\widehat{f_1}, \widehat{f_2}$ são tais que $\widehat{f_1} = \widehat{f_2}$, então para todo $g \in G$, $x \in X$. Temos que,

$$[\widehat{f_1}(g)](x) = [\widehat{f_2}(g)](x) \Rightarrow f_1(g, x) = f_2(g, x) \Rightarrow f_1 \equiv f_2,$$

logo $\widehat{\ }$ é injetivo. Considere agora $\psi \in C_{00}(G, C(X))$, queremos mostrar que existe $f \in C_{00}(G \times X, \mathbb{C})$ tal que $\widehat{f} = \psi$.

Considere a seguinte função

$$\begin{array}{rccc}\widetilde{\psi}: & G\times X & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ & (g,x) & \longmapsto & [\psi(g)](x)\end{array}$$

Como ψ é contínua e tem suporte compacto temos que $\widetilde{\psi}\in C_{00}(G\times X,\mathbb{C})$.

Observe também que:

$$(\alpha_g f)(h,x)=f(h,\varphi_{g^{-1}}(x)\Leftrightarrow \alpha_g(\widehat{f}(h))(x)=\widehat{f}(h)(\varphi_{g^{-1}}(x)).$$

Vamos ver como fica o produto de convolução definido em $C_{00}(G,C(X))$ agora no espaço $C_{00}(G\times X,\mathbb{C})$.

Sejam $\widehat{f_1}=\sum_{g\in G}a_g\delta_g$, $\widehat{f_2}=\sum_{h\in G}b_h\delta_h$, então:

$$\begin{aligned}\widehat{f_1}*\widehat{f_2}=(\sum_{g\in G}a_g\delta_g)*(\sum_{h\in G}b_h\delta_h) &= \sum_{g,h\in G}(a_g\delta_g)(b_h\delta_h)=\sum_{g,h\in G}a_g\alpha_g(b_h)\delta_{gh}\\ &= \sum_{g\in G}(\sum_{h\in G}a_h(\alpha_h(b_{h^{-1}g}))\delta_g.\end{aligned}$$

e usando que: $\widehat{f}(h)=\sum_{g\in G}b_g\delta_g(h)=b_h$,

dado $g\in G$, vamos reescrever o produto de convolução:

$$(\widehat{f_1}*\widehat{f_2})(g)=\sum_{h\in G}\widehat{f_1}(h)\alpha_h(\widehat{f_2}(h^{-1}g))\in\mathcal{C}_0(X)$$

Dado $x\in X$,

$$\begin{aligned}((\widehat{f_1}*\widehat{f_2})(g))(x) &= (\sum_{h\in G}\widehat{f_1}(h)\alpha_h(\widehat{f_2}(h^{-1}g)))(x)\\ &= \sum_{h\in G}\widehat{f_1}(h)(x)\alpha(\widehat{f_2}(h^{-1}g))(x)=\sum_{h\in G}\widehat{f_1}(h)(x)\widehat{f_2}(h^{-1}g)(\varphi_{h^{-1}}(x))\\ &= \sum_{h\in G}f_1(h,x)f_2(h^{-1}g,\varphi_{h^{-1}}(x))=(f_1*f_2)(g,x)=((\widehat{f_1*f_2})(g))(x)\end{aligned}$$

Então definimos,

$$(f_1*f_2)(g,x)=\sum_{h\in G}f_1(h,x)f_2(h^{-1}g,\varphi_{h^{-1}}(x)).$$

E portanto, sempre que estivermos nos referindo ao subconjunto denso $C_{00}(G,C(X))$, vamos de fato trabalhar com funções em $C_{00}(G\times X,\mathbb{C})$.

No caso particular em que $G = \mathbb{Z}\theta$, com $\theta \in (0,1)$ irracional, $X = \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, defimos:

$$\begin{array}{rccc} \widehat{f}: & \mathbb{Z}\theta & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) \\ & p & \longmapsto & \widehat{f}(p) \end{array}$$

sendo

$$\widehat{f}(p)(y+\mathbb{Z}) = f(p, y+\mathbb{Z})$$

com $f \in C_{00}(\mathbb{Z}\theta \times \mathbb{S}^1, \mathbb{C})$

A ação será dada por:

$$\begin{array}{rccc} \beta: & \mathbb{Z}\theta & \longrightarrow & Aut\mathcal{C}(\mathbb{S}^1) \\ & p & \longmapsto & \beta_p \end{array}$$

sendo $(\beta_p f)(y+\mathbb{Z}) = f(y-p+\mathbb{Z})$

induzida pela ação se $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{S}^1$,

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & Bij(\mathbb{S}^1) \\ & n & \longmapsto & \varphi_n \end{array}$$

com

$$\varphi_n(y+\mathbb{Z}) = y + n\theta + \mathbb{Z}$$

Podemos ainda indicar a ação β para funções em $C_{00}(\mathbb{Z}\theta \times \mathbb{S}^1, \mathbb{C})$, denotaremos esta ação por β_n, ficando então da seguinte forma:

$$(\beta_n f)(m, y+\mathbb{Z}) = f(m, y - n\theta + \mathbb{Z}).$$

Com as ações correspondentes podemos construir uma representação covariante do $C^\star$-sistema dinâmico $(C(\mathbb{S}^1), \mathbb{Z}, \alpha)$ sobre $A_\theta \cong C^\star(u,v)$, onde o gerador de $\mathbb{Z}$ age sobre $C(\mathbb{S}^1)$ rotacionando o círculo unitário por um ângulo de $2\pi\theta$ sendo θ um número irracional entre 0 e 1. A este sistema esta associado o produto cruzado $C(\mathbb{S}^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$.

Observe que se $G = \mathbb{Z}$, falar sobre uma função f de suporte compacto sobre G é equivalente à dizer que f tem suporte finito.

Seja a álgebra A_θ, considere $h \in Homeo(\mathbb{S}^1)$ como sendo a rotação por θ irracional, ou seja:

$$h(t) := e^{2\pi i\theta}t$$

E considere o sistema dinâmico $(C(\mathbb{S}^1), \mathbb{Z}, \alpha)$ associado a seguinte ação:

$$\alpha_n(f)(t) = f(e^{-2\pi in\theta}t)$$

Considere a aplicação de inclusão

$$\mathbf{z} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C} \tag{1.6}$$

e sejam $\mathcal{G} = \{n, 1\}$, $\mathcal{R} = \{n^\star n = nn^\star = 1\}$, defina,

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\pi}: & \mathcal{G} & \longrightarrow & A_\theta \\ & n & \longmapsto & u. \end{array}$$

Recordemos que o operador $u \in A_\theta \subseteq \mathcal{B}(L^2(\mathbb{S}^1))$ é o operador multiplicação pela função unimodular z, que indicamos anteriormente por $u = m_{z(t)}$.

Pela propriedade universal de $C^\star(\mathcal{G}, \mathcal{R}) \cong C(\mathbb{S}^1)$, temos que existe um único homomorfismo

$$\pi : C(\mathbb{S}^1) \longrightarrow A_\theta.$$

Considere também a aplicação

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & A_\theta \\ & n & \longmapsto & v^n. \end{array}$$

Dada $f \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{S}^1))$, $y + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, teremos

$$(vf)(y + \mathbb{Z}) = f(y - 2\pi\theta + \mathbb{Z})$$

no entanto, podemos usar que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$ para escrever

$$(vf)(t) = f(e^{-2\pi i\theta}t).$$

Afirmação 1.6. $T_n\pi(g)T_{-n} = \pi(\alpha_n(g)), g \in C(\mathbb{S}^1)$.

Demonstração:

Sejam $t \in \mathbb{S}^1$, $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$, temos

$$(T_n\pi(g)T_{-n}f)(t) = T_n(\pi(g)(T_{-n}f)(t) = \pi(g)(T_{-n}f)(e^{-2\pi in\theta}t) =$$
$$= g(e^{-2\pi in\theta}t)(T_{-n}f)(e^{-2\pi in\theta}t) = g(e^{-2\pi in\theta}t)f(t) = (\alpha_n g)(t)f(t) = (\pi(\alpha_n g)f)(t).$$

□

Portanto a tripla (π, T, A_θ) é uma representação covariante para o $C^\star$-sistema dinâmico $(C(\mathbb{S}^1), \mathbb{Z}, \alpha)$ em A_θ e portanto pelo teorema 1.2 garantimos a existência de uma representação não degenerada $(\pi \times T) : C(\mathbb{S}^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \to A_\theta$.

Seja a sub-álgebra densa $C_{00}(\mathbb{Z}, C(\mathbb{S}^1))$ gerada por $v' = 1\delta_1$ e $u' = z\delta_0$, estes elementos são unitários e $v'^\star = 1\delta_{-1}$ e $u'^\star = \overline{z}\delta_0$, além disso,

$$v' * u' = (1\delta_1) * (z\delta_0) = 1\alpha_g(z)\delta_1 = e^{-2\pi i\theta}z\delta_0 * \delta_1 = e^{-2\pi i\theta}u' * v'.$$

Considere o conjunto $\mathcal{G} = \{u, v\}$. Então temos que se $\rho : \mathcal{G} \to C(\mathbb{S}^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ é a representação que associa u à u' e v à v', o conjunto de geradores em $\mathcal{G}$ irá satisfazer as relações em $C(\mathbb{S}^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, daí pela universalidade de A_θ temos que existe um único $\star$-homomorfismo $\psi : A_\theta \to C(\mathbb{S}^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. Além disso as aplicações $\pi \times T$ e ψ são inversas. De fato:

Dado $u^k v^l \in \widehat{A}_\theta$, temos:

$(\pi \times T)(\psi)(u^k v^l) = (\pi \times T)(z^k\delta_0 * 1\delta_l) = (\pi \times T)(z^k\delta_l) = \pi(z^k)T_l = u^k v^l$.

Seja $a_n = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} \alpha_{nk} z^k \in C(\mathbb{S}^1)$,

$$\begin{aligned} \psi(\pi \times T)(a_n\delta_n) &= \psi(\pi(a_n)T_n) = \psi(\sum_{k=-N}^{N} \alpha_{nk}u^k v^n) = \sum_{k=-N}^{N} \psi(\alpha_{nk}u^k v^n) \\ &= \sum_{k=-N}^{N} \alpha_{nk}(z^k\delta_0) * (1\delta_n) = \sum_{k=-N}^{N} \alpha_{nk}z^k\delta_n = a_n\delta_n \end{aligned}$$

Como ψ é homomorfismo podemos estender linearmente esta aplicação para polinômios em $u'v'$ e por densidade estendemos continuamente ao produto cruzado. E portanto provamos que $A_\theta \cong C(\mathbb{S}^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$.

Capítulo 2

Projeções em A_θ

2.1 Introdução

Seja $\mathcal{I}$ o conjunto dos números irracionais e $\{A_\theta : \theta \in \mathcal{I}\}$, uma família de álgebras de rotação irracional, é natural que nos questionemos, por exemplo, se os elementos deste família são todos distintos, ou quais são isomorfos. Neste capítulo veremos que a estrutura projetiva de A_θ nos fornece informações que nos possibilitam não somente responder tais indagações mas também obter propriedades interessantes desta álgebra.

Se $\theta \in \mathcal{I}$ não é óbvio que a álgebra A_θ possua qualquer projeção diferente das triviais. Por exemplo, quando $\theta = 0$ de fato não existe nenhuma projeção não trivial, pois $A_0 \cong \mathcal{C}(\mathbb{T}^2)$ e suas únicas projeções são as funções constantes 0 e 1 já que $\mathbb{T}^2$ é conexa. Por outro lado para racionais não inteiros $\frac{p}{q}$, a álgebra $A_{\frac{p}{q}}$ possui projeções não triviais.

Todos os conceitos e notações referidos daqui por diante que não forem explicitamente definidos estarão detalhados no Apêndice.

Lema 2.1. *Se p e q são projeções em uma $C^\star$-álgebra A ($p, q \in \mathcal{P}_n(A)$) e $\|p - q\| < 1$, então $p \sim_h q$.*

Demonstração:
Ver demonstração em [20].

$\square$

Proposição 2.1. *Se A é uma $C^\star$-álgebra unital separável então $\mathcal{K}_0(A)$ é um grupo abeliano enumerável.*

Demonstração:
Seja $\widetilde{A}$ um subconjunto enumerável e denso em A, temos que para todo $p \in A$, em particular se p é projeção, existe $\widetilde{p} \in \widetilde{A}$ tal que $\|p - \widetilde{p}\| < 1$ donde segue pelo lema 2.1 que $p \sim_h \widetilde{p}$ e logo pela proposição D.9 que $[p]_0 = [\widetilde{p}]_0$. Pela densidade de $\widetilde{A}$ em A segue que, $\mathcal{K}_0(A) = \{[\widetilde{p}]_0| \quad \widetilde{p} \in \mathcal{P}_n(\widetilde{A}) \quad para \quad algum \quad n\}$ é enumerável.

$\square$

2.2 Projeções em A_θ

Projeções não triviais em A_θ para θ irracional foram construídas primeiramente por Rieffel em [16], baseado em uma sugestão de Powers de que A_θ contém elementos autoadjuntos com espectro desconexo. Estas são chamadas as projeções de Powers-Rieffel. Para construir tais projeções primeiro considere qualquer produto cruzado da forma $A = B \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. Vamos considerar B como uma sub-álgebra de A e α como o automorfismo $b \mapsto vbv^{-1}$, onde $v \in A$ é um elemento unitário e $b \in B$. A idéia de Rieffel é analisar uma projeção da forma

$$p = hv^{-1} + f + gv, \tag{2.1}$$

onde $f, g, h \in B$.

Temos que:

$$p^\star = vh^\star + f^\star + v^{-1}g^\star = \alpha(h^\star)v + f^\star + \alpha^{-1}(g^\star)v^{-1}$$

e

$$p^2 = h\alpha^{-1}(h)v^{-2} + (h\alpha^{-1}(f) + fv)v^{-1} + (h\alpha^{-1}(g) + f^2 + g\alpha(h)) + (fg + g\alpha(f))v + g\alpha(g)v^2$$

logo para que p seja uma projeção devemos ter $p = p^2 = p^\star$ o que implica,

$$f = f^\star, \quad g = \alpha(h)^\star \tag{2.2}$$

$$g\alpha(g) = 0, \tag{2.3}$$

$$fg + g\alpha(f) = g, \tag{2.4}$$

$$gg^\star + \alpha^{-1}(g^\star g) = f(1-f) \tag{2.5}$$

Qualquer par (f, g) satisfazendo os ítens de (2.2) à (2.5) da uma projeção no produto cuzado $A = B \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. Observe que a última relação implica que $0 \leq f \leq 1$ em B.

Proposição 2.2. *Se $\theta \notin \mathbb{Z}$,a álgebra A_θ contém pelo menos uma projeção não trivial.*

Demonstração:

Nos precisamos resolver 2.1 no caso em que $B = \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ onde cada função deste espaço será identificada como uma função real periódica de período 1, sendo a ação α neste caso dada por $\alpha(g)(t) := g(t-\theta)$. Podemos assumir que $0 < \theta \leq \frac{1}{2}$ já que $A_\theta \cong A_{\theta+n}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ e $A_\theta \cong A_{1-\theta}$. Então o conjunto de equações (1.2) à (1.5) se transforma no seguinte sistema:

$$\text{(I)} g(t)g(t-\theta) = 0$$
$$\text{(II)} g(t)f(t-\theta) = (1-f(t))g(t)$$
$$\text{(III)} |g(t)|^2 + |g(t+\theta)|^2 = f(t)(1-f(t))$$

Este sistema tem por solução,

$$f(t) = 1 - f(t-\theta), \quad em \quad [\theta, \theta+\epsilon],$$

$$f \equiv 1 \text{ para } t \in [\epsilon, \theta] \text{ e } f \equiv 0 \text{ para } t \in [\theta + \epsilon, 1]$$

e,

$$g(t) = (f(t)(1 - f(t)))^{\frac{1}{2}} \quad em \quad [\theta, \theta + \epsilon]$$

e

$$g \equiv 0 \quad \forall t \in [0, 1]^C$$

É fácil verificar que estas são de fato soluções para 2.1. Para maiores detalhes sobre a construção das funções f e g veja [16]. Como existe uma considerável liberdade na escolha de f no intervalo $[0, \theta]$, deduzimos que não existe uma única projeção p que satisfaça 2.1. Além disso, se $p \sim_h p'$, então $[p] = [p']$ em $\mathcal{K}_0(A_\theta)$.

Corolário 2.1. *Se $0 < \theta < 1$, toda projeção de Powers-Rieffel na álgebra A_θ tem traço $\tau(p) = \theta$.*

Demonstração:
Da construção da projeção p concluimos que:

$$\tau(p) = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^\theta f(t)dt + \int_0^\theta (1 - f(t))dt = \theta,$$

quando $0 < \theta \leq \frac{1}{2}$. Então $\tau(1 - p) = 1 - \theta$, onde $1 - p$ pode ser vista como uma projeção de Power-Rieffel em $A_{1-\theta}$, via o isomorfismo $A_\theta \cong A_{1-\theta}$ induzido por $v \mapsto v^{-1}$.

$\square$

Nosso objetivo agora é provar que a imagem do traço τ sobre projeções de A_θ quando θ é irracional fica completamente determinada pelo conjunto $[0, 1] \bigcap \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$. Para tal, provaremos inicialmente que existe uma sobrejeção (τ) entre os conjuntos mencionados.

Teorema 2.1. *Se θ é um número irracional, o estado tracial sobre A_θ aplica o conjunto das projeções de A_θ sobre $(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\theta)\bigcap[0,1]$.*

Demonstração:

Queremos provar que para cada $\theta' \in (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\theta)\bigcap[0,1]$ existe uma projeção $p \in A_\theta$ tal que $\tau(p) = \theta'$. Sejam u e v os operadores unitarios geradores de A_θ satisfazendo (1.3). Para todo $m \in \mathbb{Z}$ não nulo, considere a subalgebra fechada de A_θ gerada por u^m e v. Fazendo $k = m$ e $v = 1$ em 1.3, temos $vu^m = e^{2\pi i m\theta}u^m v$, esta subalgebra é isomorfa à $A_{m\theta}$ e a restrição de τ a esta subalgebra é o único estado tracial sobre A_θ. A projeção de Powers-Rieffel em $A_{m\theta}$ é então a projeção p_m em A_θ tal que $\tau(p_m) = m\theta - [m\theta]$, a parte fracionária de $m\theta$. (Recordamos que
$p_{-1} = 1 - p_1$, na qual o traço é $1-\theta$). Observemos que os números $0 = \tau(0)$, $1 = \tau(1)$ e $\{\tau(p_m) : m \neq 0\}$ preenchem totalmente o conjunto $(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\theta)\bigcap[0,1]$ e portanto a imagem de τ sobre projeções inclui este subconjunto enumerável denso do intervalo $[0,1]$.

□

Até aqui temos então que $\{\tau(p) : p$ é projeção em $A_\theta\} \supseteq (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\theta)\bigcap[0,1]$ precisamos mostrar agora que $\{\tau(p) : p$ é projeção em$A_\theta\} \subseteq (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\theta)\bigcap[0,1]$. Usaremos o seguinte resultado devido a M.Pimsner e D.Voiculescu apresentado em [15] que afirma: Existe uma outra $C^\star$-álgebra B_θ com um traço τ' , onde τ' aplica projeções de B_θ em $(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\theta)\bigcap[0,1]$ e existe um mergulho unital ($\star$-monomorfismo unital) $A_\theta \hookrightarrow B_\theta$.

Definição 2.1. *Vamos considerar a fração*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{\cdots}{+\frac{1}{a_N}}}}} \tag{2.6}$$

de $N+1$ variáveis $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots, a_N$, como uma fração contínua finita, ou quando não existir risco de ambiguidade, simplismente como fração contínua.

Observação 2.1. *Usualmente a fração contínua 2.6 é representada por,*

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_N]$$

Definição 2.2. *Denominamos* $[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n]$ *para* $(0 \leq n \leq N)$ *a n-ésima convergente de* $[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_N]$.

Um resultado que nos auxilia no cálculo das convergentes é o seguinte:

Teorema 2.2. *Se* p_n *e* q_n *são definidos por*

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \text{ sendo } p_0 = a_0 \text{ , } p_1 = a_1 a_0 + 1$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \text{ sendo } q_0 = 1 \text{ , } q_1 = a_1$$

para $2 \leq n \leq N$. *Então:* $[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$

Demonstração:

Para demonstrar este teorema basta aplicar o processo de indução sobre "n".

$\square$

Observação 2.2. *Podemos colocar as relações de recorrência do teorema 2.2 na forma matricial,*

$$\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} & q_{n-1} \\ p_{n-2} & q_{n-2} \end{pmatrix}$$

Vamos supor que $a_0, a_1, a_2, \cdots$ é uma sequência de inteiros tais que $a_1 > 0, \cdots, a_N > 0$ e $x_n = [a_0, a_1, \cdots, a_n]$ é para cada n, uma fração contínua representando um número racional x_n. Se tivermos que x_n converge para x quando $n \to \infty$, então é natural dizer que a fração contínua

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots]$$

converge para x, e escrevemos

$$x = [a_0, a_1, a_2, \cdots].$$

Lema 2.2. *Se p_n e q_n são definidos como no teorema 2.2 para todo $n \geq 2$ então vale que,*

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}q_n}.$$

Demonstração:

A demonstração deste lema pode ser encontrada em [5].

$\square$

Teorema 2.3. *Cada número irracional possui uma única representação como uma fração contínua infinita.*

Demonstração:

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [5].

$\square$

Definição 2.3. *Dadas duas $C^\star$-álgebras A e B diremos que uma aplicação ρ é um mergulho de A em B quando ρ for um $\star$-homomorfismo injetivo.*

Usando a expansão de θ em frações contínuas desejamos construir para cada $n \in \mathbb{N}$ mergulhos $\rho_n : B_n \longrightarrow B_{n+1}$, onde $B_n = \mathbb{M}_{q_n} \oplus \mathbb{M}_{q_{n-1}}$ são AF-álgebras de modo que em cada B_n para $u_n, v_n \in B_n$ seja satisfeito $u_n v_n = e^{2\pi i \frac{p_n}{q_n}} v_n u_n$ e $\|\rho_n(u_n) - u_{n+1}\| \to 0$, $\|\rho_n(v_n) - v_{n+1}\| \to 0$. Com isto vamos mergulhar A_θ em uma álgebra B_θ tal que $B_\theta = \varinjlim(B_n, \rho_n)$ da qual conhecemos a estrutura projetiva.

Teorema 2.4. *Seja $\theta \in (0,1)$ um número irracional. Existe um $\star$-monomorfismo*

$$\rho : A_\theta \to B_\theta$$

sendo B_θ uma AF-álgebra definida pelo limite indutivo de $C^\star$-álgebras de dimensão finita para as quais o limite correspondente dos grupos $\mathcal{K}_0$ é $... \to \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\rho_n} \mathbb{Z}^2 \to ...$ onde $[a_1, a_2, ..., a_n, ...]$ é a expansão em frações contínuas de θ.

Demonstração:

Considere a expansão em frações contínuas de θ dada por $\theta = [a_1, a_2, ..., a_n, ...]$, a n-ésima convergente de $\frac{p_n}{q_n} = [a_1, a_2, ..., a_n]$, onde p_n, q_n são calculadas recursivamente pelas fórmulas:

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad para \quad n \geq 2 \quad sendo \quad p_0 = 0, p_1 = 1 \tag{2.7}$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad para \quad n \geq 2 \quad sendo \quad q_0 = 1, q_1 = a_1 \tag{2.8}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere o espaço $\mathbb{M}_{q_n}$ das matrizes de ordem q_n agindo sobre $\mathbb{C}^{q_n}$. Denotaremos por $e_j^{(n)}$ a base canônica para $\mathbb{C}^{q_n}$,$1 \leq j \leq q_n$. A AF-álgebra na qual A_θ será mergulhada é o limite indutivo

$$\longrightarrow B_{n-1} \xrightarrow{\rho_n} B_n \longrightarrow \tag{2.9}$$

das $C^\star$-álgebras de dimensão finita $B_n = \mathbb{M}_{q_n} \oplus \mathbb{M}_{q_{n-1}}$, onde os mergulhos $\rho_n : B_{n-1} \longrightarrow B_n$ são definidos da seguinte forma:

$$\rho_n(x \oplus y) = W_n(\underbrace{x \oplus ... \oplus x}_{a_n - vezes} \oplus y) W_n^\star \oplus x$$

onde $x \in \mathbb{M}_{q_{n-1}}$,$y \in \mathbb{M}_{q_{n-2}}$ e

$$W_n : \underbrace{\mathbb{C}^{q_{n-1}} \oplus ... \oplus \mathbb{C}^{q_{n-1}}}_{a_n - vezes} \oplus \mathbb{C}^{q_{n-2}} \longrightarrow \mathbb{C}^{q_n}$$

é um operador unitário que será definido logo abaixo. Observe que (2.8) torna possível a definição de W_n.

Para definir o operador W_n, observe que:

$q_2 = a_2 q_1 + 1 \geq 2$;

$q_3 = a_3 q_2 + a_1 \geq 3$;

$q_4 = a_4 q_3 + q_2 \geq 4$

Então para $n \geq 6$ podemos fixar uma constante inteira s de modo a tornar verdadeira a seguinte desigualdade,

$$\frac{q_{n-2}}{4} \leq s \leq \frac{q_{n-2}}{2}$$

donde segue que o limite (2.9) iniciará em

$$B_5 \xrightarrow{\rho_6} B_6 \xrightarrow{\rho_7} B_7 \xrightarrow{\rho_8} \cdots .$$

Então definimos W_n $(n \geq 6)$ da seguinte forma

$$W_n(\xi_1 \oplus ... \oplus \xi_{a_n} \oplus \eta) = W_n^{(1)} \xi_1 + ... + W_n^{(a_n)} \xi_{a_n} + \widetilde{W}_n \eta$$

onde

$$W_n^{(k)} : \mathbb{C}^{q_{n-1}} \longrightarrow \mathbb{C}^{q_n} \ , (1 \leq k \leq a_n)$$
$$\widetilde{W}_n : \mathbb{C}^{q_{n-2}} \longrightarrow \mathbb{C}^{q_n}$$

são operadores isométricos definidos pelas fórmulas abaixo:

$W_n^{(k)} e_j^{(n-1)} = \alpha_j^{(k)} e^n_{a(k,j)} + \beta_j^{(k)} e^n_{b(k,j)} + \gamma_j^{(k)} e^n_{c(k,j)}$, onde $1 \leq j \leq q_{n-1}$ e $1 \leq k \leq a_n$

onde os índices são definidos módulo q_n e dados por:

$$a(k,j) = (-1)^k [\tfrac{k}{2}] q_{n-1} + j$$
$$b(k,j) = (-1)^{k+1} [\tfrac{k}{2}] q_{n-1} + j$$
$$c(k,j) = (-1)^k [\tfrac{k}{2}] q_{n-1} - q_{n-1} + j$$

e

$\widetilde{W}_n e_j^{(n-2)} = \lambda_j e^n_{l(j)} + \mu_j e^n_{m(j)}$ para $1 \leq j \leq q_{n-2}$

onde os índices são dados por:

$$l(j) = (-1)^{a_n+1} [\tfrac{a_n+1}{2}] q_{n-1} + j$$
$$m(j) = [\tfrac{a_n+1}{2}] q_{n-1} + j - \tfrac{(1-(-1)^{a_n})}{2} q_{n-2}$$

onde $[x]$ denota a parte inteira de x.

As fórmulas para os coeficientes são dadas por

$\alpha_j^{(1)} = 0$ se $1 \leq j \leq q_{n-1}$

e

$$\alpha_j^{(k)} = \begin{cases} \exp(\frac{\pi i}{s} j \frac{1-(-1)^k}{2}) \cos(\frac{\pi}{2s} j), \\ \text{se} \quad 1 \leq j \leq s \\ 0, \qquad \text{se} \quad s < j \leq q_{n-1} \end{cases}$$

para $1 < k \leq a_n$.

$$\beta_j^{(1)} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad 1 \leq j \leq q_{n-1} - s \\ \cos(\frac{\pi}{2s}(j - q_{n-1} + s)), & \text{se} \quad q_{n-1} - s < j \leq q_{n-1} \end{cases}$$

e

$$\beta_j^{(k)} = \begin{cases} (-1)^k \exp(\frac{\pi i}{s} j \frac{1-(-1)^k}{2}) sen(\frac{\pi}{2s} j), & \text{se} \quad 1 \leq j \leq s \\ 1, & \text{se} \quad s < j \leq q_{n-1} - s \\ \exp(\frac{\pi i}{s}(j - q_{n-1} + s)\frac{1+(-1)^k}{2} \cos(\frac{\pi}{2s}(j - q_{n-1} + s)), & \text{se} \quad q_{n-1} - s < j \leq q_{n-1} \end{cases}$$

para $1 < k \leq a_n$.

$$\gamma_j^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad 1 \leq j \leq q_{n-1} - s \\ (-1)^{k+1} \exp(\frac{\pi i}{s}(j - q_{n-1} + s)\frac{1+(-1)^k}{2} sen(\frac{\pi}{2s}(j - q_{n-1} + s)), & \text{se} \quad q_{n-1} - s < j \leq q_{n-1} \end{cases}$$

para $1 \leq k \leq a_n$.

E para os coeficientes(para $\widetilde{W}_n$), as fórmulas para λ_j e μ_j são distintas dependendo se a_n é par ou ímpar.

Para a_n par temos:

$$\lambda_j = \begin{cases} \exp(\frac{\pi i}{s} j) \cos(\frac{\pi}{2s} j), & \text{se} \quad 1 \leq j \leq s \\ 0, & \text{se} \quad s < j \leq q_{n-2} \end{cases}$$

$$\mu_j = \begin{cases} -\exp(\frac{\pi i}{s} j) sen(\frac{\pi}{2s} j), & \text{se} \quad 1 \leq j \leq s \\ 1, & \text{se} \quad s < j \leq q_{n-2} \end{cases}$$

Para a_n ímpar:

$$\lambda_j = \begin{cases} \exp(\frac{\pi i}{s}(j - q_{n-2} + s)) \cos(\frac{\pi}{2s}(j - q_{n-2} + s)), & \text{se} \quad q_{n-2} - s < j \leq q_{n-2} \\ 1, & \text{se} \quad 1 \leq j \leq q_{n-2} - s \end{cases}$$

$$\mu_j = \begin{cases} -\exp(\frac{\pi i}{s}(j - q_{n-2} + s)) sen(\frac{\pi}{2s}(j - q_{n-2} + s)), & \text{se} \quad q_{n-2} - s < j \leq q_{n-2} \\ 0, & \text{se} \quad 1 \leq j \leq q_{n-2} - s \end{cases}$$

Observe que $W_n^{(k)}$ com $1 \leq k \leq a_n$ e $\widetilde{W}_n$ são isometrias com imagens ortogonais aos pares. Isto juntamente com (2.8)implica que W_n é um operador unitário.

Para cada $n \geq 4$ consideremos operadores $U_n, V_n \in \mathbb{M}_n$ definidos por:

$$U_n e_j^{(n)} = \begin{cases} e_{j+1}^{(n)}, & \text{se} \quad 1 \leq j < q_n \\ e_1^{(n)}, & \text{se} \quad j = q_n \end{cases}$$

$$V_n e_j^{(n)} = \zeta_n^j e_j^{(n)} \text{ onde } \zeta_n = \exp(2\pi i \tfrac{p_n}{q_n}).$$

Lema 2.3. *Para $n \geq 6$ as seguintes desigualdades são válidas:*

(i)$\|W_n^{(k)} U_{n-1} - U_n W_n^{(k)}\| \leq \frac{36\pi}{q_{n-2}}$

(ii)$\|W_n^{(k)} V_{n-1} - V_n W_n^{(k)}\| \leq \frac{6\pi}{q_{n-1}}$

(iii)$\|\widetilde{W}_n U_{n-2} - U_n \widetilde{W}_n\| \leq \frac{36\pi}{q_{n-2}}$

(iv)$\|\widetilde{W}_n V_{n-2} - V_n \widetilde{W}_n\| \leq 6\pi(\frac{1}{q_{n-1}} + \frac{1}{q_{n-2}})$

Demonstração:

Vamos provar a 1ª desigualdade. Seja $e_j^{(n-1)} \in \mathbb{C}^{q_{n-1}}$:
Da definição do operador U_n segue que teremos inicialmente duas expressões para majorar em norma, são elas:

Para $1 \leq j < q_{n-1}$, temos que:

$$(W_n^{(k)} U_{n-1} - U_n W_n^{(k)})(e_j^{(n-1)}) = (\alpha_{j+1}^{(k)} - \alpha_j^{(k)})(e_{a(k,j+1)}^{(n)}) + (\beta_{j+1}^{(k)} - \beta_j^{(k)})(e_{b(k,j+1)}^{(n)}) + \\ +(\gamma_{j+1}^{(k)} - \gamma_j^{(k)})(e_{c(k,j+1)}^{(n)}) \quad (2.10)$$

Vamos tentar majorar a norma da primeira parcela da soma acima e em seguida as demais parcelas:

$$|(\alpha_{j+1}^{(k)} - \alpha_j^{(k)})(e_{a(k,j+1)}^{(n)}| = |\underbrace{\alpha_{j+1}^{(k)}(e_{a(k,j+1)}^{(n)})}_{I} - \underbrace{\alpha_j^{(k)}(e_{a(k,j+1)}^{(n)})}_{II}|$$

onde:

$$I.\alpha_{j+1}^{(k)}(e_{a(k,j+1)}^{(n)}) = \begin{cases} exp(\frac{\pi i}{s}(j+1)\frac{1-(-1)^k}{2})\cos(\frac{\pi}{2s}(j+1)), & \text{se} \quad 1 \leq j \leq s \\ 0, & \text{se} \quad s < j < q_{n-1} \end{cases}$$

$$II.\alpha_{j}^{(k)}(e_{a(k,j+1)}^{(n)}) = \begin{cases} exp(\frac{\pi i}{s}(j)\frac{1-(-1)^k}{2})\cos(\frac{\pi}{2s}(j)), & \text{se} \quad 1 \leq j \leq s \\ 0, & \text{se} \quad s < j < q_{n-1} \end{cases}$$

logo teremos:

$$|(\alpha_{j+1}^{(k)} - \alpha_j^{(k)})(e_{a(k,j+1)})| = |\cos(\frac{\pi}{2s}(j+1) - \cos(\frac{\pi}{2s}j)| \leq (\frac{\pi}{2s}j + \frac{\pi}{2s} - \frac{\pi}{2s}j) = \frac{\pi}{2s},$$

pelo teorema do Valor Médio. E ainda, como

$$\frac{q_{n-2}}{4} \leq s \leq \frac{q_{n-2}}{2} \quad segue \quad que \quad \frac{\pi}{2s} \leq \frac{2\pi}{q_{n-2}}.$$

vamos a 2ª parcela: $|(\beta_{j+1}^{(k)} - \beta_j^{(k)})(e_{b(k,j+1)}^{(n)})| = |\underbrace{\beta_{j+1}^{(k)}(e_{b(k,j+1)}^{(n)})}_{III} - \underbrace{\beta_j^{(k)})(e_{b(k,j+1)}^{(n)})}_{IV}|$

onde

$$III.\beta_{j+1}^{(k)}(e_{b(k,j+1)}^{(n)}) = \begin{cases} (-1)^k exp(\frac{\pi i}{s}(j+1)\frac{1-(-1)^k}{2}) sen(\frac{\pi}{2s}(j+1)), \\ \text{se} \quad 1 \leq j \leq s \\ 1, \quad \text{se} \quad s < j < q_{n-1} - s \\ exp(\frac{\pi i}{s}(j+1-q_{n-1}+s)\frac{1+(-1)^k}{2})\cos(\frac{\pi}{2s}(j+1-q_{n-1}+s)), \\ \text{se} \quad q_{n-1} - s < j < q_{n-1} \end{cases}$$

$$IV.\beta_{j}^{(k)}(e_{b(k,j)}^{(n)}) = \begin{cases} (-1)^k exp(\frac{\pi i}{s}(j)\frac{1-(-1)^k}{2}) sen(\frac{\pi}{2s}(j)), \\ \text{se} \quad 1 \leq j \leq s \\ 1, \quad \text{se} \quad s < j < q_{n-1} - s \\ exp(\frac{\pi i}{s}(j-q_{n-1}+s)\frac{1+(-1)^k}{2})\cos(\frac{\pi}{2s}(j-q_{n-1}+s)), \\ \text{se} \quad q_{n-1} - s < j < q_{n-1} \end{cases}$$

logo se $1 \leq j < s$ teremos:

$$|(\beta_{j+1}^{(k)} - \beta_j^{(k)})(e_{b(k,j+1)})| = |(-1)^k \exp(\frac{\pi i}{s}(j+1)\frac{1-(-1)^k}{2})sen(\frac{\pi}{2s}(j+1)) - \\ -(-1)^k \exp(\frac{\pi i}{s}j\frac{1-(-1)^k}{2})sen(\frac{\pi}{2s}j)|,$$

logo,

$$\begin{aligned} |(\beta_{j+1}^{(k)} - \beta_j^{(k)})(e_{b(k,j+1)})| &= |sen(\frac{\pi}{2s}(j+1)) - sen(\frac{\pi}{2s}j)| \leq \\ &\leq |\frac{\pi}{2s}j + \frac{\pi}{2s} - \frac{\pi}{2s}j| = \frac{\pi}{2s} \leq \frac{2\pi}{q_{n-2}}. \end{aligned}$$

e para $q_{n-1} - s < j < q_{n-1}$, temos:

$$\begin{aligned} |(\beta_{j+1}^{(k)} - \beta_j^{(k)})(e_{b(k,j+1)})| &= |\exp(\frac{\pi i}{s}(j+1-q_{n-1}+s)\frac{1+(-1)^k}{2})\cos(\frac{\pi}{2s}(j+1-q_{n-1}+s)) - \\ &- \exp(\frac{\pi i}{s}(j-q_{n-1}+s)\frac{1+(-1)^k}{2})\cos(\frac{\pi}{2s}(j-q_{n-1}+s))| \leq \frac{2\pi}{q_{n-2}}. \end{aligned}$$

e finalmente a 3ª parcela da soma:

$$|(\gamma_{j+1}^{(k)} - \gamma_j^{(k)})(e_{c(k,j+1)}^{(n)})| = |\underbrace{\gamma_{j+1}^{(k)}(e_{b(k,j+1)}^{(n)})}_{V} - \underbrace{\gamma_j^{(k)})(e_{b(k,j+1)}^{(n)})}_{VI}|$$

onde:

$$V.\gamma_{j+1}^{(k)}(e_{b(k,j+1)}^{(n)}) = \begin{cases} 0, \quad \text{se} \quad 1 \leq j \leq q_{n-1} - s \\ (-1)^{k+1}\exp(\frac{\pi i}{s}(j+1-q_{n-1}+s)\frac{1+(-1)^k}{2})sen(\frac{\pi}{2s}(j+1-q_{n-1}+s)), \\ \text{se} \quad q_{n-1} - s < j < q_{n-1} \end{cases}$$

$$VI.\gamma_j^{(k)}(e_{b(k,j)}^{(n)}) = \begin{cases} 0, \quad \text{se} \quad 1 \leq j \leq q_{n-1} - s \\ (-1)^{k+1}\exp(\frac{\pi i}{s}(j-q_{n-1}+s)\frac{1+(-1)^k}{2})sen(\frac{\pi}{2s}(j-q_{n-1}+s)), \\ \text{se} \quad q_{n-1} - s < j < q_{n-1} \end{cases}$$

Logo,

$$|(\gamma_{j+1}^{(k)} - \gamma_j^{(k)})(e_{c(k,j+1)}^{(n)})| = |sen(\frac{\pi}{2s}(j+1-q_{n-1}+s)) - sen(\frac{\pi}{2s}(j-q_{n-1}+s))| \leq \\ \leq \frac{\pi}{2s} \leq \frac{2\pi}{q_{n-2}}$$

Portanto mostramos que para $1 \leq k \leq a_n$, e $1 \leq j < q_{n-1}$,

$$|\alpha_{j+1}^{(k)} - \alpha_j^{(k)}|, \quad |\beta_{j+1}^{(k)} - \beta_j^{(k)}|, \quad |\gamma_{j+1}^{(k)} - \gamma_j^{(k)}|,$$

ficam limitados por $\frac{6\pi}{q_{n-2}}$.

e para $j = q_{n-1}$:

$$\begin{aligned}
(W_n^{(k)} U_{n-1} - U_n W_n^{(k)})(e_j^{(n-1)}) &= \alpha_1^{(k)}(e_{a(k,1)}^{(n)}) - \alpha_{q_{n-1}}^{(k)}(e_{a(k,q_{n-1})+1}^{(n)}) + \beta_1^{(k)}(e_{b(k,1)}^{(n)}) - \\
&- \beta_{q_{n-1}}^{(k)}(e_{b(k,q_{n-1})+1}^{(n)}) + \gamma_1^{(k)}(e_{c(k,1)}^{(n)}) - \\
&- \gamma_{q_{n-1}}^{(k)}(e_{c(k,q_{n-1})+1}^{(n)}). \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Comparando os índices e observando por exemplo que $a(k,1) = c(k,q_{n-1}) + 1$ o que nos dará $|\alpha_1^{(k)} - \gamma_{q_{n-1}}^{(k)}| < \frac{6\pi}{q_{n-2}}$ sendo $k > 1$ donde se conclui que:

$|(W_n^{(k)} U_{n-1} - U_n W_n^{(k)})(e_j^{(n-1)})| \leq \frac{18\pi}{q_{n-2}}$ o que implica que

$$\|(W_n^{(k)} U_{n-1} - U_n W_n^k) e_j^{(n-1)}\| \leq \frac{18\pi}{q_{n-2}}$$

para $1 \leq k \leq a_n$, $\quad 1 \leq j \leq q_{n-1}$.

Observando ainda que os vetores $e_{a(k,j_1)}^{(n)}$, $e_{b(k,j_2)}^{(n)}$, $e_{c(k,j_3)}^{(n)}$, $1 \leq j_1, j_2, j_3 \leq q_{n-1}$ são ortogonais aos pares quando fixamos k. Donde segue que o operador $W_n^{(n)} U_{n-1} - U_n W_n^{(k)}$ aplica os vetores canônicos em vetores ortogonais aos pares. Isto nos permite concluir a primeira desigualdade. A prova da desigualdade (iii) é análoga a feita para (i).

Para provar (ii) e (iv) de 2.3, observe que para cada $m \in \mathbb{Z}$ tal que $|mq_{n-1} + j| \leq q_n$ temos:

$$|\zeta_{n-1}^j - \zeta_n^{mq_{n-1}+j}| = \| \exp(2\pi i \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} j) - \exp(2\pi i \frac{p_n}{q_n}(mq_{n-1} + j))| =$$

$$| \exp(2\pi i \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}(mq_{n-1} + j)) - \exp(2\pi i \frac{p_n}{q_n}(mq_{n-1} + j))| \leq |2\pi i(mq_{n-1} + j)(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n})| \leq$$

$$\leq 2\pi q_n |\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}| = \frac{2\pi}{q_{n-1}}.$$

Isto nos garante que

$$|\zeta_{n-1}^j - \zeta_n^a(k,j)| \le \frac{2\pi}{q_{n-1}} \quad para \quad 1 \le k \le a_n, \quad 1 \le j \le q_{n-1},$$

e de modo similar mostramos que $|\zeta_{n-1}^j - \zeta_n^{b(k,j)}|$ e $|\zeta_{n-1}^j - \zeta_n^{c(k,j)}|$ ficam limitadas por $\frac{2\pi}{q_{n-1}}$ para $1 \le k \le a_n$, $1 \le j \le q_{n-1}$.

Donde segue que: $\|W_n^{(k)} V_{n-1} - V_n W_n^{(k)}(e_j^{n-1})\| \le \frac{6\pi}{q_{n-1}}$ para $1 \le k \le a_n$, $1 \le j \le q_{n-1}$. Para a conclusão de (ii) basta observar que os operadores W_n e V_n aplicam vetores da base canônica em vetores ortogonais. Da mesma forma provamos (iv).

□

Agora vamos mostrar que os operadores $U_n \oplus U_{n-1} \in B_n \subset B_\theta$ e $V_n \oplus V_{n-1} \in B_n \subset B_\theta$ convergem em norma para elementos unitários, respectivamente U e V, da AF-álgebra A.

Lema 2.4. *(i)*$\displaystyle\sum_{n\ge 6} \|\rho_n(U_{n-1} \oplus U_{n-2}) - U_n \oplus U_{n-1}\| < \infty$

(ii)$\displaystyle\sum_{n\ge 6} \|\rho_n(V_{n-1} \oplus V_{n-2}) - V_n \oplus V_{n-1}\| < \infty$

Demonstração:
Usando que a imagem dos operadores $W_n^{(k)} U_{n-1} - U_n W_n^{(k)}$ e $W_n^{(j)} U_{n-1} - U_n W_n^{(j)}$ são ortogonais sempre que $|k-j| > 6$.Usando o lema anterior temos que:

$$\|W_n(U_{n-1} \oplus \cdots \oplus U_{n-1} \oplus U_{n-2}) - U_n W_n\| \le 6 \sup_{1\le k\le a_n} \|W_n^{(k)} U_{n-1} - U_n W_n^{(k)}\| + \\ + \|\widetilde{W}_n U_{n-2} - U_n \widetilde{W}_n\| \le 7\frac{36\pi}{q_{n-2}}$$

ou seja

$$\|\rho_n(U_{n-1} \oplus U_{n-2}) - U_n \oplus U_{n-1}\| \le \tfrac{300\pi}{q_{n-2}}$$

Utilizando o mesmo argumento mostramos que

$$\|\rho_n(V_{n-1} \oplus V_{n-2}) - V_n \oplus V_{n-1}\| \le \tfrac{42\pi}{q_{n-1}} + \tfrac{7\pi}{q_{n-2}}$$

Mas temos que $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} > 2q_{n-2} \geq \cdots \geq 2^{[\frac{n-1}{2}]}$ implica a convergência da série $\sum \frac{1}{q_n}$ e garante a prova do lema.

$\square$

Como $U_n^\star V_n U_n = \exp(2\pi i \frac{p_n}{q_n}) V_n$ temos que $U^\star V U = \exp(2\pi i\theta)V$. Portanto garantimos a existência de um $\star$-monomorfismo unital $\rho : A_\theta \to B_\theta$.

$\square$

E.G. Effros e C.L. Shen mostraram no artigo "Approximately finite $C^\star$ algebras and continued fractions"que o grupo $\mathcal{K}_0(B_\theta)$ é isomorfo ao grupo ordenado $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta \subset \mathbb{R}$. Para isto basta mostrar que existe um estado tracial (traço) τ_1 sobre B_θ tal que a imagem do homomorfismo induzido[1] $\mathcal{K}_0(B_\theta) \to \mathbb{R}$ está contido em $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$. Vamos definir então o funcional τ_1. É suficiente encontrar inteiros positivos α_n, β_n correspondendo aos valores de τ_1 sobre projeções mínimas de $\mathbb{M}_{q_n}$ e $\mathbb{M}_{q_{n-1}}$ que são os somandos de A_n. Estes números devem satisfazer as relações:

$$a_n\alpha_n + \beta_n = \alpha_{n-1}, \qquad \beta_{n-1} = \alpha_n \qquad e \qquad a_1\alpha_1 + \beta_1 = 1.$$

que se reduzem a:

$$a_n\alpha_n + \alpha_{n+1} = \alpha_{n-1}, \qquad a_1\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

Portanto será suficiente determinar os $\alpha_n' s$.

Substituindo agora: $\alpha_1 = \theta$ e $\alpha_2 = 1 - a_1\theta$ nos podemos fazer

$$\alpha_n = \theta_1 ... \theta_n$$

onde $\theta_1 = \theta$ e,

$$\theta_{j+1} = \frac{1}{\theta_j} - \alpha_j.$$

Vamos verificar os primeiros termos do produto $\alpha_n = \theta_1 \cdots \theta_n$:

$$\theta_1 = \alpha_1$$

$$\theta_2 = \frac{1}{\theta_1} - a_1 = \frac{1}{\theta_1} - \theta_1 \Leftrightarrow \theta_1\theta_2 = 1 - a_1\theta = \alpha_2$$

[1] veja apêndice para maiores detalhes

$$\theta_3 = \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} - a_1} - a_2 \Leftrightarrow \theta_3 = \frac{\theta_1}{1 - a_1\theta_1} - a_2 \Leftrightarrow (1 - a_1\theta)\theta_3 = (1 - a_1\theta)(\frac{\theta_1}{1 - a_1\theta_1} - a_2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \theta_1\theta_2\theta_3 = \theta_1 - a_2 + a_1a_2\theta_1 = \theta_1 + a_2\alpha_2 = \alpha_3.$$

Como $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$ nos teremos $\alpha_n \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto a imagem do homomorfismo $\mathcal{K}_0(B_\theta) \to \mathbb{R}$ induzido por τ_1 está contida em $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$. Observando que $\tau_1 \circ \rho = \tau$ deduzimos que a imagem do homomorfismo $\mathcal{K}_0(A_\theta) \to \mathbb{R}$ induzido por τ está contido em $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$. Portanto usando o resultado provado por M.A. Rieffel mencionado anteriormente temos:

Corolário 2.2. *Seja $\psi : \mathcal{K}_0(A_\theta) \to \mathbb{R}$ o homomorfismo induzido por τ. Então $\psi(\mathcal{K}_0(A_\theta)) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$.*

Demonstração:
Sejam $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ números irracionais, observe que $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta_1 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta_2$ como subconjuntos de $\mathbb{R}$ se e somente se $\theta_1 \in \{\theta_2, 1 - \theta_2\}$.

□

O resultado obtido no corolário anterior juntamente com o isomorfismo $A_{\theta_2} \cong A_{1-\theta_2}$ nos permite concluir:

Corolário 2.3. *Seja $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ números irracionais. Então A_{θ_1} e A_{θ_2} são isomorfas se e somente se $\theta_1 \in \{\theta_2, 1 - \theta_2\}$.*

Capítulo 3

Morita Equivalência e produtos cruzados

3.1 Introdução

A idéia de Morita equivalência provém da teoria de anéis: dois anéis R, S são Morita equivalentes se suas categorias de módulos são equivalentes. O teorema de Morita então diz que existe um R-S-bimódulo ${}_RX_S$ tal que esta equivalência associa ${}_SM$ à ${}_R(X \otimes_S M)$. Para $C^\star$-algebras, não existe tal teorema, no entanto em maio de 1997, David Blecher[1] anunciou um Teorema de Morita para $C^\star$-algebras que usa uma categoria na qual os objetos são Módulos de Hilbert e os morfismos são "operadores limitados". Mas ainda na década de 70, Rieffel mostrou que uma noção muito útil de Morita Equivalência para $C^\star$-algebras poderia ser obtida supondos-se a existência de certos bimódulos.

Todos os conceitos e notações mencionados neste capítulo a respeito de Módulos de Hilbert estão abordados em maiores detalhes no Apêndice.

[1]Para maiores detalhes consulte: D. Blecher, P. Muhly, V. Paulsen, Categories of operator modules: Morita equivalence and projective modules. American Mathematical Society, 2000.

Definição 3.1. *Duas $C^\star$-álgebras A e B são ditas fortemente Morita Equivalentes, o que denotamos por $A \sim_M B$, quando existe um B-A-bimódulo de Hilbert E e um A-B-bimódulo de Hilbert F tal que*

$$E \otimes_A F \simeq B \quad e \quad F \otimes_B E \simeq A$$

como B e A bimódulos respectivamente .

Proposição 3.1. *Morita equivalência forte é uma relação de equivalência.*

Demonstração:
Vamos provar que a relação definida em 3.1 é reflexiva. Para isto basta fazermos $A = B$ e $E = F = A$ e teremos $A \otimes_A A \simeq A$. A simetria da relação é óbvia. E para provar a transitividade, vamos supor que $A \sim_M B$ donde segue que $E \otimes_A F \simeq B$ e $F \otimes_B E \simeq A$ para bimódulos ${}_BE_A$ e ${}_AF_B$, e também que $B \sim_M C$ donde $G \otimes_B J \simeq C$ e $J \otimes_C G \simeq B$ para bimódulos ${}_CG_B$ e ${}_BJ_C$. Disto tiramos que $G \otimes_B E$ é um C-A-bimódulo de Hilbert e $F \otimes_B J$ é um A-C bimódulo de Hilbert que satisfazem:

$$G \otimes_B E \otimes_A F \otimes_B J \simeq G \otimes_B B \otimes_B J \simeq G \otimes_B J \simeq C$$

e

$$F \otimes_B J \otimes_C G \otimes_B E \simeq F \otimes_B B \otimes_B E \simeq F \otimes_B E \simeq A.$$

□

3.2 Morita equivalência entre álgebras de rotação irracional

Seja θ um número irracional e considere os seguintes subgrupos discretos e fechados de $\mathbb{R}$: $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}\theta$, donde os espaços quocientes $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\theta$ serão compactos. Consideremos as ações de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}\theta$ (por translação) sobre $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}\theta)$ e $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ respectivamente. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{Z}$ e $p \in \mathbb{Z}\theta$. As ações serão dadas por:

$$\alpha_t(f)(x + \mathbb{Z}\theta) := f(x + \mathbb{Z}\theta - t)$$

e

$$\beta_p(g)(y + \mathbb{Z}) := g(y + \mathbb{Z} - p).$$

Desta forma podemos introduzir duas $C^\star$-álgebras de transformação de grupo:

$$A := C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}\theta) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$$

e

$$B := C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \rtimes_\beta \mathbb{Z}\theta.$$

Nosso objetivo é provar que as $C^\star$-álgebras definidas acima são fortemente Morita equivalentes. Para isto o primeiro passo é encontrarmos um B-A-bimódulo de Hilbert que seja cheio em cada uma das álgebras.

Vamos considerar certas operações algébricas sobre as álgebras,

$$A_0 := C_{00}(\mathbb{Z}, C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}\theta))$$

e

$$B_0 := C_{00}(\mathbb{Z}\theta, C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})),$$

como feito de maneira geral no capítulo 1. Neste capítulo usaremos que cada função, por exemplo, em A_0 pode ser vista como uma função $f : \mathbb{Z} \times \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}\theta} \longrightarrow \mathbb{C}$ com suporte compacto e além disso como os grupos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}\theta$ são discretos estas funções terão na verdade suporte finito.

Desta forma definimos:

Em A_o:

$$(f_1 * f_2)(t, x + \mathbb{Z}\theta) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} f_1(s, x + \mathbb{Z}\theta) f_2(t - s, x + \mathbb{Z}\theta - s)$$
$$f^\star(t, x + \mathbb{Z}\theta) = \overline{f(-t, x + \mathbb{Z}\theta - t)}$$
$$\|f\|_1 = \sum_{t\in\mathbb{Z}} \sup_{x+\mathbb{Z}\theta \in \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}\theta}} |f(t, x + \mathbb{Z}\theta)|$$

analogamente em B_0 teremos:

$$(g_1 * g_2)(p, y + \mathbb{Z}) = \sum_{r\in\mathbb{Z}\theta} g_1(r, y + \mathbb{Z}) g_2(-r + p, -r + y + \mathbb{Z})$$
$$g^\star(p, y + \mathbb{Z}) = \overline{g(-p, -p + y + \mathbb{Z})}$$
$$\|g\|_1 = \sum_{p\in\mathbb{Z}\theta} \sup_{y+\mathbb{Z}\in\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}} |g(p, y + \mathbb{Z})|$$

Observe que, pelo fato de f ter suporte finito as operações de convolução e normas definidas acima são somas finitas. As $C^\star$-álgebras de produto cruzado $A := C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}\theta) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ e $B := C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \rtimes_\beta \mathbb{Z}\theta$ são respectivamente as $C^\star$ álgebras envolventes das álgebras A_0 e B_0.

Seja $E_0 = C_{00}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\text{supp(f) é compacto}\}$, queremos mostrar que E_0 tem estrutura de pré-B-A bimódulo de Hilbert, o que nos permitirá a menos de outros detalhes provar à equivalência desejada entre A e B. Atente para o fato de que à priori estaremos trabalhando em um subespaço denso.

Vamos definir ações sobre E_0. Seja $\xi \in E_0$:

I. **ação à esquerda de** B_0:

$$(g \triangleright \xi)(y) = \sum_{p\in\mathbb{Z}\theta} g(p, y + \mathbb{Z})\xi(y - p)$$

Lema 3.1. *A operação em I está bem definida e além disso* $g \triangleright \xi \in C_{00}(\mathbb{R})$

Demonstração:

Seja $y \in \mathbb{R}$:

$$(g \triangleright \xi)(y) = \sum_{p \in \mathbb{Z}\theta} g(p, y + \mathbb{Z})\xi(y - p) = \sum_{p=N}^{M} g(p, y + \mathbb{Z})\xi(y - p),$$

onde $g(p, y + \mathbb{Z}) \neq 0$ para $N \leq p \leq M$, $N, M \in \mathbb{Z}\theta$. Supondo que $supp\xi = K$, onde $K \subseteq \mathbb{R}$ é um compacto então para $y \in \mathbb{R}$, temos que $\xi(y - p) \neq 0 \Leftrightarrow y - p \in K \Leftrightarrow y \in K + p$. Usando o fato que $supp(g\xi) \subseteq supp(\xi)$, temos que: $supp(g\xi) \subseteq \bigcup_{p=N}^{M}(K + p)$ que é um compacto. Portanto concluímos que $g \triangleright \xi \in C_{00}(\mathbb{R})$.

□

II. **ação à direita de** A_0:

$$(\xi \triangleleft f)(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \xi(x + s)f(s, x + \mathbb{Z}\theta + s)$$

Lema 3.2. *A operação em II está bem definida e além disso* $\xi \triangleleft f \in C_c(\mathbb{R})$

Demonstração:

A prova desta afirmação é idêntica à da afirmação I.

□

Agora vamos provar as seguintes **associatividades**:

I. $((g_1 * g_2) \triangleright \xi)(y) = (g_1 \triangleright (g_2 \triangleright \xi))(y) \quad para \quad x, y \in \mathbb{R}$

Demonstração:

$$((g_1 * g_2) \triangleright \xi)(y) = \sum_{p \in \mathbb{Z}\theta} (g_1 * g_2)(p, y + \mathbb{Z})\xi(y - p) =$$

$$= \sum_{p,r \in \mathbb{Z}\theta} g_1(r, y + \mathbb{Z})g_2(p - r, y - r + \mathbb{Z})\xi(y - p) = (*)$$

Vamos fazer agora a seguinte substituição: $p = r + p'$

$$(*) = \sum_{p',r \in \mathbb{Z}\theta} g_1(r, y + \mathbb{Z})g_2(p', y - r + \mathbb{Z})\xi(y - r - p') = (**).$$

E agora seja $r = q$,

$$(**) = \sum_{p',q\in\mathbb{Z}\theta} g_1(q, y+\mathbb{Z})g_2(p', y-q+\mathbb{Z})\xi(y-q-p') = (g_1 \rhd (g_2 \rhd \xi))(y).$$

$\square$

$$\textbf{II}. \quad (\xi \lhd (f_1 * f_2))(x) = ((\xi \lhd f_1) \lhd f_2)(x) \quad para \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Demonstração:

$$(\xi \lhd (f_1 * f_2))(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \xi(x+s)(f_1 * f_2)(s, x+s+\mathbb{Z}\theta) =$$

$$= \sum_{s,t\in\mathbb{Z}} \xi(x+s)f_1(t, x+s+\mathbb{Z}\theta)f_2(s-t, x+s-t+\mathbb{Z}\theta) = (*)$$

Vamos fazer agora a seguinte substituição: $s = s' + v$

$$(*) = \sum_{s',v\in\mathbb{Z}} \xi(x+s'+v)f_1(t, x+s'+v+\mathbb{Z}\theta)f_2(s'+v-t, x+s'+v-t+\mathbb{Z}\theta) = (**).$$

E agora seja $t = v$,

$$(**) = \sum_{s',v\in\mathbb{Z}} \xi(x+s'+v)f_1(v, x+s'+v+\mathbb{Z}\theta)f_2(s', x+s'+\mathbb{Z}\theta) = ((\xi \lhd f_1) \lhd f_2)(x).$$

$\square$

Vamos introduzir em $E_0 = C_{00}(\mathbb{R})$ duas aplicações as quais devemos provar que são "produtos internos"(conforme apêndice A).

$$\textbf{I}. \quad \langle \xi, \eta \rangle (t, x+\mathbb{Z}\theta) := \sum_{q\in\mathbb{Z}\theta} \overline{\xi(x-q)}\eta(x-q-t) \tag{3.1}$$

$$\textbf{II}. \quad [\xi, \eta](p, y+\mathbb{Z}) := \sum_{s\in\mathbb{Z}} \xi(y+s)\overline{\eta(y+s-p)} \tag{3.2}$$

Devemos atentar neste momento para o fato que as aplicações definidas acima estão com imagens em A_0 e B_0 respectivamente. Mas sabemos que, $A = \overline{\frac{A_o}{N}}^{|||\cdot|||}$ onde dada $f \in A_0$, definimos como no capítulo 1: $|||f||| = \sup_{\substack{\pi: A \longrightarrow L(E) \\ rep.contrativa}} \|\pi(x)\|$ e $N = \{f \in A_0 \in / |||f||| = 0\}$. Desta forma estendemos as imagens das aplicações em **I** e **II** para os produtos cruzados A e B respectivamente. Obviamente estas aplicações estão bem definidas desde que cada soma converge para uma função de suporte finito.

Devemos verificar a validade das seguintes propriedades:

$$(i)\langle \xi, \eta \triangleleft f\rangle = \langle \xi, \eta\rangle * f.$$

Seja $(t, x+\mathbb{Z}\theta) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}\theta$ temos:

$$\begin{aligned}
\langle \xi, \eta f\rangle(t, x+\mathbb{Z}\theta) &= \sum_{q\in\mathbb{Z}\theta} \overline{\xi(x-q)}\eta f(x-q-t) \\
&= \sum_{q\in\mathbb{Z}\theta} \overline{\xi(x-q)} \sum_{s\in\mathbb{Z}} \eta(x-q-t+s) f(s, x-q-t+s+\mathbb{Z}\theta) = (*).
\end{aligned}$$

Vamos fazer a substituição: $-t+s = s'$

$$(*) = \sum_{q\in\mathbb{Z}\theta} \overline{\xi(x-q)} \sum_{s\in\mathbb{Z}} \eta(x-q+s') f(t+s', x-q+s'+\mathbb{Z}\theta) = (**).$$

Agora, seja $s' = -s$

$$(**) = \sum_{q\in\mathbb{Z}\theta} \overline{\xi(x-q)} \sum_{s'\in\mathbb{Z}} \eta(x-q-s) f(t-s, x-s+\mathbb{Z}\theta) = (\langle \xi, \eta\rangle * f)(t, x+\mathbb{Z}\theta) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \langle \xi, \eta \triangleleft f\rangle = \langle \xi, \eta\rangle * f.$$

$$(ii)\langle \xi, \eta\rangle^{\star} = \langle \eta, \xi\rangle.$$

Seja $(t, x+\mathbb{Z}\theta) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}\theta$ temos:

$$\begin{aligned}
\langle \xi, \eta\rangle^{\star}(t, x+\mathbb{Z}\theta) &= \overline{\langle \xi, \eta\rangle(-t, x+\mathbb{Z}\theta - t)} = \overline{\sum_{q\in\mathbb{Z}\theta} \overline{\xi(x-t-q)}\eta(x-q)} \\
&= \sum_{q\in\mathbb{Z}\theta} \overline{\eta(x-q)}\xi(x-t-q) = \langle \eta, \xi\rangle(t, x+\mathbb{Z}\theta) \Longrightarrow \langle \xi, \eta\rangle^{\star} = \langle \eta, \xi\rangle.
\end{aligned}$$

$$(iii)\langle \xi, \xi\rangle = 0 \Leftrightarrow \xi = 0.$$

Seja $(t, x+\mathbb{Z}\theta) \in \mathbb{Z}\times\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$:

Se $\langle \xi, \xi\rangle \equiv 0 \Longrightarrow \langle \xi, \xi\rangle(t, x+\mathbb{Z}\theta) = 0$ para todo $(t, x+\mathbb{Z}\theta) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}\theta$ logo

$\langle \xi, \xi\rangle(t, x+\mathbb{Z}\theta) = \sum_{q\in\mathbb{Z}\theta} \overline{\xi(x-q)}\xi(x-q-t) = 0,$

donde podemos supor que $\xi(x-q)=0\ \forall x\in\mathbb{R}, q\in\mathbb{Z}\theta \Rightarrow \xi\equiv 0$.
Por outro lado se $\xi=0\Rightarrow \langle\xi,\xi\rangle(t,x+\mathbb{Z}\theta)=0\ \forall x\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{Z}\Rightarrow \langle\xi,\xi\rangle=0$.

E agora para **II** as propriedades (similares as que provamos acima).
Seja $(p,y+\mathbb{Z})\in\mathbb{Z}\theta\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ temos:

$$(i')[g\triangleright\xi,\eta]=g*[\xi,\eta].$$

$$\begin{aligned}
[g\triangleright\xi,\eta](p,y+\mathbb{Z}) &= \sum_{s\in\mathbb{Z}} g\xi(y+s)\overline{\eta(y+s-p)}= \\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\sum_{p\in\mathbb{Z}\theta} g(p,y+s+\mathbb{Z})\xi(y+s-p)\overline{\eta(y+s-p)} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}\theta} g(p,y+\mathbb{Z})\sum_{s\in\mathbb{Z}}\xi(-p+y+s)\overline{\eta(y+s-p)} \\
&= (g*[\xi,\eta])(p,y+\mathbb{Z}) \Longrightarrow [g\triangleright\xi,\eta]=g*[\xi,\eta]
\end{aligned}$$

$$(ii')[\xi,\eta]^\star=[\eta,\xi].$$

$$\begin{aligned}
[\xi,\eta]^\star(p,y+\mathbb{Z}) &= \overline{[\xi,\eta](-p,-p+y+\mathbb{Z})}=\overline{\sum_{s\in\mathbb{Z}}\xi(-p+y+s)\overline{\eta(-p+y+s+p)}} \\
&= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\eta(y+s)\overline{\xi(y+s-p)}=[\eta,\xi](p,y+\mathbb{Z})\Longrightarrow [\xi,\eta]^\star=[\eta,\xi]
\end{aligned}$$

$$(iii')[\eta,\eta]=0\Leftrightarrow \eta=0.$$

$[\eta,\eta]\equiv 0\Longrightarrow [\eta,\eta](p,y+\mathbb{Z})=0$ para todo $(p,y+\mathbb{Z})\in\mathbb{Z}\theta\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ logo $[\eta,\eta](p,y+\mathbb{Z})=\sum_{s\in\mathbb{Z}}\eta(y+s)\overline{\eta(y+s-p)}=0$ donde podemos supor que $\eta(y+s)=0$ $\forall y\in\mathbb{R}, s\in\mathbb{Z}\Rightarrow \eta\equiv 0$.
Por outro lado, se $\eta=0\Rightarrow [\eta,\eta](p,y+\mathbb{Z})=0\ \forall y\in\mathbb{R}, s\in\mathbb{Z}\Rightarrow [\eta,\eta]=0$.

$\square$

Devemos verificar agora a seguinte relação de compatibilidade:

$$\xi \lhd \langle \eta, \zeta \rangle = [\xi, \eta] \rhd \zeta.$$

Seja $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned}
(\xi \lhd \langle \eta, \zeta \rangle)(x) &= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \xi(x+s) \langle \eta, \zeta \rangle (s, x+s+\mathbb{Z}\theta) \\
&= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \xi(x+s) \sum_{q \in \mathbb{Z}\theta} \overline{\eta(x+s-q)} \zeta(x-q) \\
&= \sum_{q \in \mathbb{Z}\theta} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \xi(x+s) \overline{\eta(x+s-q)} \zeta(x-q) \\
&= \sum_{q \in \mathbb{Z}\theta} [\xi, \eta](q, x+\mathbb{Z}) \zeta(x-q) = ([\xi, \eta] \rhd \zeta)(x).
\end{aligned}$$

Portanto, $\xi \lhd \langle \eta, \zeta \rangle = [\xi, \eta] \rhd \zeta$.

Para provar a positividade dos pares $\langle ., . \rangle$ e $[., .]$, devemos construir uma unidade aproximada de um tipo especial para as álgebras A e B. A prova que faremos a seguir é uma versão adaptada da apresentada em [18].

Lema 3.3. *Se o subgrupo $\mathbb{Z}\theta$ age por translação sobre $\mathbb{R}$. Então para cada $x \in \mathbb{R}$ e cada vizinhança N de $0 \in \mathbb{Z}$, existe uma vizinhança U de x tal que* $\{p \in \mathbb{Z}\theta : (p \rhd U) \cap U \neq \emptyset\} \subseteq N$.

Demonstração:

Suponha que existe $x \in \mathbb{R}$ e $N \subseteq \mathbb{Z}\theta$ vizinhança de 0 tal que para todo $U \subseteq \mathbb{R}$ vizinhança de x existe $p_U \in \mathbb{Z}\theta \backslash \mathbb{N}$ tal que $(p_U \rhd U) \cap U \neq \emptyset$ isto é existe $x' \in U \cap (p_U \rhd U)$, logo $x' \in U$, $x' \in p_U \rhd U \Rightarrow$ existe $y \in U$ tal que $x' = p_U + y$. Podemos restringir nossa discussão para as vizinhanças contidas em um intervalo fechado $D = [a, b]$, $x \in D$. Considere então $\Lambda = \{U \;\text{ abertos}/x \in U, U \subseteq D\}$, que é um conjunto dirigido por "$\subseteq$". Pelo axioma da escolha existe um net $(p_U)_{U \in \Lambda}$. Como para $|p| > b - a$, temos que $(p \rhd D) \cap D = \emptyset$ logo $C = \{p_U/U \in \Lambda\} \subseteq \mathbb{Z}\theta$ é finito, e então existe $p \in C$ que é limite de uma subnet de $(p_U)_{U \in \Lambda}$ e $p \neq 0$ pois $p \in N$. Além disso (y_U) converge para x e existe $y_U \in U$ tal que $p + y_U \in U$ com $p_U + y_U$ convergindo para $p + x$, o que contradiz a liberdade da ação, já que translação de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$ é sempre livre.

□

Consideremos agora uma cobertura $\{V_i\}$ de $\mathbb{S}^1$, $\{\psi_i\}$ uma partição da unidade, $U_i \subseteq \mathbb{R}$ sendo $U_i \cong V_i$ um homeomorfismo local e U_i compactos tais que $\{U_i^N\}_{i=1}^n$ é cobertura de D e $\{p \in \mathbb{Z}\theta/(p_{U_i} + U_i) \cap U_i \neq \emptyset\} \subseteq N$. Seja:

$\Gamma = \{(N, \epsilon, \delta)$ tal que N é vizinhanhança decrescente de $0, D$ compactos crescentes de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\theta$, $\epsilon > 0$ decrescente$\}$,

com uma relação de ordem $\leq$ tal que dados (N, ϵ, D), $(M, \widetilde{\epsilon}, \widetilde{D}) \in \Gamma$ seja satisfeito que $(N, \epsilon, D) \leq (M, \widetilde{\epsilon}, \widetilde{D})$ se $N \subseteq M$, $\epsilon \leq \widetilde{\epsilon}$, $D \subseteq \widetilde{D}$. Agora considere

$L = (N \cap M, \zeta = \min\{\epsilon, \widetilde{\epsilon}\}, E = D \cup \widetilde{D})$ de modo que $(N, \epsilon, D) \leq (L, \zeta, E)$ e $(M, \widetilde{\epsilon}, \widetilde{D}) \leq (L, \zeta, E)$. Considere agora a net $f_{N,\epsilon,D} \in C_{00}^+(\mathbb{Z}\theta, C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}))$, desejamos que,

$$1 = \sum_i \psi_i \sim \sum_{p \in N} f_{N,\epsilon,D} \in C_{00}^+(\mathbb{Z}\theta, C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \text{ e também que,}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{p \in N} f_{N,\epsilon,D}(p, x + \mathbb{Z}) &= [\eta_i^D, \eta_i^D] = \sum_{p \in N} \sum_{t \in \mathbb{Z}} \eta_i^D(x + t)\overline{\eta_i^D(x + t - p)} \\
&= \sum_{t \in \mathbb{Z}} \eta_i^D(x + t) \sum_{p \in N} \overline{\eta_i^D(x + t - p)}
\end{aligned}$$

Então queremos que $|1 - \sum_N f_{N,\epsilon,D}(p, x + \mathbb{Z})| < \epsilon$.

Para que as condições acima sejam satisfeitas vamos provar o seguinte lema:

Lema 3.4. *Seja $f \in C_{00}^+(\mathbb{R})$ e $\epsilon > 0$, então existe $\eta \in C_{00}^+(\mathbb{R})$ tal que* $|f(x) - \eta(x) \sum_{p \in \mathbb{Z}\theta} \eta(x - p)| < \epsilon$.

Demonstração:

Sejam $C = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \epsilon\}$ e $\overline{C} = \{x + \mathbb{Z}\theta / x \in C\}$.

Defina F sobre $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\theta$ por $F(x + \mathbb{Z}\theta) = \sum_{p \in \mathbb{Z}\theta} f(x - t)$ e seja $m = \min_{x + \mathbb{Z}\theta} F(x + \mathbb{Z}\theta)$ e $U = \{x + \mathbb{Z}\theta / F(x + \mathbb{Z}\theta > \frac{m}{2}\}$, temos pelo Lema de Uryshohn que existe uma função $Q : \mathbb{R}/\mathbb{Z}\theta \to \mathbb{R}$ com $0 \leq Q \leq 1$ e $Q(x + \mathbb{Z}\theta) = 1$ para $x \in C$ e $Q(x + \mathbb{Z}\theta) = 0$ para $x + Z\theta \in \mathbb{S}^1 \setminus U$. Temos também que $\frac{Q}{(F^{\frac{1}{2}})} \in C_{00}^+(\mathbb{R}/\mathbb{Z}\theta)$.

Então seja: $\eta(x) = \frac{f(x)Q(x+\mathbb{Z}\theta)}{F(x+\mathbb{Z}\theta)^{\frac{1}{2}}}$ e teremos

$$\begin{aligned} |f(x) - \eta(x)\sum_{p\in\mathbb{Z}\theta}\eta(x-p)| &= |f(x) - \frac{f(x)Q(x+\mathbb{Z}\theta)}{F(x+\mathbb{Z}\theta)^{\frac{1}{2}}}\sum_{p\in\mathbb{Z}\theta}\frac{f(x-p)Q(x-p+\mathbb{Z}\theta)}{F(x-p+\mathbb{Z}\theta)^{\frac{1}{2}}}| \\ &= |f(x) - f(x)Q(x+\mathbb{Z}\theta)\sum_{p\in\mathbb{Z}\theta}\frac{f(x-p)Q(x+\mathbb{Z}\theta)}{F(x+\mathbb{Z}\theta)}| < \epsilon \end{aligned}$$

□

Proposição 3.2. *A $C^\star$-álgebra B possui uma unidade aproximada na qual todos os elementos são da forma* $g = \sum_i [\xi_i, \xi_i]$ *com* $\xi_i \in E_0$.

Demonstração:

Segue dos lemas (3.3),(3.4).

□

Proposição 3.3. *A $C^\star$-álgebra A possui uma unidade aproximada na qual todos os elementos são da forma* $f = \sum_i \langle \eta_i, \eta_i \rangle$ *com* $\eta_i \in E_0$.

Demonstração:

Basta adaptarmos os lemas (3.3),(3.4) trocando A por B.

□

Agora estamos aptos a provar as propriedades referentes a positividade dos pares $\langle ., . \rangle$ e $[., .]$.

$$(iv)\langle \xi, \xi \rangle \geq 0 \Longleftrightarrow \langle \xi, \xi \rangle \in A^+$$

Vamos denotar a unidade aproximada de B por $g_\alpha = \sum_i [\xi_{\alpha i}, \xi_{\alpha i}]$, então para qualquer $\xi \in E_0$ temos:

$$\begin{aligned} \langle \xi, \xi \rangle = \lim_\alpha \langle g_\alpha \xi, \xi \rangle = \lim_\alpha \sum_i \langle [\xi_{\alpha i}, \xi_{\alpha i}]\xi, \xi \rangle = \lim_\alpha \sum_i \langle \xi_{\alpha i} \langle \xi_{\alpha i}, \xi \rangle, \xi \rangle \\ = \lim_\alpha \sum_i \langle \xi_{\alpha i}, \xi \rangle^\star * \langle \xi_{\alpha i}, \xi \rangle. \end{aligned}$$

donde segue que $\langle \xi, \xi \rangle$ é positivo em A.

$$(iv')[\eta,\eta] \geq 0 \Longleftrightarrow [\eta,\eta] \in B^+$$

Considere a unidade aproximada em A dada por $f_\beta = \sum_k \langle \eta_{\beta k}, \eta_{\beta k}\rangle$.

Logo para qualquer $\eta \in E_0$ teremos:

$[\eta,\eta] = \lim_\beta [\eta, \eta f_\beta] = \lim_\beta \sum_k [\eta, \eta\langle \eta_{\beta k}, \eta_{\beta k}\rangle] = \lim_\beta \sum_k [\eta, [\eta, \eta_{\beta k}]\eta_{\beta k}] = \lim_\beta \sum_k [\eta, \eta_{\beta k}] * [\eta, \eta_{\beta k}]^\star$

donde segue que $[\eta,\eta]$ é positivo em B.

Portanto todas as propriedades de "produto interno" foram satisfeitas, logo E_o é um pré-B-A bimódulo de Hilbert. Precisamos agora completar o pré-B-A-bimódulo de Hilbert E_0 e mostrar que é possível estender as aplicações e ações definidas para este completamento.

Vamos definir agora uma **norma** sobre E_0:

$$\begin{array}{rccc} |||.||| : & E_0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & \xi & \longmapsto & \|\langle \xi, \xi\rangle\|^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

Com esta norma garantimos o completamento de E_0.

Denotaremos $E = \overline{E_0}^{|||\cdot|||}$.

Observe que poderíamos pensar em definir a norma do seguinte modo:

$$\begin{array}{rccc} |||.||| : & E_0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & \xi & \longmapsto & \|[\xi, \xi]\|^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

Mas de fato veremos que:

Proposição 3.4. $\|\langle \xi, \xi\rangle_A\| = \|[\xi, \xi]_B\|$.

Demonstração:

$$\|\langle \xi, \xi\rangle_A\|^2 = \|\langle \xi, \xi\rangle^\star * \langle \xi, \xi\rangle\| = \|\langle \xi, \xi\rangle * \langle \xi, \xi\rangle\| = \|\langle \xi, \xi\langle \xi, \xi\rangle_A\rangle_A\| = \|\langle \xi, [\xi, \xi]_B\xi\rangle\| \leq$$
$$\leq |||\xi||| |||[\xi, \xi]\xi||| \leq |||\xi|||^2 \|[\xi, \xi]_B\| = \|\langle \xi, \xi\rangle_A\| \|[\xi, \xi]_B\| \Rightarrow \|\langle \xi, \xi\rangle_A\| \leq \|[\xi, \xi]_B\|$$

usando a unidade aproximada de A.

E por outro lado temos que:

$$\|[\xi,\xi]_B\|^2 = \|[\xi,\xi]^\star * [\xi,\xi]\| = \|[\xi,\xi] * [\xi,\xi]\| = \|[[\xi,\xi]\xi,\xi]_B\| = \|[\xi\langle\xi,\xi\rangle_A,\xi]_B\| \leq$$
$$\leq \|\|\xi\langle\xi,\xi\rangle\|\|\|\xi\|\| \leq \|\|\xi\|\|^2\|\langle\xi,\xi\rangle_A\| = \|[\xi,\xi]_B\|\|\langle\xi,\xi\rangle_A\| \Rightarrow \|[\xi,\xi]_B\| \leq \|\langle\xi,\xi\rangle_A\|$$

usando a unidade aproximada de B.

□

Seja $f \in A_0$, considere agora o seguinte operador: $M_f : E_0 \to E_0$, definido por $M_f(\xi) = \xi f$.

Proposição 3.5. *M_f, $f \in A_0$ é operador adjuntável sobre E_0.*

Demonstração:

Sejam $(t, x + \mathbb{Z}\theta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}\theta, \quad \xi, \eta \in E_0$:

$$\begin{aligned}
\langle M_f(\xi),\eta\rangle(t,x+\mathbb{Z}\theta) &= \langle \xi f,\eta\rangle(t,x+\mathbb{Z}\theta) = \sum_{q\in\mathbb{Z}\theta}\overline{(\xi f)(x-q)}\eta(x-q-t)\\
&= \sum_{q\in\mathbb{Z}\theta}\overline{[\sum_{s\in\mathbb{Z}}\xi(x-q+s)f(s,x-q+\mathbb{Z}\theta+s)]}\eta(x-q-t)\\
&= \sum_{q\in\mathbb{Z}\theta}\sum_{s\in\mathbb{Z}}\overline{\xi(x-q+s)f(s,x-q+\mathbb{Z}\theta+s)}\eta(x-q-t)\\
&= \sum_{q\in\mathbb{Z}\theta}\sum_{s\in\mathbb{Z}}\overline{\xi(x-q+s)}\eta(x-q-t)\overline{f(s,x-q+\mathbb{Z}\theta+s)} = (*)
\end{aligned}$$

Vamos fazer as seguintes substituições: $q - s = q' \in \mathbb{Z}\theta$ e em seguida $s = -s' \in \mathbb{Z}$, com isso obteremos:

$$(*) = \sum_{q'\in\mathbb{Z}\theta}\overline{\xi(x-q')}\sum_{s'\in\mathbb{Z}}\eta(x-s'-q'-t)\overline{f(s,x-q'+\mathbb{Z}\theta)} =$$
$$= \langle\xi,\eta\bar{f}\rangle(t,x+\mathbb{Z}\theta).$$

□

Considere também o seguinte operador: $M_g : E_0 \to E_0$ definido por $M_g(\eta) = g\eta$, $g \in B_0$.

Proposição 3.6. *M_g é operador adjuntável sobre E_0.*

Demonstração:

De maneira análoga à proposição 3.5.

$\square$

Lema 3.5. *Se f_1 é um elemento positivo de uma $C^\star$-álgebra A então vale que $f^\star f_1 f \leq \|f_1\| f^\star f$ para cada $f \in A$.*

Demonstração:

Para a prova do lema consultar [13].

$\square$

Lema 3.6. *Se E_0 é um pré-A-módulo de Hilbert e $\xi, \eta \in E_0$, então: $\langle \eta, \xi \rangle \langle \xi, \eta \rangle \leq \| \langle \xi, \xi \rangle \| \langle \eta, \eta \rangle$.*

Demonstração:

Suponha sem perda de generalidade que $\|\langle \xi, \xi \rangle\| = 1$. Para $f \in A$, temos:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \xi f - \eta, \xi f - \eta \rangle &= \langle \xi f, \xi f \rangle - \langle \xi f, \eta \rangle - \langle \eta, \xi f \rangle + \langle \eta, \eta \rangle \\ &= f^\star \langle \xi, \xi \rangle f - f^\star \langle \xi, \eta \rangle - \langle \eta, \xi \rangle f + \langle \eta, \eta \rangle \\ &\leq f^\star f - \langle \eta, \xi \rangle f - f^\star \langle \xi, \eta \rangle + \langle \eta, \eta \rangle. \end{aligned}$$

Seja $f = \langle \xi, \eta \rangle$ logo,

$$0 \leq \langle \xi, \eta \rangle^\star \langle \xi, \eta \rangle - \langle \eta, \xi \rangle \langle \xi, \eta \rangle - \langle \xi, \eta \rangle^\star \langle \xi, \eta \rangle + \langle \eta, \eta \rangle \Leftrightarrow \langle \eta, \xi \rangle \langle \xi, \eta \rangle \leq \langle \eta, \eta \rangle.$$

$\square$

Do lema 3.6 segue imediatamente que:

$$\|\langle \eta, \xi \rangle \langle \xi, \eta \rangle\| = \|\langle \xi, \eta \rangle^\star \langle \xi, \eta \rangle\| = \|\langle \xi, \eta \rangle\|^2 \leq \|\langle \xi, \xi \rangle\| \|\langle \eta, \eta \rangle\| = \||\xi\||^2 \||\eta\||^2.$$

Proposição 3.7. $\||M_f(\xi)\|| \leq \|f\|_1 \||\xi\||$, $f \in A_0$, $\xi \in E_0$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \||M_f(\xi)\||^2 = \||\xi f\||^2 = \|\langle \xi f, \xi f \rangle\|_A \leq \||\xi f\|| \||\xi f\|| = \||\xi f\||^2 \leq \||\xi\||^2 \|f\|_A^2 \leq \\ \leq \||\xi\||^2 \|f\|_1^2. \end{aligned}$$

Observação 3.1. *Usamos para provar a desigualdade acima além do lema 3.6 o seguinte fato: Se A_0 é uma $\star$-álgebra normada então vale que:*

$$\|f\| = \sup_{\substack{\pi : A_0 \longrightarrow L(E) \\ rep. contrativa}} \|\pi(f)\| \leq \|f\|_1.$$

Precisamos estender as ações e operações definidas sobre E_0 para o completamento E.

Consideremos $g \in B_0$ fixo e definimos:

$$\begin{array}{rccc} M: & B_0 \times E_0 & \longrightarrow & E_0 \subseteq E \\ & (g, \eta) & \longmapsto & M_g(\eta) \end{array}$$

Dado $\eta \in E$, existe $\{\eta_n\}_n$ sequência de Cauchy em E_0 tal que $\eta = \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n$, e ainda,

$M_g(\eta) = M_g(\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n) = \lim\limits_{n\to\infty} M_g(\eta_n)$.

Agora fixe $\eta \in E$, $g \in B_0 \subseteq B$ logo existe $\{g_n\}_n$ de Cauchy tal que $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$, definimos:

$$\begin{array}{rccc} \phi_\eta: & B_0 & \longrightarrow & E \\ & g & \longmapsto & g \rhd \eta = M_g(\eta) \end{array}$$

Donde teremos,

$\phi_\eta(g) = \phi_\eta(\lim\limits_{n\to\infty} g_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \phi_\eta(g_n) = \lim\limits_{n\to\infty} M_{g_n}(\eta) = \lim\limits_{n\to\infty} \phi_\eta(g_n)$

Logo, por continuidade podemos estender as ações e operações definidas sobre E_0 para o seu completamento E.

Portanto fica provado que E é um B-A bimódulo de Hilbert. Além disso, denotando por g_α a unidade aproximada de B, segue que, $g = \lim\limits_\alpha g * g_\alpha$ $= \lim\limits_\alpha \sum\limits_i [g\xi_{\alpha i}, \xi_{\alpha i}]$ o que mostra que $\overline{[E, E]} = B$, ou seja E é cheio à esquerda. Do mesmo modo,usando a unidade aproximada de A, mostramos que E é cheio à direita. Logo o ideal de B correspondente à $End_A^{00}(E)$ é denso, isto é $B \cong End_A^0(E)$. E portanto, pelo resultado enunciado logo abaixo segue que $A \sim_M B$.

Teorema 3.1. *Duas $C^\star$-algebras A e B são fortemente Morita equivalentes se e somente se existe um A-módulo cheio à direita E tal que $End_A^0(E) \cong B$*

Demonstração:

A prova deste teorema pode ser encontrada na pg. 164 de [6].[2]

[2]Muitos autores definem a morita equivalência forte entre A e B em função da existência deste A-módulo E que satisfaz $B \cong End_A^0(E)$.

□

Proposição 3.8. *As algebras do toro A_θ e $A_{\theta^{-1}}$ são Morita equivalentes.*

Demonstração:

Seja $G = \mathbb{R}$, $H = \mathbb{Z}$ e $K = \mathbb{Z}\theta$ então $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\theta$ são círculos e os produtos cruzados $A := C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}\theta) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ e $B := C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \rtimes_\beta \mathbb{Z}\theta$ são as respectivas algebras torais. No caso da álgebra A nos podemos identificar as funções de $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}\theta)$ como funções periódicas sobre $\mathbb{R}$ com período θ e a ação de $\mathbb{Z}$ por $(\alpha_n f)(t) := f(t-n)$. Usando a substituição $z := e^{\frac{2\pi i t}{\theta}}$, nos identificamos $f(t)$ com $g(z)$ onde $g \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$, isto é $(\alpha_n g)(z) = g(e^{\frac{-2\pi i n}{\theta}} z)$, donde segue que $A \cong A_{\theta^{-1}}$. Por outro lado para B temos que as funções de $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ são periódicas sobre $\mathbb{R}$ com período 1 e $(\beta_m h)(s) = h(s - m\theta)$ donde segue que $B \cong A_\theta$. Portanto temos $A \sim_M B \Leftrightarrow A_{\theta^{-1}} \sim_M A_\theta$.

□

Observamos que combinando a proposição acima com os isomorfismos $A_\theta \cong A_{\theta+n}$, $n \in \mathbb{Z}$ podemos encontrar outras equivalências de Morita.

Proposição 3.9. *Se as $C^\star$-álgebras unitais A e B são Morita equivalentes via um B-A-bimódulo E , existe uma bijeção entre os traços finitos sobre A e os traços finitos sobre B dados por*

$$\widetilde{\tau}([\xi, \eta]) = \tau(\langle \eta, \xi \rangle) \tag{3.3}$$

Demonstração:

Suponha que τ é um traço finito sobre A. Como o bimódulo E é cheio, a fórmula 3.3 define um único funcional linear contínuo sobre B. Como $B \cong End_A^0(E)$ é unital e o isomorfismo associa $[\xi, \eta]$ à $\theta_{\xi,\eta}$, então como na proposição 3.9 de [6] nos podemos encontrar $t_1, t_2, ...t_n \in E$ tal que $1_B = \sum_{k=1}^{n} [t_k, t_k]$. Então $\widetilde{\tau}(1_B) = \sum_{k=1}^{n} \tau(\langle t_k, t_k \rangle)$ ou seja $\widetilde{\tau}$ é um funcional linear limitado sobre B. O vetor linha $t =: (t_1, t_2, ...t_n)$ é um elemento de ${}^nE = E \otimes_A {}^nA$, um B-$\mathbb{M}_n(A)$-bimódulo que implementa a Morita equivalência $\mathbb{M}_n(A) \sim_M B$; também $1_B = [t, t]$. Agora observamos que $p := \langle p, p \rangle$ é uma projeção em $\mathbb{M}_n(A)$, pois $p^2 = \langle t, t \rangle \langle t, t \rangle = \langle t, t\langle t, t \rangle \rangle = \langle t, [t, t]t \rangle = \langle t, t \rangle = p$ e $p = p^\star$.

Defina um morfismo:

$$\begin{array}{rrcl}\phi: & B & \longrightarrow & \mathbb{M}_n(A)\\ & b & \longmapsto & \phi(b) := \langle t, bt\rangle\end{array}$$

onde $\langle t, bt\rangle := [t_i^\star bt_j]$ (consultar apêndice). Note que ϕ é multiplicativo pois,

$$\phi(bb') = \langle t, bb't\rangle = \langle t, b[t,t]b't\rangle = \langle t, bt\langle t, b't\rangle\rangle = \langle t, bt\rangle\langle t, bt'\rangle = \phi(b)\phi(b')$$

e também é injetivo pois $t\phi(b) = t\langle t, bt\rangle = [t,t]bt = bt$ logo, $[t\phi(b), t] = [bt, t] = b$. Também se $x, y \in {}^nE$, então:

$$\begin{aligned} p\langle x, y\rangle p &= \langle t,t\rangle\langle x,y\rangle\langle t,t\rangle = \langle x\langle t,t\rangle, y\langle t,t\rangle\rangle = \langle [x,t]t, [y,t]t\rangle \\ &= \langle t, [t,x][y,t]t\rangle = \phi([t,x][y,t]) \end{aligned}$$

ou seja ϕ é sobrejetiva e portanto um isomorfismo de B sobre $p\mathbb{M}_n(A)p$. Logo podemos usar o traço $\tau \otimes tr$ sobre $\mathbb{M}_n(A) = \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes A$ ou seja $(\tau \otimes tr)([a_{ij}]) := \sum_{k=1}^{n} \tau(a_{kk})$ para definir o traço τ' sobre B por $\tau'(b) := (\tau \otimes tr)(\phi(b))$. Vamos mergulhar E em ${}^nE$ fazendo:

$$\xi \mapsto \xi_1 := (\xi, 0, ..., 0)$$

Então:

$$\begin{aligned} \tau'([\xi,\eta]) &= (\tau\otimes tr)(\langle t, [\xi,\eta]t\rangle = (\tau\otimes tr)(\langle t, \xi_1\langle \eta_1, t\rangle\rangle) = (\tau\otimes tr)(\langle t,\xi_1\rangle\langle\eta_1, t\rangle) \\ &= (\tau\otimes tr)(\langle \eta_1, t\rangle\langle t, \xi_1\rangle) = (\tau\otimes tr)(\langle \eta_1, t\langle t,\xi_1\rangle\rangle) = (\tau\otimes tr)(\langle\eta_1, [t,t]\xi_1\rangle) \\ &= (\tau\otimes tr)(\langle \eta_1, \xi_1\rangle) = \tau(\langle \eta, \xi\rangle), \end{aligned}$$

ou seja $\tau' = \widetilde{\tau}$ e portanto $\widetilde{\tau}$ é um traço sobre B. E de maneira análoga, partindo de 3.3 da esquerda para a direita mostramos que cada traço finito sobre B nos dá um único traço finito sobre A.

□

Definição 3.2. $GL(2,\mathbb{Z}) := \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}) |\det A = \pm 1\}$

Observação 3.2. *Os elementos de* $GL(2,\mathbb{Z})$ *são também considerados como frações do tipo* $\frac{a\theta+b}{c\theta+d}$ *onde* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ *age sobre* $\theta \in \mathbb{R}$. *Estas transformações são chamadas transformações lineares fracionárias, ou transformações de Möbius.*

Lema 3.7. *Os operadores* S *e* T *associados respectivamente as matrizes*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

geram o grupo $GL(2,\mathbb{Z})$.

Demonstração:

Considere as transformações S e T dadas por:

$$S : \theta \mapsto \tfrac{1}{\theta}$$

$$T : \theta \mapsto \theta + 1$$

Se $S, T \in GL(2,\mathbb{Z})$ é fácil verificar que qualquer produto destes elementos também está em $GL(2,\mathbb{Z})$. Seja $\theta' = \dfrac{a\theta+b}{c\theta+d} \in GL(2,\mathbb{Z})$, temos que a e c são coprimos ou seja existem $c_0 = d$,$a_0 = b$ tais que $c_0 a - a_0 c = 1$ ($\Leftrightarrow$ seu único divisor comum é 1). Supondo $a > 0$ e desenvolvendo a divisão euclidiana de a por c garantimos a existência de $\rho_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\dfrac{a\theta+b}{c\theta+d} = \rho_0 + \dfrac{a_1\theta+b_1}{c_1\theta+d_1}$, sendo $c_1 = c$, $d_1 = d$ e $0 \leq a_1 < c$, tal inteiro terá a seguinte caracterização: $\rho_0 = \dfrac{b-b_1}{d}$. Suponha agora que $a_1 = 0$,$b_1 = c_1 = 1$, temos que:

$$\frac{a\theta+b}{c\theta+d} = \rho_0 + \frac{1}{\theta+d_1} = T^{\rho_0}ST^{\rho_1}(\theta),$$

onde $\rho_1 = d_1$. Se $a_1 > 0$ e $\dfrac{a\theta+b}{c\theta+d} = \rho_0 + \dfrac{1}{\dfrac{c_1\theta+d_1}{a_1\theta+b_1}}$ e repetindo o procedimento de divisão acima podemos escrever: $\dfrac{a\theta+b}{c\theta+d} = \rho_0 + \dfrac{1}{\rho_1 + \dfrac{a_2\theta+b_2}{c_2\theta+d_2}}$ com $c_2 = a_1$, $d_2 = b_1$ e $0 \leq a_2 < a_1$. E repetindo este procedimento chegaremos que para algum $k \in \mathbb{Z}$ $a_k = 0$, $a_{k-1} \neq 0$ e fazendo $b_k = c_k = 1$, podemos concluir que $\theta' = T^{\rho_0}ST^{\rho_1}S...T^{\rho_{k-1}}ST^{\rho_k}$ onde $\rho_k = d_k$. Portanto o grupo $GL(2,\mathbb{Z})$ é gerado pelas ações de S e T.

$\square$

Corolário 3.1. *As álgebras do toro A_θ e A'_θ são morita equivalentes se e somente se θ e θ' estão na mesma órbita da ação de $GL(2,\mathbb{Z})$ sobre $\mathbb{R}$ por transformações lineares fracionárias.*

Demonstração:

Supondo inicialmente que θ e θ' estão na mesma órbita da ação de $GL(2,\mathbb{Z})$ sobre $\mathbb{R}$ dada por:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \triangleright \theta = \frac{a\theta + b}{c\theta + d}$$

Sabemos que $A_\theta \cong A_{\theta+n}$, $n \in \mathbb{Z}$ em particular para $n = 1$ donde $A_\theta \sim_M A_\theta^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow A_{\theta+1} \sim_M A_\theta^{-1}$. Mas também temos que : $\theta' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \triangleright \theta = \theta^{-1}$ e portanto $A_\theta \sim_M A_\theta^{-1} \Rightarrow A_\theta \sim_M A_{\theta'}$. Observe também que a órbita do 0 é precisamente o conjunto $\mathbb{Q}$ dos numeros racionais, pois se $p, q \in \mathbb{Z}^*$ com $mdc(p,q) = 1$, então existem $c_0, a_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $a_0 q - c_0 p = 1$ e $\begin{pmatrix} a_0 & p \\ c_0 & q \end{pmatrix} \triangleright 0 = \dfrac{a_0.0 + p}{c_0.0 + q} = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Supondo agora que $A_\theta \sim_M A_{\theta'}$ com θ e θ' irracionais. Pela proposição 1.10, seus estados tracias são únicos. Se τ é o estado tracial sobre A_θ , a fórmula definida na proposição 3.9 define um traço finito $\widetilde{\tau}$ sobre $A_{\theta'}$ que deve ser um múltiplo positivo do estado tracial τ' sobre $A_{\theta'}$ ou seja $\widetilde{\tau} = \lambda\tau'$ com $\lambda > 0$. Agora observe que

$$[p] \mapsto (\tau \otimes tr)(p)$$

para $p \in \mathbb{M}n(A)$ define uma aplicação aditiva $\tau_1 : \mathbb{K}_0(A_\theta) \to \mathbb{R}$ e pelo teorema 2.1, sua imagem é o subgrupo real $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$. O isomorfismo ϕ da proposição 3.9 preserva projeções e define um isomorfismo concreto ϕ_1 de $\mathbb{K}_0(A_{\theta'})$ em $\mathbb{K}_0(A_\theta)$, que satisfaz $\tau_1 \circ \phi_1 = \widetilde{\tau}$ por construção. Logo,

$$\lambda(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta') = \widetilde{\tau}_1(\mathbb{K}_0(A_{\theta'}) = \tau_1(\mathbb{K}_0(A_\theta)) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$$

ou seja, $\lambda(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta') = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$. Portanto existem inteiros k, l, p, q tais que $k + l\theta = \lambda$ e $\lambda(p + q\theta') = 1$ donde segue que $(k + l\theta)(p + q\theta) = 1$ e resolvendo esta equação para θ' concluimos que $\theta' = \dfrac{-lp\theta + 1 - kp}{lq\theta + qk}$ e portanto θ e θ' pertence à mesma órbita da ação de $GL(2,\mathbb{Z})$.

$\square$

Apêndice A

Funcionais Positivos

Definição A.1. *Seja A uma $\star$-álgebra de Banach. Um elemento $a \in A$ é* ***positivo*** *se é auto-adjunto, isto é $a = a^\star$ e se $\sigma(a) \subseteq [0, +\infty)$. Escrevemos $a \geq 0$ para indicar que a é positivo, e denotamos por A^+ o conjunto dos elementos positivos de A.*

Lema A.1. *Seja A uma $C^\star$-álgebra e seja $c \in A$ tal que $c^\star c \leq 0$ (isto é, $0 - c^\star c \geq 0$) então $c = 0$.*

Demonstração:
Por hipótese, $\sigma(-c^\star c) \subseteq [0, \infty)$, donde segue que $\sigma(c^\star c) \subseteq (-\infty, 0] \Rightarrow$
$\Rightarrow \sigma(cc^\star) \subseteq (-\infty, 0]$, logo $-cc^\star \geq 0$. Escreva $c = u + iv$ e calcule:
$cc^\star + c^\star c = (u + iv)(u - iv) + (u - iv)(u + iv) = 2u^2 + 2v^2 \geq 0$
Mas $-2u^2 - 2v^2 = -cc^\star - c^\star c \geq 0$. Segue então que
$\sigma(2u^2 + 2v^2) \subseteq [0, \infty) \cap (-\infty, 0] = \{0\}$. E daí,$u^2 + v^2 = 0 \Rightarrow u^2 = -v^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow u^2 = v^2 = 0$. Além disso, $\|u^2\| = \|u^\star u\| = \|u^2\| \Rightarrow u = 0$ e $v = 0$ e portanto $c = u + iv = 0$.

$\square$

Proposição A.1. *Seja A uma $C^\star$-álgebra e $a \in A$. Então são equivalentes:*
(i)$a = a^\star$ e $\sigma(a) \subseteq [0, \infty]$;
(ii) existe um elemento $b \in A$, b auto-adjunto tal que $a = b^2$;
(iii)existe $c \in A$ tal que $a = c^\star c$.

Demonstração:

$(i) \Rightarrow (ii)$Sabemos que $C^\star(a, a^\star) \cong C_0(\sigma(a) \setminus \{0\})$, sendo que o elemento $a \in A$ corresponde à função f_1 definida por $f_1(z) = z$. Seja $g : \sigma(a) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \sqrt{x}$, logo $g \in C_0(\sigma(a) \setminus \{0\})$, seja então $b \in C^\star(a, a^\star)$ correspondente à g. Como g é real então $b = b^\star$. Como $g^2 = f$, então $b^2 = a$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Seja B a sub-$C^\star$-álgebra de A gerada por b. É claro que B é comutativa, já que b é auto-adjunto, donde segue que $B \cong C_0(\mathcal{X})$. Sejam $f, g \in C_0(\mathcal{X})$ correspondentes à a e b respectivamente. Então $f = g^2 \geq 0$, pois g é função real. Assim $Im(f) \subseteq [0, \infty)$ donde segue que $\sigma(a) \subseteq [0, \infty)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Basta fazermos $c = b$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Temos que $a = a^\star$. Seja $A = C^\star(a) \cong C_0(\mathcal{X})$ e seja $f \in C(\mathcal{X})$ correspondente à a. Defina:

$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ e $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$.

Então, $f_+, f_- \geq 0$, $f = f_+ - f_-$ e $f_+f_- = 0$. Sejam a_+ e a_- os elementos correspondentes a f_+ e f_- respectivamente. Então temos, $a_+, a_- \geq 0$, $a = a_+ - a_-$ e $a_+a_- = 0$. Calculemos:

$a_-aa_- = a_-(a_+ - a_-)a_- = -(a_-)^3 \leq 0$.

$a_-aa_- = a_-c^\star ca_- = (ca_-)^\star(ca_-)$.

Sendo $z = ca_-$, temos $z^\star z \leq 0$. E portanto, pelo lema A.1 $z = 0$, $(a_-)^3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_- = 0 \Rightarrow a = a_+ \geq 0$.

□

Lema A.2. *Seja A uma $C^\star$-álgebra, $a \in A$ então $a^\star a \leq \|a\|^2$.*

Demonstração:

Seja $b = a^\star a$ e seja $B = C^\star(1, b) \subseteq A$. Sabemos que $\sigma(b) \subseteq \mathbb{R}_+$ e supondo que f é a aplicação de inclusão de $\sigma(b)$ em $\mathbb{C}$, então existe um único $\star$-isomorfismo unital φ de $C(\sigma(b))$ em B tal que $\varphi(f) = b$. É claro que $f \leq \|f\|$ donde segue que $b \leq \|b\|$, ou seja $a^\star a \leq \|a^\star a\| = \|a\|^2$.

□

Lema A.3. *Seja A uma $C^\star$-álgebra. Se $x, y \in A$ são tais que $x \leq y$ então $b^\star x b \leq b^\star y b$ para todo $b \in B$.*

Demonstração:

Se $x \leq y$ então $y - x \geq 0$ donde $y - x = c^\star c$ para algum $c \in A$. Donde temos: $b^\star y b - b^\star x b = b^\star c^\star c b = (cb)^\star cb \geq 0$.

□

Definição A.2. *Seja A uma $\star$-álgebra de Banach. Um funcional linear $\phi : A \to \mathbb{C}$ é positivo se $\phi(a) \geq 0$ $\forall a \geq 0$ em A ou equivalentemente se $\phi(b^\star b) \geq 0$ $\forall b \in A$.*

Exemplo A.1. *Seja $A = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. O funcional linear*

$$\begin{array}{rccc} tr: & A & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (\lambda_{ij}) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ii} \end{array}$$

é positivo, chamado traço.

Exemplo A.2. *Seja $A = \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ e seja m a medida de comprimento de arco normalizada sobre $\mathbb{S}^1$. Então o funcional linear*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int f dm \end{array}$$

é positivo.

Definição A.3. *Se A é um $C^\star$-álgebra com unidade. Um funcional linear positivo que preserva unidade é chamado um estado da $C^\star$-álgebra.*

Teorema A.1. *Seja A uma $C^\star$-álgebra com unidade e ϕ um funcional linear em A. Então ϕ é um estado se e somente se ϕ é contínuo e $\|\phi\| = 1 = \phi(1)$.*

Demonstração:

Considere a forma sesqui-linear $F_\phi : A \times A \to \mathbb{C}$ dada por $F_\phi(a, b) = \phi(b^\star a)$. Note que $F_\phi(a, a) = \phi(a^\star a) \geq 0$.

Pela desiguladade de Cauchy-Schwartz,

$$|F_\phi(a,b)| \leq |F_\phi(a,a)|^{1/2}|F_\phi(b,b)|^{1/2},$$

ou seja: $|\phi(b^\star a)| \leq \phi(a^\star a)^{1/2}\phi(b^\star b)^{1/2}$.

Tomando $b = 1$ na equação acima, temos:

$$|\phi(a)| \leq \phi(a^\star a)^{1/2}\phi(1)^{1/2} \tag{A.1}$$

Note que $a^\star a$ é positivo e portanto $\sigma(a^\star a) \subseteq \mathbb{R}_+$. Além disso $\|a\|^2 = \|a^\star a\| = r(a^\star a)$, onde $r(a)$ denota o raio espectral de a. Então $\sigma(a^\star a) \subseteq [0, \|a\|^2]$. Assim $\sigma(\|a\|^2 - a^\star a) \subseteq [0, \|a\|^2]$, pelo teorema do mapeamento espectral. Portanto: $\|a\|^2 - a^\star a \geq 0$, donde $0 \leq \phi(\|a\|^2 - a^\star a) = \|a\|^2\phi(1) - \phi(a^\star a)$, logo $\phi(a^\star a) \leq \|a\|^2$. Daí por A.1 temos que $|\phi(a)| \leq \phi(a^\star a)^{1/2} \leq (\|a\|^2)^{1/2} = \|a\|$. E portanto ϕ é contínuo com $\|\phi\| \leq 1$. Mas $1 = |\phi(1)| \leq \|\phi\|\|1\| = \|\phi\| \Rightarrow \|\phi\| = 1 = \phi(1)$. Por outro lado, Dado $t \in \mathbb{R}$, temos $\|a - ti\| = r(a - ti) \leq \sqrt{r^2 + t^2}$. Logo, $|\phi(a) - t_i| = |\phi(a - t_i)| \leq \|\phi\|\|a - t_i\| \leq \sqrt{r^2 + t^2}$. Portanto: $\phi(a) \in B(t_i, \sqrt{r^2 + t^2})$, mas $\phi(a) \in \bigcap_{t \in \mathbb{R}} B(t_i, \sqrt{r^2 + t^2}) = [-r, r]$.

Afirmação: Se $a = a^\star$ e $\sigma(a) \subseteq [\alpha, \beta]$, então $\phi(a) \in [\alpha, \beta]$.

Prova da Afirm.:

Seja $c = \frac{\alpha+\beta}{2}$ e $r = \frac{\beta-\alpha}{2}$. Então pelo teorema do mapeamento espectral, temos que $\sigma(a - c) \subseteq [-r, r]$. Pelo observado anteriormente $\phi(a) - c \in [-r, r]$, logo,

$\phi(a) \in [c - r, c + r] = [\alpha, \beta]$.

Sendo $a \geq 0$, temos que $\sigma(a) \subseteq [0, \|a\|]$. Daí $\phi(a) \in [0, \|a\|]$, donde $\phi(a) \geq 0$.

$\square$

Teorema A.2. *Seja B uma $\star$-álgebra de Banach com unidade. Todo funcional positivo ϕ sobre B satisfaz as seguintes propriedades:*

(i)$\phi(a^\star) = \overline{\phi(a)}$;

(ii)$|\phi(ab^\star)|^2 \leq \phi(aa^\star)\phi(bb^\star)$;

(iii)$|\phi(a)|^2 \leq \phi(1)\phi(aa^\star) \leq \phi(1)^2 r(aa^\star)$;

(iv)$|\phi(a)| \leq \phi(1)r(a)$ *para cada normal* $a \in A$

Demonstração:

Sejam $a, b \in A$, façamos

$$p = \phi(aa^\star), \quad q = \phi(bb^\star), \quad r = \phi(ab^\star) \quad , s = \phi(ba^\star). \tag{A.2}$$

Como $\phi[(a + \alpha b)(a^\star + \overline{\alpha} b^\star)]$ para cada $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$p + \overline{\alpha} r + \alpha s + |\alpha|^2 q \geq 0. \tag{A.3}$$

Com $\alpha = 1$ e $\alpha = i$, mostramos que $s + r$ e $i(s - r)$ são reais. Logo $s = \overline{r}$. Fazendo $b = 1$ obtemos (i).

Se $r = 0$, o ítem (ii) é óbvio. Se $r \neq 0$, tome $\alpha = tr/|r|$ em A.3, onde t é real. Então A.3 se transforma em:

$$p + 2|r|t + qt^2 \geq 0 \quad (-\infty < t < \infty), \tag{A.4}$$

ou seja temos $|r|^2 \leq pq$. E daí segue (ii).

Se 1 denota a unidade de B sabemos que $11^\star = 1$, donde temos que a primeira metade de (iii) é um caso especial de (ii). Para a segunda metade, tome $t > r(aa^\star)$.

Então $\sigma(t1 - aa^\star) > 0$. Temos também que existe $c \in A$ auto-adjunto , tal que $c^2 = t1 - aa^\star$. Logo,

$$t\phi(1) - \phi(aa^\star) = \phi(c^2) \geq 0 \tag{A.5}$$

Donde temos, $\phi(aa^\star) \leq \phi(1) r(aa^\star)$.

Se a é normal vale que $\sigma(aa^\star) \subset \sigma(a)\sigma(a^\star)$, donde segue que

$$r(aa^\star) \leq r(a) r(a^\star) = r(a)^2. \tag{A.6}$$

Claramente (iv) segue de A.6 e (iii).

□

Apêndice B

Módulos de Hilbert

Sejam A e B anéis, E um A-módulo à direita e B-módulo à esquerda com ações compatíveis ou seja se $b(sa) = (bs)a$ com $s \in E$, $a \in A$ e $b \in B$, o que nos permite escrever bsa sem ambíguidade, nos dizemos que E é um B-A-bimódulo . Quando $A = B$ dizemos que E é A-bimódulo.

Definição B.1. *A notação $E \otimes_A F$ faz sentido se E é um A-módulo à direita e F é um A-módulo à esquerda; isto é (ao menos) um grupo abeliano, gerado por tensores simples $s \otimes t$ com $s \in E$ e $t \in F$, sujeitos unicamente à relações $s_1 \otimes t + s_2 \otimes t = (s_1 + s_2) \otimes t$, $s \otimes t_1 + s \otimes t_2 = s \otimes (t_1 + t_2)$ e $sa \otimes t = s \otimes at$ para cada $a \in A$.*

É claro que $E \otimes_A F$ é um B-módulo à direita se F é um A-B-bimódulo, e que isto é um C-módulo à esquerda se E é um C-A-bimódulo . Em particular, se E e F são A-bimódulos , então $E \otimes_A F$ é também um A-bimódulo.

Exemplo B.1. *Se $M_n(A)$ denota o anel das matrizes $n \times n$ com entradas em A , então o A-módulo à direita A^n é também um $M_n(A)$-módulo à esquerda, e o A-módulo à esquerda ${}^nA$[1] é também um $M_n(A)$-módulo à direita. Então existe um isomorfismo de bimódulos,*

$$A^n \otimes_A {}^nA \simeq M_n(A)$$

e

$$^nA \otimes_{M_n(A)} A^n \simeq A$$

[1]estamos reorganizando a soma direta de n cópias de A como um conjunto de vetores linha.

Para maiores detalhes sobre teoria de módulos sobre anéis ver [21].

Seja A uma $C^\star$-álgebra.

Definição B.2. *Um pré-A-módulo de Hilbert é um espaço vetorial H que também é um A-módulo à direita equipado com uma aplicação (que chamaremos de produto interno) definida por:*

$$\langle .,. \rangle : H \times H \to A$$

que é linear na segunda entrada e que satisfaz, para quaisquer $m, n \in H$ e $a \in A$, as seguintes relações:

(i)$\langle m, na \rangle = \langle m, n \rangle a$;

(ii)$\langle m, n \rangle^\star = \langle n, m \rangle$;

(iii)$\langle m, m \rangle \geq 0$;

(iv)$\langle m, m \rangle = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Seja H um pré-A-módulo de Hilbert, defina:

$$\begin{array}{rrcl} \|.\|: & H & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & m & \longmapsto & \|\langle m, m \rangle\|^{\frac{1}{2}}, \end{array} \tag{B.1}$$

Proposição B.1. *A aplicação $\|.\|$ definida acima é uma norma sobre H.*

Demonstração:

(i)$\|m\| = 0 \Leftrightarrow \|\langle m, m \rangle\| = 0 \Leftrightarrow \langle m, m \rangle \Leftrightarrow m = 0$;

(ii)$\|\lambda m\|^{\frac{1}{2}} = \|\langle \lambda m, \lambda m \rangle\| = \|\overline{\lambda}\lambda \langle m, m \rangle\| = |\lambda|^2 \|m\|^2$;

(iii)$\|m + n\|^2 = \|\langle m + n, m + n \rangle\| = \|\langle m, n \rangle + \langle m, n \rangle + \langle n, m \rangle + \langle n, n \rangle\|$

$\leq \|m\|^2 + 2\|\langle m, n \rangle\| + \|n\|^2 \leq \|m\|^2 + 2\|m\|\|n\| + \|n\|^2 = (\|m\| + \|n\|)^2$.

Portanto $\|.\|$ é uma norma sobre H.

□

Definição B.3. *Um A-módulo de Hilbert é um pré-A-módulo de Hilbert que é completo na norma definida na proposição (B.1).*

Para outros detalhes básicos sobre a teoria de módulos de Hilbert ver [1].

Veremos agora alguns exemplos úteis de Módulos de Hilbert.

Exemplo B.2. *$\mathbb{C}$-módulos de Hilbert são espaços de Hilbert onde a aplicação é o produto interno usual $\langle .,. \rangle$ que o torna um espaço de Hilbert.*

Exemplo B.3. *Toda $C^\star$-álgebra é um módulo de Hilbert sobre si mesma. Seja A uma $C^\star$-álgebra defina a seguinte aplicação: $\langle b, a \rangle := b^\star a$. Facilmente se verificam as propriedades em B.2 e além disso observe que $|||a||| := \|a^\star a\|^{\frac{1}{2}} = \|a\|$, ou seja a norma definida sobre A como módulo de Hilbert é a mesma tal $C^\star$-norma.*

Exemplo B.4. *Se nos reorganizarmos a soma direta de n cópias de A como um conjunto de vetores linha o que vamos denotar por ${}^nA$, como fizemos em B.1, podemos construir um módulo à direita sobre a $C^\star$-álgebra de matrizes $M_n(A)$.*

Dados $a = (a_1, ..., a_n)$, $\quad b = (b_1, ..., b_n) \in {}^nA$, defina a seguinte aplicação:

$$\langle a, b \rangle := (a_i^\star b_j)_{ij} \text{ na qual a } (i, j)\text{-entrada é } a_i^\star b_j.$$

Para ver que esta aplicação é positiva definida , é suficiente mostrar (prop 1.20 [6]) que

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i^\star a_i^\star a_j c_j = (\sum_i a_i c_i)^\star (\sum_j a_j c_j) \geq 0$$

para qualquer $c_1, ..., c_n \in A$ (a positividade estrita é obtida fazendo $c_j = a_j^\star$). Portanto ${}^nA$ se transforma em um $M_n(A)$-módulo de Hilbert à direita.

Definição B.4. *Suponha que $\phi : A \to B$ é um homomorfismo entre anéis unitais e E é um A-módulo à direita. Então B se transforma em um A-módulo à esquerda fazendo-se $a.b = \phi(a)b$ e desta forma podemos construir o produto tensorial*

$$E_\phi(E) := E \otimes_A B \textit{ de } E \textit{ e } B \textit{ sobre } A \textit{ através de } \phi$$

Este é o grupo abeliano na qual os elementos são somas finitas do tipo $\sum_j a_j \otimes b_j$ com $s_j \in E$ e $b_j \in B$, na qual deve ser satisfeito:

$$sa \otimes b = s \otimes \phi(a)b.$$

Suponha agora que tenhamos um A-módulo de Hilbert E e um morfismo de $C^{\star}$-álgebras $\phi : A \to B$. Queremos estender E_{ϕ} para Módulos de Hilbert. Para isso precisamos mostrar que o produto tensorial algébrico $E_{\phi}(E)$ se transforma naturalmente em um pré-B-módulo. Se $s \odot b$ denota um tensor simples do produto tensorial algébrico $E \odot B$ sobre $\mathbb{C}$, uma aplicação com valores em B sobre $E \odot B$ pode ser naturalmente definida por:

$$\langle s \odot b, r \odot b' \rangle := b^{*}\phi(\langle s, r \rangle)b'.$$

Esta aplicação não fica bem definida desta forma, e a eliminação do núcleo é equivalente a condição suficiente para a boa definição de $E_{\phi}(E)$, ou seja que seja válido $sa \odot b = s \odot \phi(a)b$.
Seja $x := sa \odot b - s \odot \phi(a)b$. Então, como

$$\phi(\langle sa, sa \rangle) = \phi(a)^{\star}\phi(\langle s, s \rangle)\phi(a),$$

mostramos que $\langle x, x \rangle = 0$. Por outro lado suponha que $x = \sum_{j=1}^{n} s_j \odot b_j$ satisfaz $\langle x, x \rangle = 0$. Vamos considerar ${}^{n}E := \underbrace{E \oplus E ... \oplus E}_{nvezes}$ como um $M_n(A)$-módulo à direita, onde para os "vetores linha" $s = (s_1, s_2, ...s_n)$ e $t = (t_1, t_2, ...t_n)$, $s[a_{ij}] = t$ significa $\sum_{i=1}^{n} s_i a_{ij} = t_j$. Então a matriz $[\langle s_i, s_j \rangle]$ satisfaz que para todo $a \in A^n$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i^{\star}\langle s_i, s_j \rangle a_j = \langle \sum_i s_i a_i, \sum_j s_j a_j \rangle \geq 0 \text{ em A},$$

e portanto pela proposição 1.20 de [6] $\langle s_i, s_j \rangle$ é elemento positivo de $M_n(A)$, com uma raíz quadrada positiva $\alpha \in M_n(A)$. Agora o morfismo $\phi : A \to B$ determina um morfismo $\phi^{(n)}$ de $M_n(A)$ em $M_n(B)$, fazendo $\phi^{(n)}[a_{ij}] := [\phi(a_{ij})]$. Se $\beta = \phi^{(n)}(\alpha)$, então $\beta^2 = \phi^{(n)}(\alpha^2) = [\phi(\langle s_i, s_j \rangle)]$. Agora,

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} b_i^{\star}\beta_{ki}\beta_{kj}b_j = \sum_{i,j=1}^{n} b_i^{\star}\phi(\langle s_i, s_i \rangle)b_j = \langle x, x \rangle = 0,$$

donde segue $\sum_j \beta_{kj}b_j = 0$ em B para cada k. Finalmete , se $r \in {}^{n}E$ é determinado por $r\alpha = s$, teremos:

$$\sum_{j,k=1}^{n}(r_k\alpha_{kj}\odot b_j - r_k\odot\phi(\alpha_{kj})b_j) = \sum_{j=1}^{n} s_j\odot b_j - \sum_{j,k=1}^{n} r_k\odot\beta_{kj}b_j = x.$$

Portanto a aplicação definida é degenerada somente sobre o espaço gerado pelos elementos da forma $sa\odot b - s\odot\phi(a)b$. E por isso se transforma em uma aplicação positiva definida no espaço quociente que nos podemos reescrever como:

$$\langle s\otimes b, t\otimes b'\rangle := b^{\star}\phi(\langle s,t\rangle)b',$$

onde $s\otimes b$, $t\otimes b'$ são tensores simples sujeitos à condição de boa definição. Deste modo, o espaço quociente se transforma em um pré-B-módulo de Hilbert à direita. Nos denotaremos agora por $E_{\phi}(E)$ o completamento deste pré módulo.

Definição B.5. *Um pré B-A-bimódulo de Hilbert é um espaço vetorial complexo E que é um pré B-módulo de Hilbert à esquerda e pré A-módulo de Hilbert à direita e além disso deve satisfazer*

$$r\langle s,t\rangle = [r,s]t \quad \textit{para} \quad \textit{todo} \quad r,s,t\in E \tag{B.2}$$

onde $\langle .,.\rangle$ e $[.,.]$ são os produtos internos definidos sobre A e B respectivamente.

Observação B.1. *Dizemos que E é cheio à direita se $\langle E,E\rangle$ é denso em A, e cheio à esquerda se $[E,E]$ é denso em B. Se ambas as condições mencionadas se mantém então diremos apenas que E é cheio.*

Definição B.6. *Sejam E e F A-módulos de Hilbert. Uma aplicação $T: E\to F$ é adjuntável se existe uma aplicação $T^{\star}: F\to E$, chamada adjunto de T tal que*

$$\langle r, Ts\rangle = \langle T^{\star}r, s\rangle \ \forall r\in F, s\in E$$

O espaço de todas as aplicações adjuntáveis de E em F denotaremos por $\mathcal{L}(E,F)$, algumas vezes usaremos $\mathcal{L}_A(E,F)$.

Uma classe importante de operadores adjuntáveis é a análoga a classe de operadores de posto finito sobre um espaço de Hilbert. Sejam E, F A-módulos de Hilbert , $x \in E$, $y \in F$, definimos $\Omega_{x,y} : F \to E$ por:

$$\Omega_{x,y}(z) = x\langle y, z\rangle \text{ para } z \in F$$

É fácil ver que $\Omega_{x,y} \in \mathcal{L}(F, E)$, sendo $(\Omega_{x,y})^\star = \Omega_{y,x}$, pois:
$\langle l, \Omega_{r,s}(z)\rangle = \langle l, r\langle s, z\rangle\rangle = \langle l, r\rangle\langle s, z\rangle = \langle r, l\rangle^\star\langle s, z\rangle = \langle s\langle r, l\rangle, z\rangle = \langle \Omega_{s,r}(l), z\rangle$ para $l, r \in E$,$s, z \in F$

Algumas relaçoes importantes (onde G é um A-módulo de Hilbert),

(i)$\Omega_{x,y}\Omega_{u,v} = \Omega_{x\langle y,u\rangle,v} = \Omega_{x,v\langle u,y\rangle}$ $(u \in f, v \in G)$

(ii)$T\Omega_{x,y} = \Omega_{Tx,y}$ $(T \in \mathcal{L}(E, G))$

(iii)$\Omega_{x,y}s = \Omega_{x,s^\star y}$ $(s \in \mathcal{L}(G, F))$

Vamos denotar por $\mathcal{K}(F, E)$, o subespaço linear fechado de $\mathcal{L}(F, E)$ gerado por $\{\Omega_{x,y} : x \in E, y \in F\}$. Denotaremos por $\mathcal{E}nd^0_A(E)$ o fecho de $\mathcal{K}(E) = \mathcal{E}nd_A(E)^{00}$ na norma em $\mathcal{L}_A(E) = \mathcal{E}nd_A(E)$, i.é.
$\|T\| = \sup\{|||Ts||| : |||s||| \leq 1\}$. Os elementos de $\mathcal{E}nd^0_A(E, F)$ são chamados de operadores A-compactos.

Vamos agora generalizar a construção do produto tensorial $E_\varphi(E)$, feita anteriormente, considerando agora E é um pré-A-módulo de Hilbert à direita, F um pré-B-módulo de Hilbert à direita, sendo A,B $C^\star$-álgebras. Considere inicialmente uma representação de A por operadores sobre F, isto é um morfismo $\rho : A \to \mathcal{E}nd_B(F)$. Nos podemos formar o produto tensorial algébrico $E \odot F$, que é naturalmente um B-módulo à direita, juntamente com uma aplicação sesquilinear positiva $\langle ., .\rangle$ satisfazendo:

$$\langle s_1 \otimes t_1, s_2 \otimes t_2\rangle := \langle t_1, \rho(\langle s_1, s_2\rangle)t_2\rangle = \langle \rho(\langle s_2, s_1\rangle)t_1, t_2\rangle$$

Observe que quando $F = B$ caímos no caso considerado anteriormente. Da mesma forma devemos passar ao quociente pelo B-submódulo, de elementos

$z \in E \odot F$ tais que $\langle z, z \rangle = 0$.

Denotamos por $E \otimes_\rho F$, ou simplismete por $E \otimes_A F$, o pré-B módulo de Hilbert quociente. Se E e F são módulos sobre uma $C^\star$-álgebra A também usaremos a notação $E \otimes_A F$ para denotar o B-módulo de Hilbert obtido completando o quociente.

Lema B.1. *Se A é uma $C^\star$-álgebra, então $\mathcal{E}nd_A^0(A) \cong A$.*

Demonstração:

A demonstração deste lema pode ser encontrada na pg 71 de [6].

□

Lema B.2. *Se $p \in \mathbb{M}_n(A)$ é uma projeção, pA^n é um A-módulo de Hilbert e $\mathcal{E}nd_A^0(pA^n) = p\mathbb{M}_n(A)p$.*

Demonstração:

A demonstração deste lema pode ser encontrada pg 72 [6].

□

Consideremos agora um A-módulo de Hilbert cheio à direita E e a $C^\star$-álgebra $B =: \mathcal{E}nd_A^0(E)$, esta age sobre E à esquerda. Estamos interessados em transformar E em um B-A-bimódulo de Hilbert, as aplicações com imagens em B são dadas por:

$$[r, s] = \Omega_{r,s}$$

Para ver isto observe que $T\Omega_{r,s} = \Omega_{Tr,s}$ para $T \in \mathcal{E}nd_A(E)$, e em particular para $T \in B$. Como $[E, E] = \mathcal{E}nd_A^{00}(E)$ é por definição denso em B, temos que E é cheio à esquerda. A relação de compatibilidade B.2 das aplicações segue diretamente da definição dos operadores de posto finito:

$$r\langle s, t \rangle = \Omega_{r,s} t.$$

Proposição B.2. *Seja E um A-módulo de Hilbert cheio à direita. Se $B = \mathcal{E}nd_A^0(E)$, então $\mathcal{E}nd_B^0(\overline{E}) \cong A$.*

Demonstração:

A prova desta proposição pode ser encontrada em [6].

$\square$

Definição B.7. *Se F é um A-B-bimódulo de Hilbert e G é um B-C-bimódulo de Hilbert, o produto tensorial $F \otimes_B G$ se transforma em um A-C-bimódulo de Hilbert, com aplicações sobre tensores simples dadas por:*

$$\langle r_1 \otimes s_1, r_2 \otimes s_2 \rangle := \langle \langle r_2, r_1 \rangle_B s_1, s_2 \rangle_C$$

$$[r_1 \otimes s_1, r_2 \otimes s_2] := [r_1, r_2 [s_2, s_1]_B]_A$$

Observação B.2. *Se F e G são cheios então o produto tensorial também é cheio.*

Um resultado importante é o seguinte:

Teorema B.1. *Duas $C^\star$-álgebras A e B são fortemente Morita equivalentes se e somente se existe um A-módulo cheio à direita E tal que $\mathcal{E}nd_A^0(E) \simeq B$.*

Demonstração:

A demostração pode ser encontrada em [6].

$\square$

Apêndice C

Limite Indutivo e AF-algebras

C.1 Categorias e Funtores

Definição C.1. *(*Categorias e funtores*). Uma categoria C consiste de uma classe de $\mathfrak{O}(C)$ de objetos e para cada par de objetos A, B em $\mathfrak{O}(C)$ um conjunto $Mor(A, B)$ de morfismos (de A em B) com uma lei associativa de composição.*

$$\begin{array}{ccc} Mor(A,B) \times Mor(B,C) & \longrightarrow & Mor(A,C) \\ (\varphi,\psi) & \longmapsto & \psi \circ \varphi \end{array},$$

tal que para cada objeto A existe um elemento id_A em $Mor(A, A)$ que satisfaz $id_B \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ id_A$ para cada φ em $Mor(A, B)$.

As categorias que abordaremos neste texto são a categoria $C^\star$-alg das $C^\star$-algebras e a categoria Ab dos grupos abelianos. A classe de objetos, $\mathfrak{O}(C^\star\text{-alg})$, em $C^\star$-alg é a classe das $C^\star$-algebras, e $Mor(A, B)$ é o conjunto dos $\star$-homomorfismos de A em B com a lei de composição usual. Os objetos em Ab são os grupos abelianos, e os morfismos são os homomorfismos de grupo.

Definição C.2. *Um funtor covariante (ou simplesmente funtor) F entre duas categorias C e D é uma aplicação $A \mapsto F(A)$ de $\mathfrak{O}(C)$ em $\mathfrak{O}(D)$ e uma coleção de aplicações $\varphi \mapsto F(\varphi)$ de $Mor(A, B)$ em $Mor(F(A), F(B))$ para cada par de objetos A, B em $\mathfrak{O}(C)$ que satisfaz:*

(i) $F(id_A) = id_{F(A)}$ para todos objetos A em $\mathfrak{O}(C)$,

(ii) $F(\psi \circ \varphi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$ para todo e quaisquer objetos A, B, C em $\mathfrak{O}(C)$ e quaisquer morfismos φ em $Mor(A, B)$ e ψ em $Mor(B, C)$.

Definição C.3. *Um funtor contravariante F é como um funtor covariante, exceto pelo fato que ele aplica um morfismo φ em $Mor(A, B)$ a um morfismo $F(\varphi)$ em $Mor(F(B), F(A))$, e alterando-se o ítem (ii) da definição anterior convenientemente.*

Definição C.4. *Um funtor covariante F entre duas categorias C e D é dito ser uma equivalência categórica se:*

(i) para qualquer par de objetos A, $B \in \mathfrak{O}(C)$, a aplicação

$$F : Mor(A, B) \mapsto Mor(F(A), F(B))$$

é uma bijeção;

(ii) para qualquer objeto Z em $\mathfrak{O}(D)$, existe um objeto A em $\mathfrak{O}(C)$ tal que $F(A) \cong Z$, isto é, existe um isomorfismo $\gamma : F(A) \to Z$.

C.2 Limites Indutivos

Definição C.5. *Uma sequência indutiva em uma categoria* C *é uma sequência* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de objetos em* C *e uma sequência* $\varphi_n : A_n \to A_{n+1}$ *de morfismos em* C, *usualmente representada por*

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} ...$$

Definição C.6. *Um limite indutivo de uma sequência indutiva*

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} ... \tag{C.1}$$

em uma categoria C *é um sistema* $(A, \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty})$, *onde* A *é um objeto de* C,$\mu_n : A_n \to A$ *é um morfismo em* C *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *e também devem ser satisfeitas as condições:*

(i) O diagrama abaixo é comutativo para cada n

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\mu_n"'] & A_{n+1} \arrow[d, "\mu_{n+1}"] \\ & A \end{tikzcd} \tag{C.2}$$

(ii) Se $(B, \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty})$ é um sistema, onde B é um objeto em C, $\lambda_n : A_n \to B$ é um morfismo em C para cada $n \in \mathbb{N}$, onde $\lambda_n = \lambda_{n+1} \circ \varphi_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então existe um único morfismo $\lambda : A \to B$ fazendo o diagrama abaixo comutar para cada $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[d, "\mu_n"'] \arrow[dr, "\lambda_n"] & \\ A \arrow[r, "\lambda"'] & B \end{tikzcd} \tag{C.3}$$

Uma observação importante é que limites indutivos não existem em todas as categorias, por exemplo na categoria dos conjuntos finitos, onde os morfismos são funções, não existem limites indutivos (para maiores detalhes ver [Larsen]pg 105.

Limites Indutivos, quando existem, são essencialmente unicos no sentido que se $(A, \{\mu_n\})$ e $(B, \{\lambda_n\})$ são ambos limites indutivos da sequência C.1, então existe um único isomorfismo $\lambda : A \to B$ tal que o diagrama (último) seja comutativo. Denotamos o limite indutivo da sequência C.1 por $\varinjlim(A_n, \varphi_n)$ ou $\varinjlim A_n$. Escreveremos também

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} ... \to A$$

para indicar que A é o limite indutivo da sequência C.1

Proposição C.1. *(*Limite Indutivo de $C^\star$-algebras*) Toda sequência indutiva de $C^\star$-algebras*

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} ...$$

tem um limite indutivo $(A, \{\mu_n\})$. E valem:

(i) $A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n)}$*;*

(ii) $\|\mu_n(a)\| = \lim_{m\to\infty} \|\varphi_{m,n}(a)\|$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $a \in A_n$*;*

(iii) $Ker(\mu_n) = \{a \in A_n / \lim_{m\to\infty} : \varphi_{m,n}(a)\| = 0\}$*;*

(iv) Se $(B, \{\lambda_n\})$ *e* $\lambda : A \to B$ *como em C.6 (ii),então:*

(a) $Ker(\mu_n) \subseteq Ker(\lambda_n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*,*

(b) λ *é injetivo se e somente se* $Ker(\lambda_n) \subseteq Ker(\mu_n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*,*

(c) λ *é sobrejetivo se e somente se* $B = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n(A_n)}$*.*

Demonstração:

A demonstração pode ser encontrada em [20] pg 94.

$\square$

Proposição C.2. *(*Limite Indutivo de grupos abelianos*) Toda sequência*

$$G_1 \xrightarrow{\alpha_1} G_2 \xrightarrow{\alpha_2} G_3 \xrightarrow{\alpha_3} ...$$

de grupos abelianos tem um limite indutivo $(G, \{\beta_n\})$. E valem:

(i) $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \beta_n(G_n)$*;*

(ii) $Ker(\beta_n) = \bigcup_{m=n+1}^{\infty} Ker(\alpha_{m,n})$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*;*

(iii) Se $(H, \{\gamma_n\})$ e $\gamma : G \to H$ como em C.6 (ii),então:

(a) γ é injetivo se e somente se $Ker(\gamma_n) = Ker(\beta_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

(b) γ é sobrejetivo se e somente se $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n(G_n)$.

Demonstração:

A demonstração pode ser encontrada em [12].

□

C.3 $C^\star$-algebras de dimensão finita

Um exemplo importante de $C^\star$-álgebra é a $C^\star$-álgebra de matrizes obtida apartir de uma $C^\star$-álgebra dada. Para cada $C^\star$-álgebra A e para cada número natural n, seja $\mathcal{M}_n(A)$ o conjunto das matrizes

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

onde $a_{ij} \in A$ para todo i, j. Vamos equipar $\mathcal{M}_n(A)$ com as operações de espaço vetorial e a multiplicação matricial usuais e definir uma involução como segue:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^\star = \begin{pmatrix} a_{11}^\star & a_{21}^\star & \cdots & a_{n1}^\star \\ a_{12}^\star & a_{22}^\star & \cdots & a_{n2}^\star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}^\star & a_{2n}^\star & \cdots & a_{nn}^\star \end{pmatrix}$$

Para definir uma $C^\star$-norma sobre o espaço $\mathcal{M}_n(A)$, vamos escolher um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e um $\star$-homomorfismo injetivo $\varphi_n : \mathcal{M}_n(A) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$ dado por:

$$\varphi_n \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(a_{11})\xi_1 + \cdots + \varphi(a_{1n})\xi_n \\ \vdots \\ \varphi(a_{n1})\xi_1 + \cdots + \varphi(a_{nn})\xi_n \end{pmatrix} \qquad \xi_j \in \mathcal{H}$$

Defina uma norma sobre $\mathcal{M}_n(A)$ da seguinte forma: $\|a\| = \|\varphi_n(a)\|$ para $a \in \mathcal{M}_n(A)$. Com estas operações $\mathcal{M}_n(A)$ se transforma em uma $C^\star$-álgebra, a norma é independente da escolha da representação φ, devido a injetividade.

A categoria das algebras de matrizes tem a propriedade funtorial que se A e B são $C^\star$-álgebras e se $\varphi : A \to B$ é um $\star$-homomorfismo, então a aplicação $\varphi_n : \mathcal{M}_n(A) \to \mathcal{M}_n(B)$ dada por:

$$\varphi_n \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(a_{11}) & \cdots & \varphi(a_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(a_{n1}) & \cdots & \varphi(a_{nn}) \end{pmatrix}$$

é um $\star$-homomorfismo para cada $n \in \mathbb{N}$.

A algebra de matrizes $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e, mais geralmente, a soma direta

$$A = \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_{n_r}(\mathbb{C})$$

de algebras de matrizes, onde r e $n_1, n_2, ..., n_r$ são inteiros positivos, é descrita por suas matrizes unidades padrão, que são dadas como segue. Seja $e(n, i, j)$ a (i, j)-ésima matriz unidade padrão em $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ou seja matrizes as quais a (i, j)-ésima entrada é 1 e na qual as demais entradas são nulas.Para $1 \leq k \leq r$ e $1 \leq i, j \leq n_k$ faça

$$e_{ij}^{(k)} = (0, \cdots, 0, e(n_k, i, j), 0, \cdots, 0) \in A$$

com $e(n_k, i, j)$ no k-ésimo somando. A matriz unidade satisfaz as seguintes identidades:

(i) $e_{ij}^{(k)} e_{jl}^{(k)} = e_{il}^{(k)}$,

(ii) $e_{ij}^{(k)} e_{mn}^{(l)} = 0$ se $k \neq l$ ou se $j \neq m$,

(iii) $(e_{ij}^{(k)})^\star = e_{ji}^{(k)}$,

(iv) $A = span\{e_{ij}^{(k)} : 1 \leq k \leq r; 1 \leq i, j \leq n_k\}$.

Se B é uma outra $C^\star$-álgebra que contém os elementos $f_{ij}^{(k)}$ para $1 \leq k \leq r$ e $1 \leq i, j \leq n_k$ satisfazendo as análogas de (i),(ii), e (iii) acima, com $f_{ij}^{(k)}$ no lugar de $e_{ij}^{(k)}$, então existe um único $\star$-homomorfismo

$$\varphi : A \to B$$

tal que $\varphi(e_{ij}^{(k)}) = f_{ij}^{(k)}$ para quaisquer i, j, k. Na verdade, os sistema de matrizes unidades $\{e_{ij}^{(k)}\}$ é uma bas linear para A, e logo existe uma única aplicação linear

$$\varphi : A \to B$$

com $\varphi(e_{ij}^{(k)} = f_{ij}^{(k)}$.O sistema $\{f_{ij}^{(k)}\}$ é chamado um sistema de matrizes unidades em B de tipo A. Se todos $f_{ij}^{(k)}$ são não nulos, então φ é injetivo; e φ é sobrejetivo se $span\{f_{ij}^{(k)}\} = B$. Em particular, se o sistema $\{f_{ij}^{(k)}\}$ é não nulo e satisfaz (i),(ii) e (iii), e (iv) acima , então B é isomorfo à A.

Proposição C.3. *Toda $C^\star$-álgebra de dimensão finita é isomorfa à*

$$\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_{n_r}(\mathbb{C})$$

para inteiros $r, n_1, n_2, \cdots, n_r$.

Demonstração:

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [20] pg 112.

$\square$

Definição C.7. *Uma AF-algebra é uma $C^\star$-algebra que é (isomorfa a) o limite indutivo de uma sequência de $C^\star$-algebras de dimensão finita.*

Proposição C.4. *Uma $C^\star$-algebra separável A é uma AF-álgebra se e somente se para cada $\epsilon > 0$ e para cada subconjunto finito $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ de A existe uma sub-$C^\star$-álgebra de dimensão finita B de A e elementos $b_1, b_2, \cdots, b_n \in B$ tal que $\|a_j - b_j\| < \epsilon$ para cada j.*

Demonstração:

Ver [20] pg 144.

$\square$

Observação C.1. *Existe um modo sistemático para descrever sequências indutivas de $C^\star$-algebras de dimensão finita, os então chamados diagramas de Bratelli (veja[3]).*

Apêndice D

Projeções em uma $C^\star$-álgebra

D.1 Projecões e elementos unitários

Definição D.1. *Seja A uma $C^\star$-álgebra dizemos que um elemento $p \in A$ é uma projeção se $p = p^2 = p^\star$.*

Definição D.2. *Um elemento u em uma $C^\star$-álgebra unital A é uma isometria se $u^\star u = \mathbf{1}$.*

Definição D.3. *Se A é uma $C^\star$-álgebra unital dizemos que $u \in A$ é unitário se $uu^\star = u^\star u = \mathbf{1}$.*

Veremos a seguir um exemplo de uma isometria não-unitária.

Exemplo D.1. *Considere o shift unilateral S sobre o espaço de Hilbert $l^2(\mathbb{N})$ dado por:*

$$(S\xi)(n) = \begin{cases} 0, & se \quad n = 1 \\ \xi(n-1), & se \quad n \geq 2, \end{cases}$$

para todo $\xi \in l^2(\mathbb{N})$. O adjunto de S é dado por $(S^\star\xi)(n) = \xi(n+1)$. Donde segue que $S^\star S = I$, logo $\|S\xi\| = \|\xi\|$ para todo $\xi \in l^2(\mathbb{N})$, ou seja S é uma isometria. Por outro lado temos que S não é sobrejetivo e portanto não é unitário.

D.1.1 Classes de Homotopia de elementos unitários

Definição D.4. *Seja $\mathcal{X}$ um espaço topológico. Dizemos que dois pontos $a, b \in \mathcal{X}$ são homotópicos em $\mathcal{X}$ o que denotamos por $a \sim_h b$ em $\mathcal{X}$, se existe uma aplicação contínua $v : [0,1] \to \mathcal{X}$ tal que $v(0) = a$ e $v(1) = b$.*

É fácil verificar que a relação $\sim_h$ definida acima é uma relação de equivalência.

Exemplo D.2. *Em uma $C^\star$-álgebra A quaisquer dois elementos a, b são homotópicos em A, para ver isto basta considerarmos o caminho contínuo $t \mapsto (1-t)a + tb$.*

Definição D.5. *Seja A uma $C^\star$-álgebra unital. Vamos denotar por $\mathcal{U}(A)$ o grupo dos elementos unitários de A. Consideremos em $\mathcal{U}(A)$ a relação de equivalência $\sim_h$ e denotemos por $\mathcal{U}_0(A)$ o conjunto de todos elementos $u \in \mathcal{U}(A)$ tais que $u \sim_h \mathbf{1}$*

Observação D.1. *Se u_1, v_1, u_2, v_2 são elementos unitários em uma $C^\star$-álgebra $\mathcal{A}$ com $u_1 \sim_h v_1$ e $u_2 \sim_h v_2$, então $u_1u_2 \sim_h v_1v_2$, pois:*
$u_1 \sim_h v_1 \Rightarrow \exists \quad w_1 : [0,1] \to \mathcal{A}$ contínuo tal que:

$$\begin{cases} w_1(0) = u_1 \\ w_1(1) = v_1 \end{cases} \qquad \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$$

e

$u_2 \sim_h v_2 \Rightarrow \exists \quad w_2 : [0,1] \to \mathcal{A}$ contínuo tal que:

$$\begin{cases} w_2(0) = u_2 \\ w_2(1) = v_2 \end{cases} \qquad \in \mathcal{U}(\mathcal{A}).$$

Logo temos que a aplicação $w = w_1w_2 : [0,1] \to \mathcal{A}$ é um caminho contínuo tal que:

$$\begin{cases} w_1(0)w_2(0) = u_1u_2 \\ w_1(1)w_2(1) = v_1v_2 \end{cases} \qquad \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$$

e portanto $u_1u_2 \sim v_1v_2 \quad$ em $\quad \mathcal{U}(\mathcal{A})$.

Lema D.1. *(Whitehead) Seja A uma $C^\star$-álgebra unital e sejam $u, v \in \mathcal{U}(A)$. Então:*

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \quad em \quad \mathcal{U}(\mathcal{M}_2(A)).$$

Demonstração:

A prova deste lema pode ser encontrada em [20].

□

Proposição D.1. *Seja A uma $C^\star$-álgebra.*

(i) $\mathcal{U}_0(A)$ é um subgrupo normal de $\mathcal{U}(A)$.

(ii) $\mathcal{U}_0(A)$ é aberto e fechado relativamente a $\mathcal{U}(A)$.

(iii) Um elemento $u \in A$ pertence a $\mathcal{U}_0(A)$ se e somente se

$$u = \exp(ih_1)\exp(ih_2)\cdots\exp(ih_n)$$

para algum $n \in \mathbb{N}$ e elementos autoadjuntos $h_1, h_2, ..., h_n \in A$.

Seja A uma $C^\star$-álgebra unital vamos denotar por $\mathcal{GL}(A)$ o grupo dos elementos invertíveis de A e por $\mathcal{GL}_0(A)$ o conjunto dos elemntos em $\mathcal{GL}(A)$ que são homotópicos a 1_A.

Proposição D.2. *Seja A uma $C^\star$-álgebra unital.*

(i) Se $z \in \mathcal{GL}(A)$, então $|z| \in \mathcal{GL}(A)$ e $w(z) = z|z|^{-1} \in \mathcal{U}(A)$.

(ii) A aplicação $w : \mathcal{GL}(A) \to \mathcal{U}(A)$ definida em (i) é contínua, $w(u) = u$ para cada $u \in \mathcal{U}(A)$, e $w(z) \sim_h z$ em $\mathcal{GL}(A)$ para cada $z \in \mathcal{GL}(A)$.

(iii) Se u, v são elementos unitários em $\mathcal{U}(A)$, e se $u \sim_h v$ em $\mathcal{GL}(A)$, então $u \sim_h v$ em $\mathcal{U}(A)$.

Demonstração:

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [20].

□

D.1.2 Equivalência de Projeções

Dada uma $C^\star$-álgebra A, vamos denotar o conjunto de todas as projeções em A por $\mathcal{P}(A)$. Sobre $\mathcal{P}(A)$ podemos considerar a relação de homotopia em D.4 e também as seguintes relações de equivalência:

- $p \sim q$ se existe $v \in A$ com $p = v^\star v$ e $q = vv^\star$ (Equivalência Murray-von Neumann),
- $p \sim_u q$ se existe um elemento unitário $\mathcal{U}(\widetilde{A})$ com $q = upu^\star$ (equivalência unitária). ($\widetilde{A}$ denota a unitização de A).

Definição D.6. *Um elemento $v \in A$ tal que $v^\star v$ é uma projeção é dito ser uma isometria parcial.*

Observação D.2. *Se v é uma isometria parcial, então $vv^\star$ também será uma projeção.*

Seja $z = v - vv^\star v = (1 - vv^\star)v$,

$$\|z\|^2 = \|z^\star z\| = \|v^\star(1 - vv^\star)(1 - vv^\star)v\| = \|(v^\star - v^\star vv^\star)(v - vv^\star v)\| =$$
$$= \|v^\star v - v^\star vv^\star v - v^\star vv^\star v + v^\star vv^\star vv^\star v\| = \| - v^\star v(v^\star v - v^\star vv^\star v)\| = 0$$

donde segue $z = 0$, ou seja $v = vv^\star v$.

Proposição D.3. *Sejam p, q projeções em uma $C^\star$-álgebra unital A. As seguintes condições são equivalentes:*
(i) $p \sim_u q$,
(ii) $q = upu^\star$ para algum unitário $u \in A$,
(iii) $p \sim q$ e $\mathbf{1}_A - p \sim \mathbf{1}_A - q$.

Demonstração:
Seja $\mathbf{1}_{\widetilde{A}}$ a unidade de $\widetilde{A}$ e faça $f = \mathbf{1}_{\widetilde{A}} - \mathbf{1}_A$. Então $\widetilde{A} = A + \mathbb{C}f$, e $fa = af = 0$ para todo $a \in A$.
$(i) \Rightarrow (ii)$. Suponha que $q = zpz^\star$ para algum $z \in \mathcal{U}(\widetilde{A})$. Temos que $z = u + \alpha f$ para algum $u \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Donde segue que $q = (u + \alpha f)p(u + \alpha f)^\star = upu^\star$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Suponha agora que $q = upu^\star$ para algum unitário $u \in \mathcal{U}(A)$.Faça $v = up$ e $w = u(\mathbf{1}_A - p)$. Então:

$$v^\star v = p, \quad vv^\star = q, \quad w^\star w = \mathbf{1}_A - p, \quad ww^\star = \mathbf{1}_A - q. \tag{D.1}$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ Suponha que existem isometrias parciais v e w satisfazendo D.1, usando a identidade seguinte, $v = qv = vp = qvp$ mostra-se que $z = v + w + f$ é um elemento unitário em $\widetilde{A}$. Usando a mesma identidade mencionada chegamos à $zpz^\star = vpv^\star = vv^\star = q$.

□

Lema D.2. *Seja p uma projeção em uma $C^\star$-álgebra A e seja a um elemento autoadjunto em A. Se tomarmos $\delta = \|p - a\|$. Então*

$$\sigma(a) \subseteq [-\delta, \delta] \cup [1 - \delta, 1 + \delta].$$

Demonstração:
A prova deste lema pode ser encontrada em [20] pg 22.

□

Proposição D.4. *Se p, q são projeções em uma $C^\star$-álgebra A e $\|p - q\| < 1$, então $p \sim_h q$ em $\mathcal{P}(A)$.*

Demonstração:

Seja $a_t = (1 - t)p + tq$ para $t \in [0, 1]$, logo a_t é autoadjunto,

$$\min \|a_t - p\|, \|a_t - q\| \leq \tfrac{\|p-q\|}{2} < \tfrac{1}{2},$$

e $t \mapsto a_t$ é contínua. Além disso, se $K = [-\delta, \delta] \cup [1 - \delta, 1 + \delta]$,$\delta = \frac{\|p-q\|}{2} < \frac{1}{2}$ cada $a_t \in \omega_K$ onde ω_K é o conjunto dos elementos autoadjuntos em A com espectro contido em K pelo lema D.2. Defina $f : K \to \mathbb{C}$ a função contínua que é nula em $[\delta, \delta]$ e 1 em $[1 - \delta, 1 + \delta]$. Então teremos que $f(a_t)$ é uma projeção para cada $t \in [0, 1]$ pois $f = f^2 = f^\star$. O caminho $t \mapsto f(a_t)$ é contínuo pelo lema 1.2.5 de [20], logo

$$p = f(p) = f(a_0) \sim_h f(a_1) = f(q) = q \text{ em } \mathcal{P}(A).$$

□

Observação D.3. *A fatoração* $z = w(z)|z|$ *em D.2 de um elemento* $z \in \mathcal{GL}(A)$ *é chamada decomposição polar unitária para* z.

Proposição D.5. *Sejam* a, b *elementos autoadjuntos em uma* $C^\star$*-álgebra unital* A*, suponha que* $b = zaz^{-1}$ *para algum elemento* $z \in \mathcal{GL}(A)$*. Seja* $z = u|z|$ *a decomposição polar para* z *em* $\mathcal{U}(A)$*. Então* $b = uau^\star$.

Demonstração:
Ver demonstração em [20] pg 23.

□

Proposição D.6. *Sejam* p, q *projeções em uma* $C^\star$*-álgebra* A.
(i) Se $p \sim_h q$ *então* $p \sim_u q$.
(ii) Se $p \sim_u q$ *então* $p \sim q$.

Demonstração:
Ver demonstração em [20] pg 24.

□

No exemplo abaixo mostraremos que a recíproca do ítem (ii) na proposição D.6 não é válida.

Exemplo D.3. *Seja* A *uma* $C^\star$*-álgebra unital contendo uma isometria não unitária* s*, por definição temos que* $s^\star s \sim ss^\star$*. A projeção nula não é Murray von Neumann equivalente a uma projeção não nula, pois se* $v^\star v = 0$*, então* $v = 0$ *e daí* $vv^\star = 0$*. Logo* $1 - s^\star s (= 0)$ *não é equivalente a* $1 - ss^\star (\neq 0)$ *e pela proposição D.3 concluimos que as projeções* $s^\star s$ *e* $ss^\star$ *não são unitariamente equivalentes.*

D.1.3 Semigrupo de Projeções

Definição D.7. *Um conjunto $\mathcal{X}$ com uma operação binária associativa * é dito um semigrupo. Quando um semigrupo $(\mathcal{X}, *)$ estiver munido de uma unidade será chamado de monóide.*

Definição D.8. *(O semigrupo $\mathcal{P}_\infty(A)$). Sejam,*

$$\mathcal{P}_n(A) = \mathcal{P}(\mathcal{M}_n(A)), \qquad \mathcal{P}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(A)$$

onde A é uma $C^\star$-álgebra, n é um inteiro positivo, e os conjuntos $\mathcal{P}_n(A)$, $n \in \mathbb{N}$ são considerados disjuntos aos pares.

Considere sobre $\mathcal{P}_\infty(A)$ uma relação de equivalência $(\sim_0)$ como segue. Suponha que $p \in \mathcal{P}_n(A)$ e $q \in \mathcal{P}_m(A)$. Diremos que $p \sim_0 q$ se existe um elemento $v \in \mathcal{M}_{m,n}(A)$, que denota o conjunto das matrizes $m \times n$ com entradas $a_{ij} \in A$, tal que $p = v^\star v$ e $q = vv^\star$. Dado $v \in \mathcal{M}_{m,n}(A)$, o adjunto $v^\star$ é obtido transpondo-se a matriz e tomando o ajunto de cada entrada a_{ij}. Os produtos $vv^\star$ e $v^\star v$ são obtidos pelo produto usual de matrizes.

Agora vamos definir uma operação binária $(\oplus)$ sobre $\mathcal{P}_\infty(A)$ por:

$$p \oplus q = diag(p, q) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix},$$

ou seja, $p \oplus q \in \mathcal{P}_{n+m}(A)$. É fácil verificar que esta operação é de fato associativa. A relação $\sim_0$ é uma relação de equivalência sobre $\mathcal{P}_\infty(A)$ que combina a relação de equivalência Murray-von Neumann $(\sim)$ com uma identificação de projeções em algebras de matrizes de ordens diferentes sobre A. Se $p, q \in \mathcal{P}_n(A)$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então $p \sim_0 q$ se e somente se $p \sim q$.

Proposição D.7. *Sejam p, q, r, p', q' projeções em $\mathcal{P}_\infty(A)$ para alguma $C^\star$-álgebra A.*
(i) $p \sim_0 p \oplus 0_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, onde 0_n denota o elemento neutro de $\mathcal{M}_n(A)$.
(ii) Se $p \sim_0 p'$ e $q \sim_0 q'$, então $p \oplus q \sim_0 p' \oplus q'$.
(iii) $p \oplus q \sim_0 q \oplus p$.

(iv) Se $p, q \in \mathcal{P}_n(A)$ *são tais que* $pq = 0$*, então* $p + q$ *é uma projeção e* $p + q \sim_0 p \oplus q$*.*

(v) $(p \oplus q) \oplus r = p \oplus (q \oplus r)$*.*

Demonstração:

(i) Sejam m, n inteiros positivos , seja $p \in \mathcal{P}_m(A)$. Considere

$$u_1 = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+n,m}(A),$$

observe que: $u_1^\star u = p^\star p = p$

e

$$u_1 u_1^\star = \begin{pmatrix} pp^\star & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = p \oplus 0_n,$$

ou seja: $p = u_1^\star u_1 \sim_0 u_1 u_1^\star = p \oplus 0_n$.

(ii) Se $p \sim_0 p'$ e $q \sim_0 q'$ então existem $v, w \in \mathcal{M}_{m,n}(A)$ tais que $p = v^\star v$, $p' = vv^\star$ e $q = w^\star w$, $q' = ww^\star$.

Seja $u_2 = diag(v, w)$. Observe que:

$$u_2^\star u_2 = \begin{pmatrix} v^\star & 0 \\ 0 & w^\star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^\star v & 0 \\ 0 & w^\star w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = p \oplus q$$

e

$$u_2 u_2^\star = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^\star & 0 \\ 0 & w^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vv^\star & 0 \\ 0 & ww^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p' & 0 \\ 0 & q' \end{pmatrix} = p' \oplus q',$$

ou seja: $p \oplus q \sim_0 p' \oplus q'$.

(iii) Suponha que $p \in \mathcal{P}_n(A)$ e $q \in \mathcal{P}_m(A)$ e seja:

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0_{n,m} & q \\ p & 0_{m,n} \end{pmatrix},$$

onde $0_{k,l}$ é o elemento neutro em $\mathcal{M}_{k,l}(A)$. Temos que u_3 pertence a $\mathcal{M}_{n+m}(A)$, e $p \oplus q = u_3^\star u_3 \sim_0 u_3 u_3^\star = q \oplus p$.

(iv) Se $p, q \in \mathcal{P}_n(A)$, temos que:
$(p+q)^2 = p+q$ desde que $pq = 0$ e $(p+q)^\star = p+q$, logo $p+q$ é uma projeção.Seja :

$$u_4 = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,n}(A).$$

Observe que:

$$u_4^\star u_4 = p^\star p + q^\star q = p + q$$

$$u_4 u_4^\star = \begin{pmatrix} pp^\star & pq^\star \\ qp^\star & qq^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = p \oplus q.$$

Logo teremos que $p \oplus q \sim_0 p + q$.

(v) A demostração deste ítem é trivial.

$\square$

Definição D.9. *(O semigrupo $\mathcal{D}(A)$). Consideremos $(\mathcal{P}_\infty(A), \sim_0, \oplus)$,seja*

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{P}_\infty(A)/\sim_0.$$

Para cada $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$, seja $[p]_\mathcal{D}$ em $\mathcal{D}(A)$ denotando a classe de equivalência que contém p. Defina sobre $\mathcal{D}(A)$ uma adição por:

$$[p]_\mathcal{D} + [q]_\mathcal{D} = [p \oplus q]_\mathcal{D}, \quad p, q \in \mathcal{P}_\infty(A).$$

Segue da proposição anterior que a operação definida acima está bem definida e também que $(\mathcal{D}(A), +)$ é um semigrupo abeliano.

D.1.4 O grupo $\mathcal{K}_0$ de uma $C^\star$-álgebra unital

Um grupo abeliano $\mathcal{K}_0(A)$ é associado à cada $C^\star$-álgebra A. O grupo $\mathcal{K}_0(A)$ surge apartir de um semigrupo abeliano $(\mathcal{D}(A), +)$ e a construção de Grothendieck. Veremos também que $\mathcal{K}_0(A)$ é um funtor da categoria das $C^\star$-algebras unitais na categoria dos grupos abelianos.

A construção de Grothendieck.
Seja $(S, +)$ um semigrupo abeliano. Defina uma relação de equivalência $\sim$ sobre $S \times S$ por:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ se existe } z \in S \text{ tal que } x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z.$$

É fácil ver que $\sim$ é uma relação de equivalência, pois para todo $z \in S$
vale que $x_1+y_1+z = x_1+y_1+z$, $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ implica que $x_1+y_2+z = x_2+y_1+z$ para algum $z \in S$, isto equivale a $x_2 + y_1 + z = x_1 + y_2 + z$, donde $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$, e finalmente, $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ se existe $z \in S$ tal que $x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z$ e $(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$ se $x_2 + y_3 + w = x_3 + y_2 + w$ para algum $w \in S$ daí temos:
$x_1+y_3+(y_2+z+w) = x_2+y_1+z+y_3+w = x_3+y_2+w+y_1+z = x_3+y_1+(y_2+z+w)$, donde segue que $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$.

Vamos denotar por $Gr(S)$ o quociente $(S \times S)/\sim$, e seja $\overline{(x, y)}$ a classe de equivãlência em $Gr(S)$ que contém (x, y) em $S \times S$. A operação

$$\overline{(x_1, y_1)} + \overline{(x_2, y_2)} = \overline{(x_1 + x_2, y_1 + y_2)}$$

está bem definida e transforma $(Gr(S), +)$ em um grupo abeliano. Observe também que se tomarmos $t \in S$ tal que $x + z + y + t = z + x + y + t$, isto equivale por definição a $\overline{(x + y, x + z)} = \overline{(y, z)}$ donde segue que $\overline{(x, x)} = 0$ para todo $x \in S$ e em particular teremos que $\overline{(x, y)} = -\overline{(y, x)}$ para quaisquer $x, y \in S$. O grupo $(Gr(S), +)$ é denominado grupo de Grothendieck de S.

Seja $y \in S$. A aplicação

$$\begin{array}{rccc} \gamma_S : & S & \longrightarrow & Gr(S) \\ & x & \longmapsto & \overline{(x+y,y)} \end{array}$$

não depende da escolha de y e ainda γ_S é aplicação aditiva, a denominamos aplicação de Grothendieck. Dizemos que o semigrupo $(S,+)$ possui a propriedade de cancelamento se, para $x,y,z \in S$ $x+z=y+z$ implicar que $x=y$.
Vamos ver algumas propriedades da construção de Grothendieck.

Proposição D.8. *São válidas as seguintes propriedades:*

(i) (Propriedade Universal). Se H é um grupo abeliano, e se $\varphi : S \to H$ é uma aplicação aditiva, então existe um único homomorfismo de grupo $\psi : Gr(S) \to H$ tal que o diagrama abaixo comute.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\gamma_S"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Gr(S) \arrow[d, "\psi"] \\ & H \end{tikzcd}$$

(ii) (Funtorialidade)Para cada aplicação aditiva $\varphi : S \to T$ entre dois semigrupos S e T existe precisamente um homomorfismo de grupo $Gr(\varphi) : Gr(S) \to Gr(T)$ que faz o diagrama abaixo comutar,

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma_S"'] & T \arrow[d, "\gamma_T"] \\ Gr(S) \arrow[r, "Gr(\varphi)"'] & Gr(T) \end{tikzcd}$$

(iii)

$$Gr(S) = \gamma_S(x) - \gamma_S(y) : x, y \in S. \tag{D.2}$$

(iv) Sejam $x,y \in S$. Então $\gamma_S(x) = \gamma_S(y)$ se e somente se $x+z=y+z$ para algum $z \in S$.

(v) A aplicação de Grothendieck $\gamma_S : S \to Gr(S)$ é injetiva se e somente se possui a propriedade de cancelamento.

(vi) Seja $(H,+)$ um grupo abeliano, e seja S um subconjunto não vazio de H. Se S é fechado sob adição , então $(S,+)$ é um semigrupo abeliano com a propriedade de cancelamento, $Gr(S)$ é isomorfo o subgrupo H_0 gerado por S, e
$H_0 = \{x - y : x, y \in S\}$.

Demonstração:

(i) Se $\overline{(x_1, y_1)} = \overline{(x_2, y_2)}$ então por definição $x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z$ para algum $z \in S$, logo $\varphi(x_1) + \varphi(y_2) + \varphi(z) = \varphi(x_2) + \varphi(y_1) + \varphi(z)$ em H, donde teremos $\varphi(x_1) - \varphi(y_1) = \varphi(x_2) - \varphi(y_2)$. Portanto a aplicação $\psi : Gr(S) \to H$ dada por $\psi(\overline{(x, y)}) = \varphi(x) - \varphi(y)$ é uma boa definição e faz o diagrama mencionado comutar, pois dado $x \in S$ temos $\psi \circ \gamma_S(x) = \psi(\overline{(x + y, y)}) = \varphi(x + y) - \varphi(y) = \varphi(x)$, logo $\psi \circ \gamma_S = \varphi$.

(ii) Como $Gr(T)$ é grupo abeliano decorre de D.8 (i) que a aplicação aditiva $\gamma_T \circ \varphi : S \to Gr(T)$ fatora unicamente em um homomorfismo de grupo $Gr(\varphi) : Gr(S) \to Gr(T)$.

A prova para os demais itens pode ser encontrada em [20].

□

Exemplo D.4. *O grupo de Grothendieck do semigrupo abeliano $(\mathbb{Z}^+, +)$ é isomorfo à $(\mathbb{Z})$, pois por D.8 (vi) temos que:*

$$Gr(\mathbb{Z}^+) \cong H_0 = \{x - y : x, y \in \mathbb{Z}^+\} = \mathbb{Z}$$

Exemplo D.5. *O grupo de Grothendieck do semigrupo abeliano $(\mathbb{Z}^+ \cup \infty, +)$ é 0, e $(\mathbb{Z}^+ \cup \infty, +)$ é um semigrupo que não tem a propriedade de cancelamento.*

Definição D.10. O grupo $\mathcal{K}_0$ para uma $C^\star$-álgebra unital.

Seja A uma $C^\star$-álgebra unital, e seja $(\mathcal{D}(A), +)$ o semigrupo abeliano da definição D.9. Defini-se $\mathcal{K}_0(A)$ como sendo o grupo de Grothendieck de $\mathcal{D}(A)$, ou seja,

$$\mathcal{K}_0(A) = Gr(\mathcal{D}(A))$$

Defina também $[.]_0 : \mathcal{P}_\infty(A) \to \mathcal{K}_0(A)$ por

$$[p]_0 = \gamma([p]_{\mathcal{D}}) \in \mathcal{K}_0(A), \quad p \in \mathcal{P}_\infty(A), \tag{D.3}$$

onde $\gamma : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{K}_0(A)$ é a aplicação de Grothendieck.

O grupo $\mathcal{K}_{00}(A)$. A definição dada em D.10 também faz sentido para $C^\star$-algebras não unitais. Seja $\mathcal{K}_{00}(A)$ o grupo de Grothendieck do semigrupo $\mathcal{D}(A)$ para cada $C^\star$-álgebra unital A , e considere a aplicação,

$$[.]_{00} : \mathcal{P}_\infty(A) \to \mathcal{K}_{00}(A) \text{ dada por } [p]_{00} = \gamma([p]_{\mathcal{D}}) \text{ para cada } p \in \mathcal{P}_\infty(A).$$

Então $\mathcal{K}_0(A)$ e $\mathcal{K}_{00}(A)$ são iguais por definição para $C^\star$-algebras unitais. No entanto, os grupos $\mathcal{K}_0(A)$ e $\mathcal{K}_{00}(A)$ não iguais em geral para $C^\star$-algebras não unitais. (para maiores detalhes sobre o assunto ver [20]).

Definição D.11. (Equivalência Estável) *Defina uma relação $\sim_s$ sobre $\mathcal{P}_\infty(A)$ como segue. Se p, q são projeções em $\mathcal{P}_\infty(A)$, então $p \sim_s q$ se e somente se $p \oplus r \sim_0 q \oplus r$ para alguma projeção $r \in \mathcal{P}_\infty(A)$. A relação $\sim_s$ é chamada equivalência estável.*

Suponha que A é unital e que p, q são projeções em $\mathcal{P}_\infty(A)$. Vamos denotar por 1_n, a unidade em $\mathcal{M}_n(A)$. Então $p \sim_s q$ se e somente se $p \oplus 1_n \sim_0 q \oplus 1_n$ para algum inteiro positivo n. Na verdade, se $p \oplus r \sim_0 q \oplus r$ para algum $r \in \mathcal{P}_n(A)$, então:

$$p \oplus 1_n \sim_0 p \oplus r \oplus (1_n - r) \sim_0 q \oplus r \oplus (1_n - r) \sim_0 q \oplus 1_n.$$

Proposição D.9. *(O quadro padrão do grupo $\mathcal{K}_0$ - caso unital)*
Seja A uma $C\star$-álgebra unital. Então:

$$\mathcal{K}_0(A) = \{[p]_0 - [q]_0 : p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)\} = \{[p]_0 - [q]_0 : p, q \in \mathcal{P}_n(A), n \in \mathbb{N}\}. \quad \text{(D.4)}$$

Além disso,
(i) $[p \oplus q]_0 = [p]_0 + [q]_0$ para quaisquer projeções $p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$,
(ii) $[0_A]_0 = 0$, sendo 0_A projeção nula em A,
(iii) Se $p, q \in \mathcal{P}_n(A)$ para algum n e $p \sim_h q$ em $\mathcal{P}_n(A)$, então $[p]_0 = [q]_0$,
(iv) Se p, q são projeções mutuamente ortogonais em $\mathcal{P}_n(A)$, então $[p+q]_0 = [p]_0 + [q]_0$,
(v) para quaisquer $p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$, $[p]_0 = [q]_0$ se e somente se $p \sim_s q$.

Demonstração:
A identidade D.4 segue diretamente de D.2. Se $g \in \mathcal{K}_0(A)$, então $g = [p']_0 - [q']_0$ para algum $p' \in \mathcal{P}_k(A)$ e $q' \in \mathcal{P}_l(A)$. Escolha $n = \max\{k, l\}$, e seja $p = p' \oplus 0_{n-k}$ e $q = q' \oplus 0_{n-l}$. Então p, q são projeções em $\mathcal{P}_n(A)$ com $p \sim_0 p'$ e $q \sim_0 q'$ pela proposição D.7(i). Donde segue que $g = [p]_0 - [q]_0$.

(i) $[p \oplus q]_0 = \gamma([p \oplus q]_{\mathcal{D}}) = \gamma([p]_{\mathcal{D}} + [q]_{\mathcal{D}}) = \gamma([p]_{\mathcal{D}}) + \gamma([q]_{\mathcal{D}}) = [p]_0 + [q]_0$.

(ii) Como $0_A \oplus 0_A \sim_0 0_A$, de (i) segue que $[0_A]_0 + [0_A]_0 = [0_A]_0$

(iii) Este ítem segue das implicações seguintes:
$p \sim_h q \Rightarrow p \sim q \Rightarrow p \sim_0 q \Rightarrow [p]_{\mathcal{D}} = [q]_{\mathcal{D}} \Rightarrow [p]_0 = [q]_0$,
onde as duas primeiras relações são definidas somente quando p, q pertendem a mesma álgebra de matrizes sobre A, e as outras três para quaisquer $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$.

(iv) Em D.7(iv) mostramos que $p + q \sim_0 p \oplus q$,logo $[p + q]_0 = [p \oplus q]_0 = [p]_0 + [q]_0$.

(v) Se $[p]_0 = [q]_0$, então existe uma projeção $r \in \mathcal{P}_\infty(A)$ com $[p]_{\mathcal{D}} + [r]_{\mathcal{D}} = [q]_{\mathcal{D}} + [r]_{\mathcal{D}}$ pela proposição D.8(iv). Logo $[p \oplus r]_{\mathcal{D}} = [q \oplus r]_{\mathcal{D}}$, ou seja $p \oplus r \sim_0 q \oplus r$, e portanto $p \sim_s q$. Reciprocamente, se $p \sim_s q$, então existe uma projeção $r \in \mathcal{P}_\infty(A)$

com $p \oplus r \sim_0 q \oplus r$. Pelo ítem (i) temos $[p]_0 + [r]_0 = [q]_0 + [r]_0$, donde segue que $[p]_0 = [q]_0$.

Proposição D.10. *(**Propriedade Universal do** $\mathcal{K}_0$). Seja A uma $C^\star$-álgebra unital, seja G um grupo abeliano, e suponha que*

$$\nu : \mathcal{P}_\infty(A) \to G$$

é uma aplicação que satisfaz

(i) $\nu(p \oplus q) = \nu(p) + \nu(q)$ para quaisquer $p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$.

(ii) $\nu(0_A) = 0$.

(iii) Se $p, q \in \mathcal{P}_n(A)$ para algum n e $p \sim_h q$ em $\mathcal{P}_n(A)$, então $\nu(p) = \nu(q)$.

Então existe um único homomorfismo de grupo $\alpha : \mathcal{K}_0(A) \to G$ que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_\infty(A) \arrow[d, "{[\cdot]_0}"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\
\mathcal{K}_0(A) \arrow[r, "\alpha"'] & G
\end{tikzcd}$$

comutar.

Demonstração:

Inicialmente vamos provar que se p, q são projeções em $\mathcal{P}_\infty(A)$ e se $p \sim_0 q$ então $\nu(p) = \nu(q)$. Encontre $k, l \in \mathbb{N}$ tais que $p \in \mathcal{P}_k(A)$ e $q \in \mathcal{P}_l(A)$. Seja n um inteiro tal que $n = \max\{k, l\}$, e faça $p' = p \oplus 0_{n-k}$ e $q' = q \oplus 0_{n-1}$. Então $p', q' \in \mathcal{P}_n(A)$,$p' \sim_0 p \sim_0 q \sim_0 q'$, e daí $p' \sim q'$. Pela proposição 2.2.8 de [20], $p' \oplus 0_{3n} \sim_h q' \oplus 0_{3n}$ em $\mathcal{P}_{4n}(A)$. Concluímos que

$$\nu(p) = \underbrace{\nu(p) + \nu(0) + \cdots + \nu(0)}_{4n-k} = \nu(p' \oplus 0_{3n}) = \nu(q' \oplus 0_{3n}) = \nu(q).$$

Segue que a aplicação

$\beta : \mathcal{D}(A) \to G$ dada por $\beta([p]_\mathcal{D}) = \nu(p)$ está bem definida. A aditividade de β segue de:

$$\beta([p]_\mathcal{D} + [q]_\mathcal{D}) = \beta([p \oplus q]_\mathcal{D}) = \nu(p \oplus q) = \nu(p) + \nu(q) = \beta([p]_\mathcal{D}) + \beta([q]_\mathcal{D}).$$

Usando o ítem (i) da proposição D.8 encontramos um homomorfismo de grupo

$$\alpha : \mathcal{K}_0(A) \to G$$

que faz o diagrama mencionado comutar. A unicidade de α segue de D.4.

D.1.5 Funtorialidade do $\mathcal{K}_0$

O funtor $\mathcal{K}_0$ para $C^\star$-algebras unitais.

Sejam A e B $C^\star$-algebras unitais, e seja $\varphi : A \to B$ um $\star$-homomorfismo. Vamos associar à φ um homomorfismo de grupo

$$\mathcal{K}_0(\varphi) : \mathcal{K}_0(A) \to \mathcal{K}_0(B)$$

como segue. Já vimos no começo da seção que podemos estender φ a um $\star$-homomorfismo

$$\varphi : \mathcal{M}_n(A) \to \mathcal{M}_n(B)$$

para cada n. Todo $\star$-homomorfismo aplica projeções em projeções, e logo φ aplica $\mathcal{P}_\infty(A)$ em $\mathcal{P}_\infty(B)$. Defina

$$\nu : \mathcal{P}_\infty(A) \to \mathcal{K}_0(B)$$

por

$$\nu(p) = [\varphi(p)]_0$$

para $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$. Então ν satisfaz os ítens (i),(ii) e (iii) da proposição D.10, e portanto segue que ν fatora unicamente em um homomorfismo de grupo

$$\mathcal{K}_0(\varphi) : \mathcal{K}_0(A) \to \mathcal{K}_0(B)$$

dado por:

$$\mathcal{K}_0(\varphi)([p]_0) = [\varphi(p)]_0,$$

$p \in \mathcal{P}_\infty(A)$.

Em outras palavras, nos teremos um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_\infty(A) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "{[.]}"'] & \mathcal{P}_\infty(B) \arrow[d, "{[.]}"] \\ \mathcal{K}_0(A) \arrow[r, "\mathcal{K}_0(\varphi)"'] & \mathcal{K}_0(B) \end{tikzcd} \quad \text{(D.5)}$$

Proposição D.11. *(Funtorialidade do $\mathcal{K}_0$ para $C^\star$-algebras unitais)*
(i) Para cada $C^\star$-álgebra unital A, $\mathcal{K}_0(id_A) = id_{\mathcal{K}_0(A)}$.
(ii) Se A, B, e C são $C^\star$-algebras unitais, e se $\varphi : A \to B$ e $\psi : B \to C$ são $\star$-homomorfismos, então $\mathcal{K}_0(\psi \circ \varphi) = \mathcal{K}_0(\psi) \circ \mathcal{K}_0(\varphi)$.
(iii) $\mathcal{K}_0(\{0\}) = \{0\}$.
(iv) Para cada par de $C^\star$-algebras A e B,$\mathcal{K}_0(0_{B,A}) = 0_{\mathcal{K}_0(B),\mathcal{K}_0(A)}$.

Demonstração:
Ver Demonstração em [20] pg. 43.

$\square$

Exemplo D.6. *(*Traço e grupo $\mathcal{K}_0$*)*

Para cada traço τ sobre uma $C^\star$-álgebra A existe precisamente um traço τ_n (usualmente abreviado por τ) sobre $\mathcal{M}_n(A)$ que satisfaz

$$\tau_n(diag(a, 0, \cdots, 0)) = \tau(a)$$

para qualquer $a \in A$, e τ_n é dado por

$$\tau_n \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \tau(a_{ii}).$$

Um traço τ sobre uma $C^\star$-álgebra da origem desta forma a uma função $\tau : \mathcal{P}_\infty(A) \to \mathbb{C}$, e esta função satisfaz as condições (i),(ii) e (iii) na proposição D.10, e logo existe um único homomorfismo de grupo $\mathcal{K}_0(\tau) : \mathcal{K}_0(A) \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\mathcal{K}_0(\tau)([p]_0) = \tau(p), \quad p \in \mathcal{P}_\infty(A) \tag{D.6}$$

Para verificar o ítem (iii) de D.10, use que $p \sim q$ se $p \sim_h q$. Observe que se τ é traço então $\mathcal{K}_0(\tau)([p]_0) = \tau(p)$ é um número real positivo para cada $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$, e $\mathcal{K}_0(\tau)$ aplica $\mathcal{K}_0(A)$ em $\mathbb{R}$.

Proposição D.12. *O grupo $\mathcal{K}_0(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$ para cada inteiro positivo n. Mais especificamente, se Tr é o traço padrão sobre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ então*

$$\mathcal{K}_0(Tr) : \mathcal{K}_0(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \to \mathbb{Z}$$

é um isomorfismo. O grupo cíclico $\mathcal{K}_0(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ é gerado por $[e]_0$, onde e é uma projeção unidimensional em $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Como $\mathbb{C} = \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ nos obtemos em particular que $\mathcal{K}_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$.

Demonstração:
Seja g um elemento em $\mathcal{K}_0(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. Pelo quadro padrão de $\mathcal{K}_0$ (equação D.4) podemos encontrar $k \in \mathbb{N}$ e projeções p, q em $\mathcal{M}_k(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \mathcal{M}_{kn}(\mathbb{C})$ tal que $g = [p]_0 - [q]_0$. Temos,

$$\mathcal{K}_0(Tr)(g) = Tr(p) - Tr(q) = dim(p(\mathbb{C}^{kn})) - dim(q(\mathbb{C}^{kn})).$$

Vemos que $\mathcal{K}_0(Tr)(g)$ é um inteiro. Se $\mathcal{K}_0(Tr)(g) = 0$, então $p \sim q$ pelo exercício 2.9, donde $g = [p]_0 - [q]_0 = 0$. Logo $\mathcal{K}_0(Tr)$ é injetivo. A imagem de $\mathcal{K}_0(Tr)$ é um subgrupo de $\mathbb{Z}$, e um subgrupo de $\mathbb{Z}$ é igual a $\mathbb{Z}$ se contém 1. Agora, $1 = \mathcal{K}_0(Tr)([e]_0)$, quando e é uma projeção em $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ com imagem unidimensional.

□

Proposição D.13. *(*Estabilidade do $\mathcal{K}_0$*) Seja A uma $C^\star$-algebra e seja $n \in \mathbb{N}$. Então $\mathcal{K}_0(A) \cong \mathcal{K}_0(\mathcal{M}_n(A))$. Mais especificamente, o $\star$-homomorfismo*

$$\begin{array}{rccc} \lambda_{n,A}: & A & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(A) \\ & a & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

induz um isomorfismo $\mathcal{K}_0(\lambda_{n,A}) : \mathcal{K}_0(A) \to \mathcal{K}_0(\mathcal{M}_n(A))$.

Demonstração:
Ver demonstração em [20] pg 69.

□

D.1.6 Continuidade do $\mathcal{K}_0$

Teorema D.1. *(*Continuidade do $\mathcal{K}_0$*) Para cada sequência indutiva*

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} ... \tag{D.7}$$

de $C^\star$-álgebras, $\mathcal{K}_0(\varinjlim A_n)$ e $\varinjlim \mathcal{K}_0(A_n)$ são isomorfos como grupos abelianos. Mais especificamente, se $(A, \{\mu_n\})$ é o limite indutivo da sequência D.7, e se $(G_0, \{\beta_n\})$ é o limite indutivo da sequência

$$\mathcal{K}_0(A_1) \xrightarrow{\mathcal{K}_0(\varphi_1)} \mathcal{K}_0(A_2) \xrightarrow{\mathcal{K}_0(\varphi_2)} \mathcal{K}_0(A_3) \xrightarrow{\mathcal{K}_{\prime}(\varphi_3)} ... \tag{D.8}$$

então existe um único isomorfismo de grupo $\gamma : G_0 \to \mathcal{K}_0(A)$ que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}_0(A_n) \arrow[d, "\beta_n"'] \arrow[dr, "\mathcal{K}_0(\mu_n)"] & \\
G_0 \arrow[r, "\gamma"'] & \mathcal{K}_0(A)
\end{tikzcd}$$

comutar para cada $n \in \mathbb{N}$. Além disso:

(i) $\mathcal{K}_0(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_0(\mu_n)\mathcal{K}_0(A_n))$;

(ii) $Ker(\mathcal{K}_0(\mu_n)) = \bigcup_{m=n+1}^{\infty} Ker(\mathcal{K}_0(\varphi_{m,n})$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$;

Demonstração:

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [20] pg 99

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] G. Boava. *Caracterizações da C*-álgebra Gerada por uma Compressão Aplicadas a Cristais e Quasicristais*. Dissertação (Mestrado em Matemática e Computação Científica). Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2007.

[2] O. Bratteli, G.A. Elliott, D.E. Evans, A.Kishimoto. *Non-commutative spheres II:rational rotations*. J. Operator Theory 27 (1992), 53-85.

[3] K. R. Davidson. *C*-Algebras by Example*. Fields Institute Monographs, 1996.

[4] P. Di Francesco, P. Mathieu,and D.Sénéchal. *Conformal Theory*. Springer Verlay, 1997.

[5] G. H. Hardy, E. M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford, 1960.

[6] J.M. Gracia-Bondia, J.C. Varilly, H. Figueroa. *Elements of Noncommutative Geometry*. Birkhäuser, Boston, 2001.

[7] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library. John Wiley and Sons, Inc., 1989.

[8] E. C. Lance. *Hilbert C*-modules*. Cambridge,1995.

[9] E. L. Lima. *Elementos de Topologia Geral*. Ao Livro Técnico,Rio de Janeiro,1970.

[10] S. Marta Macho. *Algunas ideas sobre Geometría no conmutativa*. Bilbao Publicaciones de la RSME 2, 169-180, 2001.

[11] K.Masoud, M. Marcolli. *An Invitation to noncommutative geometry*. World Scientific, 1-128, 2008.

[12] G. J. Murphy. *C*-algebras and operator theory.* Academic Press Inc., San Diego, 1990.

[13] G. K. Pedersen. *C*-Algebras and their Automorphism Groups.* Londres: Academic Press Limited, 1989.

[14] P. A. Fillmore. *A user's guide to operator algebras.* New York: Wiley, 1996.

[15] M. Pimsner and D. Voiculescu. *Imbedding the irrational rotation C*-algebra into an AF-algebra*, J. Operator Theory, 4 201-210, 1980,

[16] M. A. Rieffel. *C*-algebras associated with irrational rotations.*Pacific Journal of Mathematics Vol. 93, No. 2, 1981.

[17] M. A. Rieffel. *Strong Morita equivalence of certain transformation group C*-algebras*, Math. Ann., 222 7-22, 1976.

[18] M. A. Rieffel. *Applications of strong Morita equivalence to transformation group C*- algebras*, Proc Symp. Pure Math., 38,1982.

[19] M. A. Rieffel. *Morita Equivalence for Operator Algebras*, Proc Symp. Pure Math., 38, 1982.

[20] M. Rørdam, F. Larsen, N. J. Lausten. *An Introduction to K-Teory for C*-Algebras.* Cambridge, 2000

[21] J. J. Rotman *Advanced Modern Algebra.* Prentice Hall, 2002.

[22] W. Rudin. *Functional Analysis*, New Delhi, 1976.

[23] V. S. Sunder. *Functional analysis: spectral theory.* Birkhäuser Verlag, 1998.

[24] N. E. Wegge-Olsen. *K-theory and C*-algebras.* Oxford, New York, 1993.