Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Álgebras de Hopf fracas: teoremas de dualidade e de Maschke

Deividi Ricardo Pansera
Orientadora: Prof.ª Dra. Virgínia Silva Rodrigues

Florianópolis
Fevereiro de 2013

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Álgebras de Hopf fracas: teoremas de dualidade e de Maschke

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de concentração em Álgebra.

Deividi Ricardo Pansera
Florianópolis
Fevereiro de 2013

Álgebras de Hopf fracas: teoremas de dualidade e de Maschke

por

Deivídi Ricardo Pansera[1]

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Álgebra, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. Daniel Gonçalves
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof.ª Dr.ª Virgínia Silva Rodrigues
(Orientadora - UFSC)

Prof. Dr. Antonio Paques
(Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS)

Prof.ª Dr.ª Daiana Aparecida da Silva Flôres
(Universidade Federal de Santa Maria - UFSM)

Prof. Dr. Licio Hernanes Bezerra
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2013.

[1]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

“A estrada avança sempre, sempre,
A partir da porta onde começou.
Agora a estrada chegou muito longe
E tenho de segui-la, se puder.

De percorrê-la com pés fatigados,
Até se fundir noutro caminho maior,
Onde se encontram muitos caminhos e missões.
E depois, para onde? Não sei dizer.”

J. R. R. Tolkien

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à Santíssima Trindade, Pai, Filho e Espírito Santo, pela mera possibilidade da minha redenção. Aqui, houve a verdadeira mudança significativa em minha vida, não apenas para sempre, mas para a eternidade. Parafraseando São Paulo em At 17, 28 'n'Ele sou, me movo e existo'.

À minha família amada. Todos. Em especial ao meu Pai, minha mãe, meu irmão e meus queridos avós. Muito melhores que as minhas, para uma tentativa de expressão do que significa a família, são as palavras de G.K. Chesterton: "Quando entramos numa família, pelo ato de nascermos, entramos realmente num mundo que é incalculável, num mundo que tem suas próprias e estranhas leis, num mundo que poderia passar sem nós, num mundo que não criamos. Em outras palavras, quando entramos numa família, entramos num conto de fadas."

À minha orientadora, Prof.ª Virgínia Silva Rodrigues. Ela, certamente, é muito mais que uma orientadora no sentido acadêmico. É uma orientadora no sentido amplo da vida e de suas relações. Uma verdadeira amiga e companheira. Aprendi e aprendo muito com ela. Jamais esquecerei que, em determinado momento crítico da minha vida pessoal, ela ofereceu-me o céu com um ato singelo e, confessadamente, inesperado por mim. O maravilhoso conforto de um abraço amigo e consolador. Muito obrigado!

Ao professor Christian Lomp por ter aceito, ainda que informalmente, orientar-me durante um possível futuro doutorado. Esse ato, motivou-me a continuar e prosseguir com os estudos, no âmbito acadêmico.

Aos professores Antonio Paques, Daiana Aparecida da Silva Flôres e Licio Hernanes Bezerra. Expresso minha profunda gratidão por todas as sugestões, correções e, principalmente, por terem dedicado um período de seus preciosos tempos para a leitura deste trabalho.

Aos meus "irmãos algebristas". Luis Augusto Uliana e Sara Pinter. O ritual de um café, o qual ultrapassou protocolos sociais, antes de nossas costumeiras "aulas algébricas", jamais será esquecido.

Aos meus colegas de turma e matemática. Em especial, Camila Fabre Sehnem e Soyara Biazotto. Boas risadas, cafés, almoços e afins.

Aos meus eternos amigos, dos quais se incluem os já citados nos parágrafos anteriores à este. Em especial Denis Dalzotto, Fábio Campos, Lucas Betega, Rafael do Nascimento e Tcharles Roberto Bagatoli. Mostraram-me e ainda mostram o que é, de fato, vislumbrar o que está para além de uma janela. Nada mais apropriado para este parágrafo do que citar C.S. Lewis: "A Amizade é desnecessária - como a filosofia, como a arte, como o próprio universo (pois Deus não precisava criar). Ela não tem valor de sobrevivência; ela é, antes, uma das coisas que dão valor à sobrevivência."

À Elisa, secretária da pós, que, em sua extrema competência, sempre apresentou prontidão.

Finalmente, mas não menos importante, agradeço ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pela bolsa de mestrado fornecida, sem a qual não seria possível escrever esta dissertação.

Resumo

O conceito de álgebra de Hopf fraca surge como uma generalização de álgebra de Hopf no sentido clássico, (veja [3]). Nosso objetivo neste trabalho é apresentar, embasados em [10], uma versão fraca do teorema de Maschke que caracteriza álgebras de Hopf fracas semissimples em termos de separabilidade e integrais normalizadas. Além disso, usando [9], definimos a noção de ação de uma álgebra de Hopf fraca H em uma álgebra A e apresentamos um produto smash $A\#H$ nesse contexto. Finalmente, mostramos uma generalização do teorema de dualidade de Blattner-Montgomery (veja [1]), isto é, se uma álgebra de Hopf fraca H agir em uma álgebra A então existe um isomorfismo entre as álgebras $(A\#H)\#H^*$ e $End_k(A\#H)_A$.

Abstract

The concept of weak Hopf algebra arises as a generalization of ordinary Hopf algebra, see [3]. Our goal in this work is to present, based on [10], a weak version of Maschke's theorem which characterizes semisimple weak Hopf algebras in terms of separability and normalized integrals. Also, based on [9], it is defined a notion of a weak Hopf algebra H which acts on an algebra A, and it is presented a smash product $A\#H$ in this context. Finally, we shaw a generalization Blattner-Montgomery's duality theorem (see [1]), i.e., if we have a weak Hopf algebra action H on an algebra A then there is an algebra isomorphism between $(A\#H)\#H^*$ and $End_k(A\#H)_A$.

Índice

Introdução

Álgebras de Hopf e biálgebras surgem em muitos contextos matemáticos distintos como estruturas fundamentais. A teoria de álgebras de Hopf, atualmente, está muito desenvolvida e possui aplicações em diversas áreas. Tais objetos surgiram, pela primeira vez, em topologia algébrica, mais precisamente no estudo de anéis de cohomologia de grupos de Lie, posteriormente generalizado para H-espaços. Álgebras de Hopf possuem uma teoria de representação rica e uma das razões disso é que uma álgebra de Hopf H concede, naturalmente, uma estrutura de módulo no produto tensorial de H-módulos. Quando H possui dimensão finita, os ideais de H, que são chamados "espaços integrais", são unidimensionais e são fundamentais na teoria de representação.

Em meados de 1980, foram descobertas algumas conexões, em determinados aspectos, entre álgebras de Hopf, topologia e física teórica, que desenvolveram-se no que pode ser chamado de matemática quântica (quantum mathematics). Nesse âmbito, incluem-se os grupos quânticos, a topologia quântica, a geometria não-comutativa e algumas categorias com estruturas adicionais. As álgebras de Hopf encontradas nesses contextos são, em sua maioria, simultaneamente não-comutativas e não-cocomutativas.

Um número considerável de generalizações de álgebras de Hopf e objetos relacionados surgiram nos últimos anos. Dentre essas generalizações, uma, em específico, é o objeto de estudo desta dissertação: álgebras de Hopf fracas ou grupóides quânticos finitos.

Álgebras de Hopf fracas foram introduzidas em [2, 11, 12]. As álgebras de Kac generalizadas (finito dimensionais), em [14], são também álgebras de Hopf fracas no sentido de [3, 11], embora com uma antípoda involutiva. Uma álgebra de Hopf fraca H é um espaço vetorial finito dimensional que possui uma estrutura de álgebra e de coálgebra simultaneamente, com uma certa relação de compatibilidade entre essas estruturas, juntamente com um anti-homomorfismo de álgebras e de coálgebras chamado antípoda. A principal diferença entre álgebra de Hopf clássica e álgebra de Hopf fraca é que, em fracas, não é mais exigido que a comultiplicação preserve a unidade (equivalentemente, não é mais requerido que a counidade seja um homomorfismo de álgebras) e isso resulta na existência de duas aplicações lineares ε_t e ε_s, que geram subálgebras canônicas que contêm a unidade de H, denotadas por H_t e H_s, respectivamente.

Neste trabalho, embasados em [3], apresentamos os axiomas de biálgebras fracas e álgebras de Hopf fracas sobre um corpo k. Discutimos, com uma atenção minuciosa, as subálgebras canônicas H_t e H_s mencionadas no parágrafo anterior, onde mostramos, além de diversas propriedades relacionadas às mesmas, que tais subálgebras são álgebras separáveis (Proposição 1.34, p. 41) e que a álgebra de Hopf fraca dual H^* possui suas subálgebras H_t^* e H_s^* e que essas são isomorfas às subálgebras H_s e H_t, respectivamente.

Em seguida, utilizando [10], apresentamos um estudo de integrais para álgebras de Hopf fracas. Usando a noção de módulos de Hopf fracos, que é uma generalização de módulos de Hopf, mostramos uma extensão do teorema fundamental de módulos de Hopf neste contexto fraco (Teorema 2.14, p. 56) e, como consequência, a existência de uma integral não-nula. Ainda no contexto de integrais, apresentamos uma versão fraca do teorema de Maschke (Teorema 2.18, p. 60), que caracteriza álgebras de Hopf fracas semissimples em termos de separabilidade e integrais normalizadas.

Finalmente, embasados em [9] e [10], definimos a noção de ação e coação de uma álgebra de Hopf fraca H em uma álgebra A e mostramos a sua relação de dualidade. Apresentamos uma noção de produto smash $A\#H$ nesse contexto, e generalizamos o conhecido teorema de Blattner-Montgomery (Teorema 3.16, p. 76), isto é, se uma álgebra de Hopf fraca H age em uma álgebra A então as álgebras $(A\#H)\#H^*$ e $End_k(A\#H)_A$ são isomorfas. Sendo esse um dos principais resultados deste trabalho.

Consideramos, como pré-requisitos para a leitura deste trabalho, a teoria de coálgebras, de comódulos e de álgebras de Hopf (no sentido clássico).

Capítulo 1

Álgebras de Hopf fracas

Neste capítulo, nossa principal referência é [3], muito embora apareçam alguns resultados de [9]. Uma interessante referência é [5]. Apresentamos as noções preliminares de álgebras de Hopf fracas, bem como diversas propriedades que são de fundamental importância para os capítulos subsequentes. Começamos enunciando os axiomas de biálgebras fracas e álgebras de Hopf fracas. Apresentamos duas subálgebras canônicas e diversas propriedades que envolvem as mesmas.

Primeiramente, fixamos notações que são utilizadas ao longo do trabalho. Denotamos por k um corpo e, a menos que se diga o contrário, todos os produtos tensoriais são tomados sobre k e assim, escrevemos $\otimes$ ao invés de $\otimes_k$.

Ao longo do trabalho, expomos em lemas, identidades que são utilizadas com devida frequência. Além disso, à medida que tais identidades são obtidas, optamos por colocá-las no Apêndice. Assim, em sua grande maioria, fazemos referências às identidades que estão no Apêndice. Acreditamos que, dessa forma, estamos proporcionando ao leitor uma maior praticidade.

1.1 Biálgebras fracas

1.1.1 Definições e exemplos

Lembremos que, em uma biálgebra no sentido clássico, as funções que fornecem a estrutura de coálgebra, Δ e ε, são homomorfismos de álgebras (veja [6]). Porém, em biálgebras fracas tal condição já não é mais exigida. Enfraquece-se a propriedade de Δ preservar a unidade ou, equivalentemente, conforme vemos em resultados posteriores, ε já não é mais multiplicativa.

Definição 1.1 *Uma k-biálgebra fraca é uma quíntupla $(H, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ satisfazendo*

(1) *H é uma álgebra associativa de dimensão finita sobre k com multiplicação $\mu : H \otimes H \to H$ e unidade $u : k \to H$, isto é, μ e u são aplicações k-lineares que satisfazem*

(i) *Associatividade: $\mu \circ (\mu \otimes id) = \mu \circ (id \otimes \mu)$;*

(ii) *Propriedade da unidade: $\mu \circ (u \otimes id) = id = \mu \circ (id \otimes u)$.*

Escrevemos $xy = \mu(x \otimes y)$ e $1_H = u(1_k)$.

(2) *H é uma coálgebra sobre k com comultiplicação $\Delta : H \to H \otimes H$ e counidade $\varepsilon : H \to k$, isto é, Δ e ε são aplicações k-lineares que satisfazem*

(i) *Coassociatividade: $(\Delta \otimes id) \circ \Delta = \Delta^2 = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$;*

(ii) *Propriedade da counidade: $(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = id = (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta$.*

Utilizamos a notação de Sweedler para coálgebras, conforme apresentada em [6], com uma pequena ressalva, ao invés de escrevermos $\Delta(x) = \sum x_1 \otimes x_2$, omitimos a soma e escrevemos simplesmente $\Delta(x) = x_1 \otimes x_2$.

(3) *Para quaisquer $x, y, z \in H$ e para $1_H \in H$*

(i) *Δ é multiplicativa, isto é, $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$;*

(ii) *Multiplicatividade fraca para a counidade, isto é, $\varepsilon(xy_2)\varepsilon(y_1 z) = \varepsilon(xyz) = \varepsilon(xy_1)\varepsilon(y_2 z)$;*

(iii) *Propriedade comultiplicativa fraca para a unidade, isto é, $(1_H \otimes \Delta(1_H))(\Delta(1_H) \otimes 1_H) = \Delta^2(1_H) = (\Delta(1_H) \otimes 1_H)(1_H \otimes \Delta(1_H))$.*

Quando nos referimos a uma k-biálgebra fraca $(H, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$, omitimos as funções estruturais e o corpo k. Escrevemos simplesmente H.

Observação 1.2 Na Definição 1.1, cometemos um certo abuso de notação ao escrevermos $\mu \circ (u \otimes id) = id = \mu \circ (id \otimes u)$ e $(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = id = (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta$. Na verdade, omitimos os isomorfismos canônicos $H \otimes k \cong H \cong k \otimes H$.

Alertamos o leitor de que, ao longo do trabalho, denotamos a composição de funções f e g por fg ao invés de $f \circ g$.

Observação 1.3 Em (3), na Definição 1.1, escreveremos

$$1_1 \otimes 1_2 1_{1'} \otimes 1_{2'} = 1_1 \otimes 1_2 \otimes 1_3 = 1_{1'} \otimes 1_1 1_{2'} \otimes 1_2.$$

Além disso, direto da multiplicatividade da Δ, podemos concluir que

$$x_1 \otimes x_2 = \Delta(x) = \Delta(1_H x) = \Delta(1_H)\Delta(x) = 1_1 x_1 \otimes 1_2 x_2$$

e

$$x_1 \otimes x_2 = \Delta(x) = \Delta(x 1_H) = \Delta(x)\Delta(1_H) = x_1 1_1 \otimes x_2 1_2.$$

Seja agora H uma biálgebra (no sentido clássico) de dimensão finita sobre k. Então, para quaisquer $x, y, z \in H$, temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon(xy_1)\varepsilon(y_2 z) &= \varepsilon(x)\varepsilon(y_1)\varepsilon(y_2)\varepsilon(z) \\
&= \varepsilon(x)\varepsilon(\varepsilon(y_1)y_2)\varepsilon(z) \\
&= \varepsilon(x)\varepsilon(y)\varepsilon(z) \\
&= \varepsilon(xyz).
\end{aligned}$$

Analogamente, podemos concluir que $\varepsilon(xyz) = \varepsilon(xy_2)\varepsilon(y_1 z)$. Como $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$ e $\Delta^2(1_H) = 1_H \otimes 1_H \otimes 1_H$, é evidente que

$$(1_H \otimes \Delta(1_H))(\Delta(1_H) \otimes 1_H) = \Delta^2(1_H) = (\Delta(1_H) \otimes 1_H)(1_H \otimes \Delta(1_H)).$$

Pelo que fizemos acima, concluímos que toda biálgebra (no sentido clássico) finito dimensional sobre k é uma biálgebra fraca.

Com o objetivo de construirmos um exemplo de biálgebra fraca, introduzimos a seguinte definição.

Definição 1.4 *Seja G um conjunto não-vazio equipado com uma operação binária, denotada pela concatenação, definida parcialmente. Dados $g, h \in G$ escrevemos $\exists gh$ sempre que a operação entre g e h está definida. Um elemento $f \in G$ é chamado uma identidade se $\exists fx$ implicar $fx = x$ e $\exists xf$ implicar $xf = x$. O conjunto G é chamado grupóide se*

(G1) *Para quaisquer $g, h, l \in G$, $\exists g(hl)$ se, e somente se, $\exists gh$ e $\exists hl$;*

(G2) *Para quaisquer $g, h, l \in G$, $\exists g(hl)$ se, e somente se, $\exists (gh)l$ e nesse caso $g(hl) = (gh)l$;*

(G3) *Para cada* $g \in G$ *existem identidades* $d(g), r(g) \in G$ *tais que* $\exists gd(g)$, $\exists r(g)g$ *e* $gd(g) = g = r(g)g$*;*

(G4) *Para cada* $g \in G$ *existe* $g^{-1} \in G$ *tal que* $d(g) = g^{-1}g$ *e* $r(g) = gg^{-1}$.

O próximo lema apresenta algumas propriedades de grupóides.

Lema 1.5 *Seja* G *um grupóide. Então são válidas as propriedades.*

(i) *Seja* $g \in G$*. Então* $d(g)$ *e* $r(g)$*, dadas como em* (G3)*, são únicas.*

(ii) *Para quaisquer* $g, h \in G$*,* $\exists gh$ *se, e somente se,* $d(g) = r(h)$*. Nesse caso,* $d(gh) = d(h)$ *e* $r(gh) = r(g)$*.*

(iii) *Para todo* $g \in G$*, temos que* $d(g) = r(g^{-1})$*,* $d(g^{-1}) = r(g)$*,* g^{-1} *é único e* $(g^{-1})^{-1} = g$*.*

(iv) *Para quaisquer* $g, h \in G$*,* $\exists gh$ *se, e somente se,* $\exists h^{-1}g^{-1}$ *e, nesse caso,* $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$*.*

Demonstração: (i) Seja $f \in G$ uma identidade tal que $\exists gf$ e $gd(g) = g = gf$. Assim, $g = gd(g) = (gf)d(g)$ e por (G2) e (G1) $\exists fd(g)$. Como f e $d(g)$ são identidades, concluímos que $f = fd(g) = d(g)$.

Analogamente, seja $t \in G$ uma identidade tal que $\exists tg$ e $r(g)g = g = tg$. Então, $g = r(g)g = r(g)(tg)$ e por (G1) $\exists r(g)t$. Como t e $r(g)$ são identidades, concluímos que $r(g) = r(g)t = t$.

(ii) Suponhamos que exista gh em G. Por (G3), temos que $\exists gd(g)$, $\exists r(h)h$, $gd(g) = g$ e $r(h)h = h$. Assim, $gh = (gd(g))(r(h)h)$ e, por (G1), $\exists (gd(g))r(h)$. Por (G2) e (G1), $\exists d(g)r(h)$. Como $d(g)$ e $r(h)$ são identidades em G, segue que $d(g) = d(g)r(h) = r(h)$.

Reciprocamente, se $d(g) = r(h)$ então $\exists gr(h)$, pois $\exists gd(g)$. Por (G4), $\exists h^{-1} \in G$ tal que $r(h) = hh^{-1}$. Por conseguinte, $gr(h) = g(hh^{-1})$ e (G1) garante que $\exists gh$.

Nesse caso, notemos que $gh = g(hd(h)) = (gh)d(h)$, em que a última igualdade é justificada por (G2). Novamente, por (G2), concluímos que $gh = (r(g)g)h = r(g)(gh)$.

Portanto, por (i) aplicado ao elemento gh, obtemos que $d(gh) = d(h)$ e $r(gh) = r(g)$.

(iii) Sabemos, por (ii), que $\exists gh$ se, e somente se, $d(g) = r(h)$. Para todo $g \in G$, temos por (G4) que existem $r(g)$ e $d(g)$ tais que $r(g) = gg^{-1}$ e $d(g) = g^{-1}g$. Portanto, $\exists gg^{-1}$ e $\exists g^{-1}g$. Por (ii), $d(g) = r(g^{-1})$ e $d(g^{-1}) = r(g)$.

Suponhamos $z \in G$ tal que $zg = d(g)$ e $gz = r(g)$. Então, pelo que fizemos acima, concluímos que $g^{-1} = g^{-1}d(g^{-1}) = g^{-1}r(g)$, mas $r(g) = gz$ e, por (G1) e (G4), segue que $g^{-1} = g^{-1}(gz) = (g^{-1}g)z = d(g)z$. Como $\exists gz$, por (ii), $d(g) = r(z)$. Logo, $g^{-1} = d(g)z = r(z)z = z$.

Por (G4), para todo $g \in G$, temos $(g^{-1})^{-1}g^{-1} = d(g^{-1})$ e $g^{-1}(g^{-1})^{-1} = r(g^{-1})$. Pelo que fizemos acima, $d(g^{-1}) = r(g)$ e $r(g^{-1}) = d(g)$ e assim, $(g^{-1})^{-1}g^{-1} = d(g^{-1}) = r(g)$ e $g^{-1}(g^{-1})^{-1} = r(g^{-1}) = d(g)$. Mas $d(g) = g^{-1}g$ e $r(g) = gg^{-1}$, pela unicidade de g^{-1} demonstrada acima, obrigatoriamente devemos ter $(g^{-1})^{-1} = g$.

(iv) Suponhamos que $\exists gh$. Por (ii), $d(g) = r(h)$. Mas, por (iii), $r(h) = d(h^{-1})$ e $d(g) = r(g^{-1})$. Logo, $r(g^{-1}) = d(h^{-1})$ que é equivalente, por (ii), $\exists h^{-1}g^{-1}$. Por (iii), $d(g) = r(g^{-1})$ e $d(h^{-1}) = r(h)$. Assim, $r(h) = d(g)$ e, por (ii), $\exists gh$.

A prova de que $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$ é análoga à feita em (iii). ■

Seja G um grupóide finito. A *álgebra de grupóide* é o k-módulo livre kG com base $\{u_g : g \in G\}$, munida de uma multiplicação definida, para quaisquer $g, h \in G$, da seguinte forma

$$u_g u_h = \begin{cases} u_{gh}, & \text{se } d(g) = r(h) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notemos que esse produto está bem definido, pois pelo Lema 1.5 (ii), $\exists gh \Leftrightarrow d(g) = r(h)$.

Denotemos por G_0 o conjunto de todos os elementos identidade em G. Claramente, G_0 é um conjunto finito. O elemento $1_{kG} = \sum_{e \in G_0} u_e$ é a unidade relativa ao produto definido acima. De fato, seja $h \in G$. Então

$$u_h 1_{kG} = u_h \sum_{e \in G_0} u_e = \sum_{e \in G_0} u_h u_e$$

e suponhamos $t \in G_0$ tal que $\exists ht$. Assim, $ht = h = hd(h)$ e pelo Lema 1.5 (i) $d(h) = t$. Portanto, $\sum_{e \in G_0} u_h u_e = u_h u_{d(h)} = u_{hd(h)} = u_h$. De maneira análoga, é possível mostrarmos que $1_{kG} u_h = u_h$.

Verifiquemos a associatividade dessa operação. Sejam $g, h, l \in G$. Notemos que, $(u_g u_h)u_l = u_{ghl}$ se, e somente se, $d(g) = r(h)$ e $d(h) = d(gh) = r(l)$. Porém, $u_g(u_h u_l) = u_{ghl}$ se, e somente se, $d(h) = r(l)$ e $d(g) = r(hl) = r(h)$. Logo, $(u_g u_h)u_l = u_g(u_h u_l)$, para quaisquer $g, h, l \in G$.

Com essa operação, kG torna-se uma álgebra, chamada álgebra de grupóide. Além disso, definimos

$$\begin{array}{rccc} \Delta: & kG & \to & kG \otimes kG \\ & u_g & \mapsto & u_g \otimes u_g \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \varepsilon: & kG & \to & k \\ & u_g & \mapsto & 1_k, \end{array}$$

tais aplicações fornecem a kG uma estrutura de coálgebra, pois, para todo $g \in G$, temos

$$((\Delta \otimes id) \circ \Delta)(u_g) = u_g \otimes u_g \otimes u_g = ((id \otimes \Delta) \circ \Delta)(u_g)$$

e

$$u_g = 1_k u_g = \varepsilon(u_g) u_g.$$

Agora, estamos aptos a apresentar um exemplo de uma biálgebra fraca que não é uma biálgebra.

Exemplo 1.6 Com a notação acima, kG é uma biálgebra fraca que não é uma biálgebra. De fato, ε não é um homomorfismo de álgebras. Dados $g, h \in G$ tais que $d(g) \neq r(h)$, temos $u_g u_h = 0$ e portanto $\varepsilon(u_g u_h) = 0$. Por outro lado, $\varepsilon(u_g)\varepsilon(u_h) = 1_k 1_k = 1_k$, o que implica que $\varepsilon(u_g u_h) \neq \varepsilon(u_g)\varepsilon(u_h)$. Dessa forma, kG não é uma biálgebra.

Mostremos que kG é uma biálgebra fraca. Sejam $g, h \in G$. Então

$$\Delta(u_g)\Delta(u_h) = (u_g \otimes u_g)(u_h \otimes u_h) = u_g u_h \otimes u_g u_h$$

e se $d(g) = r(h)$, segue que $u_g u_h = u_{gh}$ e portanto,

$$\Delta(u_g)\Delta(u_h) = u_{gh} \otimes u_{gh} = \Delta(u_{gh}) = \Delta(u_g u_h).$$

Se $d(g) \neq r(h)$ então $u_g u_h = 0$. Logo, $\Delta(u_g)\Delta(u_h) = 0 = \Delta(u_g u_h)$ e assim, Δ é multiplicativa.

Agora notemos que, para quaisquer $g, h, l \in G$, $u_g u_h u_l = u_{ghl}$ se, e somente se, $d(g) = r(h)$ e $d(h) = d(gh) = r(l)$. Logo,

$$\varepsilon(u_g u_h u_l) = \begin{cases} 1_k, & \text{se } d(g) = r(h) \text{ e } d(h) = r(l) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\varepsilon(u_g u_h) = \begin{cases} 1_k, & \text{se } d(g) = r(h) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$\varepsilon(u_h u_l) = \begin{cases} 1_k, & \text{se } d(h) = r(l) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim,

$$\varepsilon(u_g u_h)\varepsilon(u_h u_l) = \begin{cases} 1_k, & \text{se } d(g) = r(h) \text{ e } d(h) = r(l) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, $\varepsilon(u_g u_h u_l) = \varepsilon(u_g u_h)\varepsilon(u_h u_l)$ e, dessa forma, segue o item (3)(ii) da Definição 1.1.

A fim de verificarmos o item (3)(iii) da mesma definição, notemos que

$$\begin{aligned} \Delta^2(1_{kG}) &= \Delta^2\left(\sum_{e\in G_0} u_e\right) \\ &= (\Delta \otimes Id)\left(\Delta\left(\sum_{e\in G_0} u_e\right)\right) \\ &= (\Delta \otimes Id)\left(\sum_{e\in G_0} u_e \otimes u_e\right) \\ &= \sum_{e\in G_0} \Delta(u_e) \otimes u_e \\ &= \sum_{e\in G_0} u_e \otimes u_e \otimes u_e. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (1_{kG} \otimes \Delta(1_{kG}))(\Delta(1_{kG}) \otimes 1_{kG}) &= \left(\left(\sum_{e\in G_0} u_e\right) \otimes \left(\sum_{f\in G_0} u_f \otimes u_f\right)\right) \\ &\quad \left(\left(\sum_{e'\in G_0} u_{e'} \otimes u_{e'}\right) \otimes \left(\sum_{f'\in G_0} u_{f'}\right)\right) \\ &= \left(\sum_{e,f\in G_0} u_e \otimes u_f \otimes u_f\right) \end{aligned}$$

$$\left(\sum_{e',f'\in G_0} u_{e'}\otimes u_{e'}\otimes u_{f'}\right)$$
$$= \sum_{e,f,e',f'\in G_0} u_e u_{e'}\otimes u_f u_{e'}\otimes u_f u_{f'},$$

entretanto

$$\begin{aligned} u_e u_{e'} \neq 0 &\Leftrightarrow d(e) = r(e') \\ u_f u_{e'} \neq 0 &\Leftrightarrow d(f) = r(e') \\ u_f u_{f'} \neq 0 &\Leftrightarrow d(f) = r(f'). \end{aligned}$$

Como $e, e', f, f' \in G_0$ então $d(e) = e = r(e)$, $d(e') = e' = r(e')$, $d(f) = f = r(f)$ e $d(f') = f' = r(f')$. Portanto,

$$\begin{aligned} (1_{kG}\otimes\Delta(1_{kG}))(\Delta(1_{kG})\otimes 1_{kG}) &= \sum_{e,f,e',f'\in G_0} u_e u_{e'}\otimes u_f u_{e'}\otimes u_f u_{f'} \\ &= \sum_{e\in G_0} u_e\otimes u_e\otimes u_e. \end{aligned}$$

Logo, kG é uma biálgebra fraca.

O próximo exemplo é uma generalização de um exemplo apresentado em [13].

Exemplo 1.7 Seja H uma álgebra finito dimensional com base $\{e_i\}_{i=1}^n$, em que

$$e_i e_j = \delta_{ij} e_i, \text{ para quaisquer } i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

É fácil vermos que $\sum_i e_i = 1_H$. Além disso, definimos

$$\begin{array}{rccc} \Delta: & H & \to & H\otimes H \\ & e_i & \mapsto & e_i\otimes e_i \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \varepsilon: & H & \to & k \\ & e_i & \mapsto & 1_k. \end{array}$$

Não é difícil ver que H é uma coálgebra. Mostremos que H é uma biálgebra fraca. Sejam $x, y, z \in H$. Então $x = \sum_i \alpha_i e_i$, $y = \sum_j \beta_j e_j$ e $z = \sum_l \gamma_l e_l$, em que $\alpha_{i's}$, $\beta_{j's}$, $\gamma_{l's} \in k$. Assim,

$$\begin{aligned} \Delta(xy) &= \textstyle\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j\Delta(e_i e_j) \\ &= \textstyle\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j\Delta(\delta_{ij} e_i) \\ &= \textstyle\sum_i\alpha_i\beta_i\Delta(e_i) \\ &= \textstyle\sum_i\alpha_i\beta_i(e_i\otimes e_i). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\Delta(x)\Delta(y) &= \textstyle\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j\Delta(e_i)\Delta(e_j)\\
&= \textstyle\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j(e_i\otimes e_i)(e_j\otimes e_j)\\
&= \textstyle\sum_{i,j}\alpha_i\beta_i(e_ie_j\otimes e_ie_j)\\
&= \textstyle\sum_{i,j}\alpha_i\beta_i(\delta_{ij}e_i\otimes \delta_{ij}e_i)\\
&= \textstyle\sum_{i}\alpha_i\beta_i(e_i\otimes e_i).
\end{aligned}$$

Portanto, $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$. Agora, como $\Delta(y) = \sum_j \beta_j(e_j\otimes e_j)$, temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon(xy_1)\varepsilon(y_2z) &= \textstyle\sum_{i,j,l}\alpha_i\beta_j\gamma_l\varepsilon(e_ie_j)\varepsilon(e_je_l)\\
&= \textstyle\sum_{i,j,l}\alpha_i\beta_j\gamma_l\varepsilon(\delta_{ij}e_i)\varepsilon(\delta_{jl}e_j)\\
&= \textstyle\sum_{i}\alpha_i\beta_i\gamma_i\varepsilon(e_i)\varepsilon(e_i)\\
&= \textstyle\sum_{i}\alpha_i\beta_i\gamma_i.
\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que $\varepsilon(xy_2)\varepsilon(y_1z) = \sum_i \alpha_i\beta_i\gamma_i$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(xyz) &= \textstyle\sum_{i,j,l}\alpha_i\beta_j\gamma_l\varepsilon(e_ie_je_l)\\
&= \textstyle\sum_{i,j,l}\alpha_i\beta_j\gamma_l\varepsilon(\delta_{ij}e_ie_l)\\
&= \textstyle\sum_{i,l}\alpha_i\beta_i\gamma_l\varepsilon(e_ie_l)\\
&= \textstyle\sum_{i,l}\alpha_i\beta_i\gamma_l\varepsilon(\delta_{il}e_i)\\
&= \textstyle\sum_{i}\alpha_i\beta_i\gamma_i.
\end{aligned}$$

Logo, $\varepsilon(xy_1)\varepsilon(y_2z) = \varepsilon(xyz) = \varepsilon(xy_2)\varepsilon(y_1z)$. Notemos que $\Delta^2(1_H) = \sum_i e_i\otimes e_i\otimes e_i$. Além disso

$$\begin{aligned}
(1_H\otimes\Delta(1_H))(\Delta(1_H)\otimes 1_H) &= \textstyle\sum_{i,j,i',j'}(e_i\otimes e_j\otimes e_j)(e_{i'}\otimes e_{i'}\otimes e_{j'})\\
&= \textstyle\sum_{i,j,i',j'}(e_ie_{i'}\otimes e_je_{i'}\otimes e_je_{j'})\\
&= \textstyle\sum_{i,j,i',j'}(\delta_{ii'}e_i\otimes \delta_{ji'}e_j\otimes \delta_{jj'}e_j)\\
&= \textstyle\sum_{i}e_i\otimes e_i\otimes e_i.
\end{aligned}$$

Analogamente, $(\Delta(1_H)\otimes 1_H)(1_H\otimes\Delta(1_H)) = \sum_i e_i\otimes e_i\otimes e_i$.

Portanto, $(1_H\otimes\Delta(1_H))(\Delta(1_H)\otimes 1_H) = \Delta^2(1_H) = (\Delta(1_H)\otimes 1_H)(1_H\otimes\Delta(1_H))$. Logo, H é uma biálgebra fraca. Mas H não é uma biálgebra no sentido clássico, pois se $i\neq j$, então $\varepsilon(e_ie_j) = 0 \neq$

$1_k = 1_k 1_k = \varepsilon(e_i)\varepsilon(e_j)$.

Seja H uma biálgebra fraca. Sabemos, da literatura, que $H^* = Hom_k(H,k)$, o k-espaço vetorial dos funcionais lineares, é uma álgebra com o produto de convolução "$*$" e unidade ε (veja [6], Proposition 1.3.6), isto é, para quaisquer $f, g \in H^*$ e $x \in H$, temos

$$(f * g)(x) = f(x_1)g(x_2) \quad \text{e} \quad f * \varepsilon = f = \varepsilon * f.$$

Além disso, H^* é uma coálgebra com comultiplicação $\delta : H^* \to H^* \otimes H^*$ em que, para todo $f \in H^*$, $\delta(f) = f_1 \otimes f_2$ e a família finita (f_1, f_2) é univocamente determinada pela propriedade que $f(ab) = f_1(a)f_2(b)$, para quaisquer $a, b \in H$ (isto é, se $(g_j, t_j)_j$ é uma família finita em H^* tal que, para quaisquer $a, b \in H$, $f(ab) = \sum_j g_j(a)t_j(b)$, então $f_1 \otimes f_2 = \sum_j g_j \otimes t_j$), e counidade $E : H^* \to k$ definida por $E(f) = f(1_H)$.

Exemplo 1.8 Com a notação acima, H^* é uma biálgebra fraca. Resta mostrarmos o item (3) da Definição 1.1.

(i) Sejam $f, g \in H^*$ e $a, b \in H$. Mostremos que $\delta(f * g) = \delta(f)\delta(g)$. Para isso, provemos que $(f * g)(ab) = (f_1 * g_1)(a)(f_2 * g_2)(b)$. De fato,

$$\begin{aligned}
(f * g)(ab) &= f(a_1 b_1)g(a_2 b_2) \\
&= f_1(a_1)f_2(b_1)g_1(a_2)g_2(b_2) \\
&= f_1(a_1)g_1(a_2)f_2(b_1)g_2(b_2) \\
&= (f_1 * g_1)(a)(f_2 * g_2)(b).
\end{aligned}$$

Portanto, $\delta(f*g) = (f_1*g_1)\otimes(f_2*g_2) = (f_1\otimes f_2)(g_1\otimes g_2) = \delta(f)\delta(g)$.

(ii) Sejam $f, g, p \in H^*$. Precisamos mostrar que $E(f * g_1)E(g_2 * p) = E(f * g * p) = E(f * g_2)E(g_1 * p)$. Para isso, notemos que, por um lado

$$\begin{aligned}
E(f * g * p) &= (f * g * p)(1_H) \\
&= (f * g)(1_1)p(1_2) \\
&= f(1_{1_1})g(1_{1_2})p(1_2) \\
&= f(1_1)g(1_2)p(1_3).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$E(f * g_1)E(g_2 * p) = (f * g_1)(1_H)(g_2 * p)(1_H)$$

$$
\begin{aligned}
&= f(1_1)g_1(1_2)g_2(1_{1'})p(1_{2'}) \\
&= f(1_1)g(1_2 1_{1'})p(1_{2'}) \\
&= f(1_1)g(1_2)p(1_3).
\end{aligned}
$$

A última igualdade é justificada pela Observação 1.3, uma vez que H é uma biálgebra fraca. Analogamente, utilizando a mesma observação, justificamos a igualdade

$$
\begin{aligned}
E(f * g_2)E(g_1 * p) &= (f * g_2)(1_H)(g_1 * p)(1_H) \\
&= f(1_{1'})g_2(1_{2'})g_1(1_1)p(1_2) \\
&= f(1_{1'})g(1_1 1_{2'})p(1_2) \\
&= f(1_1)g(1_2)p(1_3).
\end{aligned}
$$

Portanto, $E(f * g_1)E(g_2 * p) = E(f * g * p) = E(f * g_2)E(g_1 * p)$.

(iii) Mostremos que $(\varepsilon \otimes \delta(\varepsilon))(\delta(\varepsilon) \otimes \varepsilon) = \delta^2(\varepsilon) = (\delta(\varepsilon) \otimes \varepsilon)(\varepsilon \otimes \delta(\varepsilon))$, uma vez que $1_{H^*} = \varepsilon$. Notemos que

$$
\begin{aligned}
\delta^2(\varepsilon) &= ((\delta \otimes I)\delta)(\varepsilon) \\
&= (\delta \otimes I)(\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2) \\
&= \varepsilon_{1_1} \otimes \varepsilon_{1_2} \otimes \varepsilon_2 \\
&= \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2 \otimes \varepsilon_3 \\
&= \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_{2_1} \otimes \varepsilon_{2_2} \\
&= ((I \otimes \delta)\delta)(\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Para quaisquer $a, b, c \in H$, segue que

$$
\begin{aligned}
\delta^2(\varepsilon)(a \otimes b \otimes c) &= \varepsilon_{1_1}(a)\varepsilon_{1_2}(b)\varepsilon_2(c) \\
&= \varepsilon_1(ab)\varepsilon_2(c) \\
&= \varepsilon(abc) \\
&\overset{(\star)}{=} \varepsilon(ab_1)\varepsilon(b_2c) \\
&= \varepsilon_1(a)\varepsilon_2(b_1)\varepsilon_{1'}(b_2)\varepsilon_{2'}(c) \\
&= \varepsilon_1(a)(\varepsilon_2 * \varepsilon_{1'})(b)\varepsilon_{2'}(c) \\
&= (\varepsilon_1 \otimes (\varepsilon_2 * \varepsilon_{1'}) \otimes \varepsilon_{2'})(a \otimes b \otimes c) \\
&= (\delta(\varepsilon) \otimes \varepsilon)(\varepsilon \otimes \delta(\varepsilon))(a \otimes b \otimes c).
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\delta^2(\varepsilon)(a \otimes b \otimes c) &= \varepsilon_1(a)\varepsilon_{2_1}(b)\varepsilon_{2_2}(c) \\
&= \varepsilon_1(a)\varepsilon_2(bc) \\
&= \varepsilon(abc) \\
&\overset{(\star)}{=} \varepsilon(ab_2)\varepsilon(b_1c) \\
&= \varepsilon_{1'}(a)\varepsilon_{2'}(b_2)\varepsilon_1(b_1)\varepsilon_2(c) \\
&= \varepsilon_{1'}(a)(\varepsilon_1 * \varepsilon_{2'})(b)\varepsilon_2(c) \\
&= (\varepsilon_{1'} \otimes (\varepsilon_1 * \varepsilon_{2'}) \otimes \varepsilon_2)(a \otimes b \otimes c) \\
&= (\varepsilon \otimes \delta(\varepsilon))(\delta(\varepsilon) \otimes \varepsilon)(a \otimes b \otimes c).
\end{aligned}$$

As igualdades $(\star)$ acima são devidas à propriedade (3)(ii) da Definição 1.1, uma vez que H é uma biálgebra fraca. Propositalmente, omitimos os isomorfismos entre $H^* \otimes H^* \otimes H^*$ e $(H \otimes H \otimes H)^*$ e entre $k \otimes k \otimes k$ e k. Logo, H^* é uma biálgebra fraca.

1.1.2 Propriedades

Seja H uma biálgebra fraca. Podemos definir, através da counidade, duas aplicações k-lineares de H em H da seguinte forma

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon_t : & H & \to & H \\ & x & \mapsto & \varepsilon(1_1x)1_2 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \varepsilon_s : & H & \to & H \\ & y & \mapsto & 1_1\varepsilon(y1_2). \end{array}$$

Não é difícil ver que ε_t e ε_s são k-lineares, uma vez que ε o é, as mesmas são chamadas funções alvo (*target*) e fonte (*source*), respectivamente, daí a notação ε_t e ε_s. Assim, surgem dois subespaços de H, a saber $H_t = \varepsilon_t(H)$ e $H_s = \varepsilon_s(H)$.

Observação 1.9 Com as notações acima, para quaisquer $x, z \in H$, as seguintes relações são verdadeiras

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t(\varepsilon_t(x)) &= \varepsilon_t(x) \\
\varepsilon_s(\varepsilon_s(x)) &= \varepsilon_s(x) \\
\varepsilon(x\varepsilon_t(z)) &= \varepsilon(xz) \\
\varepsilon(\varepsilon_s(x)z) &= \varepsilon(xz).
\end{aligned}$$

As duas primeiras igualdades nos dizem que ε_t e ε_s são elementos idempotentes na k-álgebra $End_k(H)$, a álgebra dos operadores k-

lineares de H.

De fato, para provarmos que $\varepsilon_t(\varepsilon_t(x)) = \varepsilon_t(x)$, basta utilizarmos o item (3) da Definição 1.1 e as definições de ε_t e ε_s. Para todo $x \in H$, temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t(\varepsilon_t(x)) &= \varepsilon_t(\varepsilon(1_1x)1_2) = \varepsilon(1_1x)\varepsilon_t(1_2) \\
&= \varepsilon(1_1x)\varepsilon(1_{1'}1_2)1_{2'} = \varepsilon(1_{1'}1_2)\varepsilon(1_1x)1_{2'} \\
&= \varepsilon(1_{1'}x)1_{2'} = \varepsilon_t(x).
\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que $\varepsilon_s(\varepsilon_s(x)) = \varepsilon_s(x)$. Agora, para mostrarmos que $\varepsilon(x\varepsilon_t(z)) = \varepsilon(xz)$ basta substituirmos $y = 1_H$ em (3)(ii) da Definição 1.1. Assim,

$$\varepsilon(x\varepsilon_t(z)) = \varepsilon(x\varepsilon(1_1z)1_2) = \varepsilon(x1_2)\varepsilon(1_1z) = \varepsilon(xz).$$

Analogamente, mostra-se $\varepsilon(\varepsilon_s(x)z) = \varepsilon(xz)$. Concluímos que, para quaisquer $x \in H_t$ e $y \in H_s$,

$$x = \varepsilon_t(x) \quad \text{e} \quad y = \varepsilon_s(y).$$

Proposição 1.10 *Seja H uma biálgebra fraca. Então $\Delta(1_H) \in H_s \otimes H_t$.*

Demonstração: Notemos que

$$\begin{aligned}
(id \otimes \varepsilon_t)\Delta(1_H) &= 1_{1'} \otimes \varepsilon_t(1_{2'}) = 1_{1'} \otimes \varepsilon(1_1 1_{2'})1_2 \\
&= 1_1 \otimes \varepsilon(1_2)1_3 = 1_1 \otimes 1_2 = \Delta(1_H).
\end{aligned}$$

Portanto, $\Delta(1_H) \in H \otimes H_t$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_s \otimes id)\Delta(1_H) &= \varepsilon_s(1_1) \otimes 1_2 = 1_{1'}\varepsilon(1_1 1_{2'}) \otimes 1_2 \\
&= 1_1\varepsilon(1_2) \otimes 1_3 = 1_1 \otimes 1_2 = \Delta(1_H).
\end{aligned}$$

Logo, $\Delta(1_H) \in H_s \otimes H$. Portanto,

$$\Delta(1_H) \in (H_s \otimes H) \cap (H \otimes H_t) = H_s \otimes H_t.$$

A última igualdade segue de ([6], Lemma 1.4.5). ■

Para apresentarmos o próximo lema, lembremos que dados dois k-espaços vetoriais V e W, uma forma k-bilinear $b : V \times W \to k$ é dita não-degenerada à esquerda (à direita) se

$$b(x, y) = 0, \text{ para todo } x \in V \text{ (para todo } y \in W) \text{ implica } y = 0 \, (x = 0).$$

A forma k-bilinear b é dita não-degenerada se é não-degenerada à esquerda e à direita.

Lema 1.11 *A counidade ε em uma biálgebra fraca H define uma forma k-bilinear não-degenerada*

$$\begin{array}{rccc} b: & H_t \times H_s & \to & k \\ & (x, y) & \mapsto & \varepsilon(yx). \end{array}$$

Demonstração: Seja $x \in H_t$. Suponhamos que $b(x, y) = \varepsilon(yx) = 0$, para todo $y \in H_s$. Como $x \in H_t$, temos

$$x = \varepsilon_t(x) = \varepsilon(1_1 x) 1_2 = 0$$

em que a última igualdade segue do fato de que $\Delta(1_H) \in H_s \otimes H_t$ e de que $\varepsilon(yx) = 0$, para todo $y \in H_s$.

Analogamente, suponhamos que $b(x, y) = \varepsilon(yx) = 0$, para todo $x \in H_t$. Como $y \in H_s$, temos

$$y = \varepsilon_s(y) = 1_1 \varepsilon_s(y 1_2) = 0,$$

pois $\Delta(1_H) \in H_s \otimes H_t$ e, por hipótese, $\varepsilon(yx) = 0$, para todo $x \in H_t$. Portanto, o resultado procede. ■

Corolário 1.12 *Seja H uma biálgebra fraca. Então H_t e H_s são isomorfos como k-espaços vetoriais.*

Demonstração: Consideremos $(H_s)^* = Hom_k(H_s, k)$. Definimos $\phi : H_t \to (H_s)^*$ por $\phi(z)(y) = \varepsilon(yz)$, para todo $y \in H_s$. Claramente, ϕ é k-linear (pois ε o é) e, pelo Lema 1.11, é injetora. Logo,

$$dim(H_t) = dim(Im\phi) \leq dim((H_s)^*) = dim(H_s).$$

Agora, considerando $(H_t)^* = Hom_k(H_t, k)$, seja $\psi : H_s \to (H_t)^*$ definida por $\psi(y)(z) = \varepsilon(yz)$, para todo $z \in H_t$. Pelas mesmas razões do dito acima, ψ é k-linear e injetora. Assim,

$$dim(H_s) = dim(Im\psi) \leq dim((H_t)^*) = dim(H_t).$$

Donde concluímos que H_t e H_s são isomorfos como k-espaços vetoriais. ■

Agora, caracterizamos a comultiplicação dos elementos pertencentes aos k-espaços vetoriais H_t e H_s. No entanto, anteriormente a isso, para quaisquer $x, y \in H$, notemos que

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t(x\varepsilon_t(y)) &= \varepsilon(1_1 x\varepsilon_t(y))1_2 \\
&= \varepsilon((1_1 x)\varepsilon_t(y))1_2 \\
&= \varepsilon(1_1 xy)1_2 && \text{por (4.5)} \\
&= \varepsilon_t(xy)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\varepsilon_s(\varepsilon_s(x)y) &= 1_1\varepsilon(\varepsilon_s(x)y1_2) \\
&= 1_1\varepsilon(\varepsilon_s(x)(y1_2)) \\
&= 1_1\varepsilon(xy1_2) && \text{por (4.6)} \\
&= \varepsilon_s(xy).
\end{aligned}$$

Proposição 1.13 *Sejam $z \in H_t$ e $y \in H_s$. Então $\Delta(z) = 1_1 z \otimes 1_2$ e $\Delta(y) = 1_1 \otimes y1_2$.*

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned}
\Delta(z) &= \Delta(\varepsilon_t(z)) \\
&= \Delta(\varepsilon(1_1 z)1_2) \\
&= \varepsilon(1_1 z)\Delta(1_2) \\
&= \varepsilon(1_1 z)1_2 \otimes 1_3 \\
&= \varepsilon(1_{1'} z)1_1 1_{2'} \otimes 1_2 \\
&= 1_1\varepsilon_t(z) \otimes 1_2 = 1_1 z \otimes 1_2.
\end{aligned}$$

Assim, podemos notar que $\Delta(H_t) \subseteq H \otimes H_t$. Para todo $y \in H_s$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta(y) &= \Delta(\varepsilon_s(y)) \\
&= \Delta(1_1\varepsilon(y1_2)) \\
&= \Delta(1_1)\varepsilon(y1_2) \\
&= 1_1 \otimes \varepsilon(y1_3)1_2 \\
&= 1_{1'} \otimes \varepsilon(y1_2)1_1 1_{2'} \\
&= 1_{1'} \otimes \varepsilon_s(y)1_{2'}
\end{aligned}$$

$$= 1_{1'} \otimes y1_{2'} = 1_1 \otimes y1_2.$$

Igualmente, notemos que $\Delta(H_s) \subseteq H_s \otimes H$. ■

Lema 1.14 *Para todo $x \in H$, vale que $x_1 \otimes \varepsilon_t(x_2) = 1_1 x \otimes 1_2$ e que $\varepsilon_s(x_1) \otimes x_2 = 1_1 \otimes x1_2$.*

Demonstração: Sabemos que $x_1 \otimes x_2 = 1_1 x_1 \otimes 1_2 x_2$. Usando essa relação, a definição de ε_t e o fato de H ser biálgebra fraca, obtemos

$$\begin{aligned} x_1 \otimes \varepsilon_t(x_2) &= x_1 \otimes \varepsilon(1_1 x_2) 1_2 \\ &= 1_{1'} x_1 \varepsilon(1_1 1_{2'} x_2) \otimes 1_2 \\ &= 1_1 x_1 \varepsilon(1_2 x_2) \otimes 1_3 \\ &= (1_1 x)_1 \varepsilon((1_1 x)_2) \otimes 1_2 \\ &= 1_1 x \otimes 1_2. \end{aligned}$$

Analogamente, $x_1 \otimes x_2 = x_1 1_1 \otimes x_2 1_2$ e com a mesma argumentação acima, segue que

$$\begin{aligned} \varepsilon_s(x_1) \otimes x_2 &= 1_{1'} \varepsilon(x_1 1_{2'}) \otimes x_2 \\ &= 1_{1'} \otimes \varepsilon(x_1 1_1 1_{2'}) x_2 1_2 \\ &= 1_1 \otimes \varepsilon(x_1 1_2) x_2 1_3 \\ &= 1_1 \otimes \varepsilon((x1_2)_1)(x1_2)_2 \\ &= 1_1 \otimes x1_2. \end{aligned}$$

■

Corolário 1.15 *Para quaisquer $x, y \in H$, são válidas*

$$x\varepsilon_t(y) = \varepsilon(x_1 y) x_2 \ \text{ e } \ \varepsilon_s(x) y = \varepsilon(x y_2) y_1.$$

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned} x\varepsilon_t(y) &= \varepsilon(x_1) x_2 \varepsilon(1_1 y) 1_2 \\ &= \varepsilon(x_1) \varepsilon(1_1 y) x_2 1_2 \\ &= \varepsilon(x_1) \varepsilon(\varepsilon_s(x_{2_1}) y) x_{2_2} && \text{por (4.13)} \\ &= \varepsilon(x_1) \varepsilon(\varepsilon_s(x_2) y) x_3 \\ &= \varepsilon(\varepsilon_s(\varepsilon(x_1) x_2) y) x_3 \\ &= \varepsilon(\varepsilon_s(x_1) y) x_2 \\ &= \varepsilon(x_1 y) x_2 && \text{por (4.6).} \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_s(x)y &= 1_1\varepsilon(x1_2)y_1\varepsilon(y_2) \\
&= \varepsilon(x1_2)\varepsilon(y_2)1_1y_1 \\
&= \varepsilon(x\varepsilon_t(y_{1_2}))\varepsilon(y_2)y_{1_1} && \text{por (4.12)} \\
&= \varepsilon(x\varepsilon_t(y_2))\varepsilon(y_3)y_1 \\
&= \varepsilon(x\varepsilon_t(y_2\varepsilon(y_3)))y_1 \\
&= \varepsilon(x\varepsilon_t(y_2))y_1 \\
&= \varepsilon(xy_2)y_1 && \text{por (4.6).}
\end{aligned}$$

■

A próxima proposição é de fundamental importância, pois além de mostrar que H_t e H_s são subálgebras unitárias de H, mostra também que os elementos de H_t e H_s comutam entre si.

Proposição 1.16 *Os k-espaços vetoriais H_t e H_s são subálgebras de H contendo 1_H tais que $xy = yx$, para quaisquer $x \in H_t$ e $y \in H_s$.*

Demonstração: Segue do Lema 1.14 que

$$1_{1'} \otimes \varepsilon_t(1_{2'}) \otimes 1_{3'} = 1_{1'_1} \otimes \varepsilon_t(1_{1'_2}) \otimes 1_{2'} = 1_1 1_{1'} \otimes 1_2 \otimes 1_{2'}$$

e

$$1_1 \otimes \varepsilon_s(1_2) \otimes 1_3 = 1_1 \otimes \varepsilon_s(1_{2_1}) \otimes 1_{2_2} = 1_1 \otimes 1_{1'} \otimes 1_2 1_{2'}.$$

Tendo essas igualdades, mostremos primeiramente que H_t é fechado em relação à multiplicação. Sejam $x, y \in H_t$. Então

$$\begin{aligned}
xy &= \varepsilon_t(x)\varepsilon_t(y) \\
&= \varepsilon(1_1x)1_2\varepsilon(1_{1'}y)1_{2'} \\
&= \varepsilon(1_1x)\varepsilon(1_{1'}y)1_2 1_{2'} \\
&= \varepsilon(1_1x)\varepsilon(\varepsilon_s(1_2)y)1_3 && \text{por (4.13)} \\
&= \varepsilon(1_1x)\varepsilon(1_2y)1_3 && \text{por (4.6).}
\end{aligned}$$

Sabemos que $\Delta(1_H) \in H_s \otimes H_t$ e que $\Delta(H_t) \subseteq H \otimes H_t$ e portanto,

$$\Delta^2(1_H) = 1_1 \otimes 1_2 \otimes 1_3 = 1_1 \otimes \Delta(1_2) \in H_s \otimes H \otimes H_t.$$

Logo, $xy = \varepsilon(1_1x)\varepsilon(1_2y)1_3 \in H_t$. Mostremos que H_s é também fechado em relação à multiplicação. Sejam $z, h \in H_s$. Então

$$\begin{aligned} hz &= \varepsilon_s(h)\varepsilon_s(z) \\ &= 1_1\varepsilon(h1_2)1_{1'}\varepsilon(z1_{2'}) \\ &= 1_1 1_{1'}\varepsilon(h1_2)\varepsilon(z1_{2'}) \\ &= 1_{1'}\varepsilon(h\varepsilon_t(1_{2'}))\varepsilon(z1_{3'}) \\ &= 1_{1'}\varepsilon(h1_{2'})\varepsilon(z1_{3'}) && \text{por (4.5)} \end{aligned}$$

e como $\Delta^2(1_H) \in H_s \otimes H \otimes H_t$, segue que $hz = 1_{1'}\varepsilon(h1_{2'})\varepsilon(z1_{3'}) \in H_s$.

Agora, notemos que $\varepsilon_t(1_H) = \varepsilon(1_1 1_H)1_2 = 1_H = 1_1\varepsilon(1_H 1_2) = \varepsilon_s(1_H)$. Logo, $1_H \in H_t \cap H_s$.

Finalmente, sejam $x \in H_t$ e $z \in H_s$. Então

$$\begin{aligned} xz &= \varepsilon_t(x)\varepsilon_s(z) \\ &= \varepsilon(1_1 x)1_2 1_{1'}\varepsilon(z1_{2'}) \\ &= \varepsilon(1_{1'}x)1_1 1_{2'}\varepsilon(z1_2) \\ &= 1_1\varepsilon(z1_2)\varepsilon(1_{1'}x)1_{2'} \\ &= \varepsilon_s(z)\varepsilon_t(x) = zx. \end{aligned}$$

■

Podemos escrever as subálgebras H_t e H_s de H como sendo

$$H_t = \{x \in H : \varepsilon_t(x) = x\} = \{x \in H : \Delta(x) = 1_1 x \otimes 1_2 = x1_1 \otimes 1_2\}$$

e

$$H_s = \{x \in H : \varepsilon_s(x) = x\} = \{x \in H : \Delta(x) = 1_1 \otimes x1_2 = 1_1 \otimes 1_2 x\}.$$

Não é difícil vermos, através de algumas contas, que no caso do Exemplo 1.6 temos

$$(kG)_t = span\{u_{r(g)} : g \in G\} = (kG)_s$$

e, que no caso do Exemplo 1.7, temos

$$H_t = H = H_s.$$

O lema abaixo nos diz que se considerarmos H_t e H como H_t-módulos à esquerda então ε_t é um morfismo de H_t-módulos à esquerda. Analogamente, se considerarmos H_s e H como H_s-módulos à direita então ε_s é um morfismo de H_s-módulos à direita.

Lema 1.17 *Seja H uma biálgebra fraca. Então, para quaisquer $x, y \in H$, temos*

$$\begin{aligned}\varepsilon_t(\varepsilon_t(x)y) &= \varepsilon_t(x)\varepsilon_t(y)\\ \varepsilon_s(x\varepsilon_s(y)) &= \varepsilon_s(x)\varepsilon_s(y).\end{aligned}$$

Demonstração: Sejam $x, y \in H$. Então

$$\begin{aligned}\varepsilon_t(\varepsilon_t(x)y) &= \varepsilon(1_1\varepsilon_t(x)y)1_2 & \\ &= \varepsilon(1_1\varepsilon_t(x)\varepsilon_t(y))1_2 & \text{por } (4.5)\\ &= \varepsilon((\varepsilon_t(x))_1\varepsilon_t(y))(\varepsilon_t(x))_2 & \text{por } (4.10)\\ &= \varepsilon_t(x)\varepsilon_t(\varepsilon_t(y)) & \text{por } (4.14)\\ &= \varepsilon_t(x)\varepsilon_t(y) & \text{por } (4.3).\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\varepsilon_s(x\varepsilon_s(y)) &= 1_1\varepsilon(x\varepsilon_s(y)1_2) & \\ &= 1_1\varepsilon(\varepsilon_s(x)\varepsilon_s(y)1_2) & \text{por } (4.6)\\ &= (\varepsilon_s(y))_1\varepsilon(\varepsilon_s(x)(\varepsilon_s(y))_2) & \text{por } (4.11)\\ &= \varepsilon_s(\varepsilon_s(x))\varepsilon_s(y) & \text{por } (4.15)\\ &= \varepsilon_s(x)\varepsilon_s(y) & \text{por } (4.4).\end{aligned}$$

■

Sabendo que H^* possui uma estrutura de biálgebra fraca, temos

$$H_t^* = E_t(H^*) \text{ e } H_s^* = E_s(H^*)$$

as subálgebras canônicas de H^* que contêm ε.

Nosso objetivo agora é estabelecer um isomorfismo entre subálgebras canônicas H_t e H_s de H e as subálgebras canônicas H_s^* e H_t^* de H^*.

É conhecido na literatura ([6], p. 78) que H torna-se um H^*-módulo à esquerda e à direita com as respectivas ações

$$f \rightharpoonup x = f(x_2)x_1 \text{ e } x \leftharpoonup f = f(x_1)x_2, \text{ para quaisquer } x \in H \text{ e } f \in H^*,$$

em que $\Delta(x) = x_1 \otimes x_2$.

Além disso, é também conhecido na literatura, por exemplo, ([3], p. 394) que H^* torna-se um H-módulo à esquerda e à direita com as respectivas ações

$$x \rightharpoonup f = f_2(x)f_1 \text{ e } f \leftharpoonup x = f_1(x)f_2, \text{ para quaisquer } x \in H \text{ e } f \in H^*,$$

em que $\delta(f) = f_1 \otimes f_2$.

Tendo em mente as notações apresentadas no Exemplo 1.8, observemos que $E_t(f) = E(\varepsilon_1 * f)\varepsilon_2$ e $E_s(f) = \varepsilon_1 E(f * \varepsilon_2)$, para todo $f \in H^*$. Assim, para quaisquer $x \in H$ e $f \in H^*$, temos

$$\begin{aligned}
E_t(f)(x) &= (E(\varepsilon_1 * f)\varepsilon_2)(x) \\
&= (\varepsilon_1 * f)(1_H)\varepsilon_2(x) \\
&= \varepsilon_1(1_1)f(1_2)\varepsilon_2(x) \\
&= \varepsilon(1_1 x)f(1_2) \\
&= f(\varepsilon(1_1 x)1_2) \\
&= f(\varepsilon_t(x))
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
E_s(f)(x) &= (\varepsilon_1 E(f * \varepsilon_2))(x) \\
&= \varepsilon_1(x)(f * \varepsilon_2)(1_H) \\
&= \varepsilon_1(x)f(1_1)\varepsilon_2(1_2) \\
&= \varepsilon(x1_2)f(1_1) \\
&= f(1_1\varepsilon(x1_2)) \\
&= f(\varepsilon_s(x))
\end{aligned}$$

isto é, acabamos de verificar que para qualquer $f \in H^*$, $E_t(f) = f\varepsilon_t$ e $E_s(f) = f\varepsilon_s$.

Proposição 1.18 *As seguintes aplicações são isomorfismos de álgebras*

$$\begin{array}{rccc} \kappa_H^t: & H_t & \to & H_s^* \\ & z & \mapsto & z \rightharpoonup \varepsilon \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \kappa_H^s: & H_s & \to & H_t^* \\ & x & \mapsto & \varepsilon \leftharpoonup x. \end{array}$$

Demonstração: É pertinente notarmos que κ_H^t e κ_H^s são naturalmente k-lineares, uma vez que são definidas a partir de ações que fornecem uma estrutura de H-módulo em H^*. Além disso, $\kappa_H^t(H_t) \subseteq H_s^*$ e $\kappa_H^s(H_s) \subseteq H_t^*$, pois sendo H^* uma álgebra de Hopf fraca, temos, por (4.7), que $\delta(\varepsilon) = \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2 \in H_s^* \otimes H_t^*$. Sejam $x, y \in H_t$. Então

$$\kappa_H^t(x) * \kappa_H^t(y) = (x \rightharpoonup \varepsilon) * (y \rightharpoonup \varepsilon)$$

$$
\begin{aligned}
&= (\varepsilon_2(x)\varepsilon_1) * (\varepsilon_{2'}(y)\varepsilon_{1'}) \\
&= (\varepsilon_1 * \varepsilon_{1'})\varepsilon_2(x)\varepsilon_{2'}(y) \\
&= \varepsilon_{1'} E_t(\varepsilon_{2'})(x)\varepsilon_{3'}(y) && \text{por (4.17)} \\
&= \varepsilon_{1'}(E(\varepsilon_1 * \varepsilon_{2'})\varepsilon_2(x))\varepsilon_{3'}(y) \\
&= \varepsilon_{1'}(\varepsilon_1 * \varepsilon_{2'})(1_H)\varepsilon_2(x)\varepsilon_{3'}(y) \\
&= \varepsilon_{1'}\varepsilon_1(1_1)\varepsilon_{2'}(1_2)\varepsilon_2(x)\varepsilon_{3'}(y) \\
&= \varepsilon_{1'}\varepsilon_{2'}(\varepsilon_1(1_1)\varepsilon_2(x)1_2)\varepsilon_{3'}(y) \\
&= \varepsilon_{1'}\varepsilon_{2'}(\varepsilon(1_1x)1_2)\varepsilon_{3'}(y) \\
&= \varepsilon_{1'}\varepsilon_{2'}(\varepsilon_t(x))\varepsilon_{3'}(y) \\
&= \varepsilon_{1'}\varepsilon_{2'_1}(\varepsilon_t(x))\varepsilon_{2'_2}(y) \\
&= \varepsilon_{1'}\varepsilon_{2'}(xy) && (x \in H_t) \\
&= xy \rightharpoonup \varepsilon = \kappa_H^t(xy).
\end{aligned}
$$

Sejam $z, h \in H_s$. Então

$$
\begin{aligned}
\kappa_H^s(z) * \kappa_H^s(h) &= (\varepsilon \leftharpoonup z) * (\varepsilon \leftharpoonup h) \\
&= (\varepsilon_1(z)\varepsilon_2) * (\varepsilon_{1'}(h)\varepsilon_{2'}) \\
&= \varepsilon_1(z)(\varepsilon_2 * \varepsilon_{2'})\varepsilon_{1'}(h) \\
&= \varepsilon_1(z)E_s(\varepsilon_2)(h)\varepsilon_3 && \text{por (4.18)} \\
&= \varepsilon_1(z)E(\varepsilon_2 * \varepsilon_{2'})\varepsilon_{1'}(h)\varepsilon_3 \\
&= \varepsilon_1(z)\varepsilon_2(1_1)\varepsilon_{2'}(1_2)\varepsilon_{1'}(h)\varepsilon_3 \\
&= \varepsilon_1(z)\varepsilon_2(1_1\varepsilon(h1_2))\varepsilon_3 \\
&= \varepsilon_1(z)\varepsilon_2(\varepsilon_s(h))\varepsilon_3 \\
&= \varepsilon_{1_1}(z)\varepsilon_{1_2}(\varepsilon_s(h))\varepsilon_2 \\
&= \varepsilon_1(zh)\varepsilon_2 && (h \in H_s) \\
&= \varepsilon \leftharpoonup zh = \kappa_H^s(zh).
\end{aligned}
$$

Pelo que acabamos de mostrar e notando que $\kappa_H^t(1_H) = 1_H \rightharpoonup \varepsilon = \varepsilon$ e que $\kappa_H^s(1_H) = \varepsilon \leftharpoonup 1_H = \varepsilon$, concluímos que κ_H^t e κ_H^s são homomorfismos de álgebras.

Agora, definimos as funções

$$
\begin{array}{cccc}
\kappa_{H^*}^t : & H_t^* & \to & H_s \\
& f & \mapsto & f \rightharpoonup 1_H
\end{array}
\quad \text{e} \quad
\begin{array}{cccc}
\kappa_{H^*}^s : & H_s^* & \to & H_t \\
& g & \mapsto & 1_H \leftharpoonup g
\end{array}
$$

que claramente estão bem definidas, pois $\Delta(1_H) = 1_1 \otimes 1_2 \in H_s \otimes H_t$.

Para todo $z \in H_t$ e para todo $x \in H_s$, temos

$$\begin{aligned}
\kappa^s_{H^*}(\kappa^t_H(z)) &= \kappa^s_{H^*}(z \rightharpoonup \varepsilon) \\
&= 1_H \leftharpoonup (z \rightharpoonup \varepsilon) \\
&= (z \rightharpoonup \varepsilon)(1_1)1_2 \\
&= \varepsilon_1(1_1)\varepsilon_2(z)1_2 \\
&= \varepsilon(1_1 z)1_2 \\
&= \varepsilon_t(z) = z
\end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned}
\kappa^t_{H^*}(\kappa^s_H(x)) &= \kappa^t_{H^*}(\varepsilon \leftharpoonup x) \\
&= (\varepsilon \leftharpoonup x) \rightharpoonup 1_H \\
&= 1_1(\varepsilon \leftharpoonup x)(1_2) \\
&= 1_1\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(1_2) \\
&= 1_1\varepsilon(x1_2) \\
&= \varepsilon_s(x) = x.
\end{aligned}$$

Finalmente, sejam $g \in H_s^*$ e $x \in H$. Então

$$\begin{aligned}
(\kappa^t_H(\kappa^s_{H^*}(g)))(x) &= (\kappa^s_{H^*}(g) \rightharpoonup \varepsilon)(x) \\
&= ((1_H \leftharpoonup g) \rightharpoonup \varepsilon)(x) \\
&= \varepsilon_2(1_H \leftharpoonup g)\varepsilon_1(x) \\
&= \varepsilon_2(g(1_1)1_2)\varepsilon_1(x) \\
&= g(1_1)\varepsilon_2(1_2)\varepsilon_1(x) \\
&= g(1_1)\varepsilon(x1_2) \\
&= g(\varepsilon_s(x)) \\
&= E_s(g)(x) && \text{por } (4.26) \\
&= g(x) && (g \in H_s^*)
\end{aligned}$$

e assim, $\kappa^t_H(\kappa^s_{H^*}(g)) = g$. Portanto, κ^t_H é um isomorfismo de álgebras. Além disso, dado $f \in H_t^*$, temos

$$\begin{aligned}
(\kappa^s_H(\kappa^t_{H^*}(f)))(x) &= (\varepsilon \leftharpoonup \kappa^t_{H^*}(f))(x) \\
&= (\varepsilon \leftharpoonup (f \rightharpoonup 1_H))(x) \\
&= \varepsilon_1(f \rightharpoonup 1_H)\varepsilon_2(x) \\
&= \varepsilon_1(f(1_2)1_1)\varepsilon_2(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f(1_2)\varepsilon_1(1_1)\varepsilon_2(x) \\
&= f(1_2)\varepsilon(1_1x) \\
&= f(\varepsilon_t(x)) \\
&= E_t(f)(x) && \text{por (4.25)} \\
&= f(x) && (f \in H_t^*)
\end{aligned}
$$

e isso nos diz que $\kappa_H^s(\kappa_{H^*}^t(f)) = f$. Logo, κ_H^s é um isomorfismo de álgebras. ■

1.2 Álgebras de Hopf fracas

Nesta seção, definimos uma álgebra de Hopf fraca H, também chamada de grupóide quântico finito. Mostramos como a existência de uma antípoda se relaciona com ε_t, H_t, ε_s e H_s. Garantimos a invertibilidade da antípoda em H e mostramos que H_t e H_s são subálgebras de H que são separáveis. Além disso, finalizamos a seção com condições equivalentes para sabermos quando uma álgebra de Hopf fraca será uma álgebra de Hopf no sentido clássico.

Definição 1.19 *Seja H uma biálgebra fraca. Dizemos que H é uma álgebra de Hopf fraca (ou grupóide quântico finito) se existe uma função k-linear $S : H \to H$, chamada antípoda que satisfaz, para todo $h \in H$,*

(i) $h_1S(h_2) = \varepsilon(1_1h)1_2 = \varepsilon_t(h)$;

(ii) $S(h_1)h_2 = 1_1\varepsilon(h1_2) = \varepsilon_s(h)$;

(iii) $S(h_1)h_2S(h_3) = S(h)$.

Seja G um grupóide finito. A fim de fornecermos um exemplo para a definição dada, lembremos da estrutura de biálgebra fraca dada em kG, conforme o Exemplo 1.6.

Exemplo 1.20 Definimos $S : kG \to kG$ dada por $S(u_g) = u_{g^{-1}}$, para todo $g \in G$. Notemos que S está bem definida, pois segundo a definição de grupóide (Definição 1.4), para todo $g \in G$ existe $g^{-1} \in G$ tal que $d(g) = g^{-1}g$ e $r(g) = gg^{-1}$.

Mostremos que S é uma antípoda para kG. Por construção, S é k-linear. Seja $g \in G$, como $\Delta(u_g) = u_g \otimes u_g$ e $\Delta(1_{kG}) = \sum\limits_{t \in G_0} u_t \otimes u_t$, temos que

$$\varepsilon_t(u_g) = \varepsilon(1_1u_g)1_2 = \sum_{t \in G_0} \varepsilon(u_tu_g)u_t,$$

mas como $u_t u_g \neq 0 \Leftrightarrow \exists tg$ e, nesse caso, $tg = g = r(g)g$. Pela unicidade de $r(g)$, segue que $t = r(g)$. Portanto, existe um único $t \in G_0$ tal que $u_t u_g \neq 0$, a saber $t = r(g)$. Logo,

$$\sum_{t \in G_0} \varepsilon(u_t u_g) u_t = \varepsilon(u_{r(g)} u_g) u_{r(g)} = u_{r(g)}.$$

Por outro lado, $u_g S(u_g) = u_g u_{g^{-1}} = u_{gg^{-1}} = u_{r(g)}$. Assim, o item (i) da Definição 1.19 está verificado.

Para verificarmos que S satisfaz o item (ii) da mesma definição, a análise a ser feita é semelhante à que acabamos de fazer, pois

$$\varepsilon_s(u_g) = 1_1 \varepsilon(u_g 1_2) = \sum_{t \in G_0} u_t \varepsilon(u_g u_t).$$

Analogamente ao acima, devemos ter que $t = d(g)$. Daí, existe um único $t \in G_0$ tal que $u_g u_t \neq 0$. Assim,

$$\sum_{t \in G_0} u_t \varepsilon(u_g u_t) = u_{d(g)} \varepsilon(u_g u_{d(g)}) = u_{d(g)}.$$

Por outro lado, $S(u_g) u_g = u_{g^{-1}} u_g = u_{g^{-1}g} = u_{d(g)}$. Resta mostrarmos o item (iii). Notemos que $\Delta^2(u_g) = u_g \otimes u_g \otimes u_g$. Assim,

$$\begin{aligned} S(u_g) u_g S(u_g) &= u_{g^{-1}} u_g u_{g^{-1}} = u_{g^{-1}(gg^{-1})} \\ &= u_{g^{-1} r(g)} = u_{g^{-1} d(g^{-1})} && \text{Lema 1.5 (iii)} \\ &= u_{g^{-1}} = S(u_g). \end{aligned}$$

Portanto, kG é uma álgebra de Hopf fraca.

Exemplo 1.21 Seja H uma álgebra finito dimensional com base $\{e_i\}_{i=1}^n$, em que

$$e_i e_j = \delta_{ij} e_i, \text{ para quaisquer } i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Lembremos que H possui uma estrutura de biálgebra fraca, dada no Exemplo 1.7. Tendo em mente tal estrutura, definimos

$$\begin{array}{rccc} S: & H & \to & H \\ & e_i & \mapsto & e_i. \end{array}$$

Seja $x \in H$. Então $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, daí $\Delta(x) = \sum_i \alpha_i (e_i \otimes e_i)$.

Assim,

$$\begin{aligned} x_1S(x_2) &= \textstyle\sum_i \alpha_i e_i S(e_i) \\ &= \textstyle\sum_i \alpha_i e_i e_i \\ &= \textstyle\sum_i \alpha_i e_i \\ &= \textstyle\sum_{i,j} \alpha_i \varepsilon(\delta_{ji} e_j) e_j \\ &= \textstyle\sum_j \varepsilon\left(e_j \sum_i \alpha_i e_i\right) e_j \\ &= \varepsilon(1_1 x)1_2 \end{aligned}$$

e de maneira análoga, $S(x_1)x_2 = 1_1\varepsilon(x1_2)$.

Finalmente, como $\Delta^2(x) = \sum_i \alpha_i e_i \otimes e_i \otimes e_i$. Então

$$\begin{aligned} S(x_1)x_2S(x_3) &= \textstyle\sum_i \alpha_i S(e_i) e_i S(e_i) \\ &= \textstyle\sum_i \alpha_i e_i e_i e_i \\ &= \textstyle\sum_i \alpha_i e_i = x = S(x). \end{aligned}$$

Portanto, H é uma álgebra de Hopf fraca.

Exemplo 1.22 Seja H uma álgebra de Hopf fraca com antípoda S. A estrutura de biálgebra fraca de H^* foi dada no Exemplo 1.8.

Definimos $S^* : H^* \to H^*$ por $S^*(f)(h) = f(S(h))$ para quaisquer $f \in H^*$ e $h \in H$. Claramente, para todo $f \in H^*$, $S^*(f) \in H^*$, pois f e S são k-lineares e S^* é obviamente k-linear. Mostremos que S^* é uma antípoda para H^*. Sejam $h \in H$ e $f \in H^*$. Então

$$\begin{aligned} (f_1 * S^*(f_2))(h) &= f_1(h_1)S^*(f_2)(h_2) \\ &= f_1(h_1)f_2(S(h_2)) \\ &= f(h_1S(h_2)) \\ &= f(\varepsilon_t(h)) \\ &= E_t(f)(h) && \text{por (4.25)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (S^*(f_1) * f_2)(h) &= S^*(f_1)(h_1)f_2(h_2) \\ &= f_1(S(h_1))f_2(h_2) \\ &= f(S(h_1)h_2) \\ &= f(\varepsilon_s(h)) \\ &= E_s(f)(h) && \text{por (4.26).} \end{aligned}$$

Logo, $f_1 * S^*(f_2) = E_t(f)$ e $S^*(f_1) * f_2 = E_s(f)$, isto é, acabamos de mostrar os itens (i) e (ii) da Definição 1.19 para S^*. Resta mostrarmos o item (iii). De fato, para todo $h \in H$

$$\begin{aligned}(S^*(f_1) * f_2 * S^*(f_3))(h) &= S^*(f_1)(h_1)f_2(h_2)S^*(f_3)(h_3)\\ &= f_1(S(h_1))f_2(h_2)f_3(S(h_3))\\ &= f(S(h_1)h_2S(h_3))\\ &= f(S(h))\\ &= S^*(f)(h).\end{aligned}$$

Portanto, $S^*(f_1) * f_2 * S^*(f_3) = S^*(f)$. Assim, H^* é uma álgebra de Hopf fraca.

Seja H uma álgebra de Hopf fraca. Sabemos que H é uma álgebra e, simultaneamente, uma coálgebra. Denotemos por H^a, H sob a ótica de sua estrutura de álgebra e por H^c, H sob a ótica de sua estrutura de coálgebra. É conhecido na literatura ([6], p. 151) que $Hom_k(H^c, H^a)$ é uma álgebra com o produto de convolução

$(f * g)(h) = f(h_1)g(h_2)$, para quaisquer $h \in H$ e $f, g \in Hom_k(H^c, H^a)$

e unidade $\mu\varepsilon$. Com essa notação, pela Definição 1.19 podemos concluir que

$$\begin{aligned}id * S &= \varepsilon_t\\ S * id &= \varepsilon_s\\ S * id * S &= S.\end{aligned}$$

No próximo resultado, garantimos que em uma álgebra de Hopf fraca a unidade, a counidade e a antípoda são únicas.

Proposição 1.23 *Seja H uma álgebra de Hopf fraca com unidade $u : k \to H$, counidade $\varepsilon : H \to k$ e antípoda $S : H \to H$. Suponhamos $u' : k \to H$, $\varepsilon' : H \to k$ e $S' : H \to H$ funções k-lineares que sejam outras unidade, counidade e antípoda para H, respectivamente. Então $u = u'$, $\varepsilon = \varepsilon'$ e $S = S'$.*

Demonstração: Primeiramente mostremos que $u = u'$. Seja $\alpha \in k$, então $u(\alpha) = \alpha u(1_k) = \alpha 1_H = \alpha u'(1_k) = u'(\alpha)$ e isso implica que $u = u'$.

Agora, mostremos a unicidade da counidade. Seja $h \in H$. Então $\varepsilon(h) = \varepsilon(\varepsilon'(h_1)h_2) = \varepsilon'(h_1)\varepsilon(h_2) = \varepsilon'(h_1\varepsilon(h_2)) = \varepsilon'(h)$ e daí, $\varepsilon = \varepsilon'$.

Observamos que, como $\varepsilon = \varepsilon'$, as aplicações ε_t e ε_s estão unicamente determinadas pela counidade. Portanto S' satisfaz as mesmas igualdades que S satisfaz, isto é, as igualdades (4.27), (4.28) e (4.29). Assim, segue que

$$\begin{aligned} S' &= S' * (id * S') = S' * \varepsilon_t \\ &= S' * (id * S) = (S' * id) * S \\ &= \varepsilon_s * S = (S * id) * S \\ &= S. \end{aligned}$$

■

No que segue, exibimos algumas propriedades relacionando a antípoda S com ε_t e ε_s. Seja $h \in H$. Então

$$\begin{aligned} \varepsilon_t(h) &= \varepsilon(1_1 h)1_2 && \\ &= \varepsilon(1_1 \varepsilon_t(h))1_2 && \text{por (4.5)} \\ &= \varepsilon(\varepsilon_t(h)1_1)1_2 && \text{por (4.7) e (4.16)} \\ &= \varepsilon(h_1 S(h_2)1_1)1_2 && \text{por (4.27)} \\ &= \varepsilon(\varepsilon_s(h_1)S(h_2)1_1)1_2 && \text{por (4.6)} \\ &= \varepsilon(S(h_1)h_2 S(h_3)1_1)1_2 && \text{por (4.28)} \\ &= \varepsilon(S(h)1_1)1_2 && \text{por (4.29)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \varepsilon_s(h) &= 1_1\varepsilon(h1_2) && \\ &= 1_1\varepsilon(\varepsilon_s(h)1_2) && \text{por (4.6)} \\ &= 1_1\varepsilon(1_2\varepsilon_s(h)) && \text{por (4.7) e (4.16)} \\ &= 1_1\varepsilon(1_2 S(h_1)h_2) && \text{por (4.28)} \\ &= 1_1\varepsilon(1_2 S(h_1)\varepsilon_t(h_2)) && \text{por (4.5)} \\ &= 1_1\varepsilon(1_2 S(h_1)h_2 S(h_3)) && \text{por (4.27)} \\ &= 1_1\varepsilon(1_2 S(h)) && \text{por (4.29).} \end{aligned}$$

As igualdades $\varepsilon_t(h) = \varepsilon(S(h)1_1)1_2$ e $\varepsilon_s(h) = 1_1\varepsilon(1_2 S(h))$, para todo $h \in H$, são válidas para qualquer álgebra de Hopf fraca. Como verificamos no Exemplo 1.22 que H^* é uma álgebra de Hopf fraca, podemos usar essas mesmas igualdades para H^*. Para quaisquer $f \in$

H^* e $h \in H$, concluímos que

$$\begin{aligned} E_t(f)(h) &= E(S^*(f) * \varepsilon_1)\varepsilon_2(h) \\ &= (S^*(f) * \varepsilon_1)(1_H)\varepsilon_2(h) \\ &= f(S(1_1))\varepsilon_1(1_2)\varepsilon_2(h) \\ &= f(S(1_1)\varepsilon_1(1_2)\varepsilon_2(h)) \\ &= f(S(1_1)\varepsilon(1_2 h)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} E_s(f)(h) &= \varepsilon_1(h)E(\varepsilon_2 * S^*(f)) \\ &= \varepsilon_1(h)(\varepsilon_2 * S^*(f))(1_H) \\ &= \varepsilon_1(h)\varepsilon_2(1_1)f(S(1_2)) \\ &= \varepsilon(h1_1)f(S(1_2)) \\ &= f(\varepsilon(h1_1)S(1_2)). \end{aligned}$$

Utilizando as igualdades (4.25) e (4.26), para quaisquer $f \in H^*$ e $h \in H$, temos

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_t(h)) &= f(S(1_1)\varepsilon(1_2 h)) \\ f(\varepsilon_s(h)) &= f(\varepsilon(h1_1)S(1_2)). \end{aligned}$$

Portanto, $\varepsilon_t(h) = S(1_1)\varepsilon(1_2 h)$ e $\varepsilon_s(h) = \varepsilon(h1_1)S(1_2)$ para qualquer $h \in H$.

Lema 1.24 *Seja H uma álgebra de Hopf fraca. Então as seguintes identidades são válidas:*

(i) $\varepsilon_t S = \varepsilon_t \varepsilon_s = S\varepsilon_s$;

(ii) $\varepsilon_s S = \varepsilon_s \varepsilon_t = S\varepsilon_t$.

Demonstração: (i) Seja $h \in H$. Então

$$\begin{aligned} \varepsilon_t(\varepsilon_s(h)) &= \varepsilon_t(1_1)\varepsilon(1_2 S(h)) && \text{por (4.31)} \\ &= \varepsilon(1_{1'}1_1)1_{2'}\varepsilon(1_2 S(h)) \\ &= \varepsilon(1_{1'}1_1)\varepsilon(1_2 S(h))1_{2'} \\ &= \varepsilon(1_{1'}S(h))1_{2'} \\ &= \varepsilon_t(S(h)) \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t(S(h)) &= S(1_1)\varepsilon(1_2 S(h)) && \text{por (4.32)}\\
&= S(1_1\varepsilon(1_2 S(h))) &&\\
&= S(\varepsilon_s(h)) && \text{por (4.31).}
\end{aligned}$$

Logo, (i) está verificado.

(ii) Analogamente, para qualquer $h \in H$,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_s(\varepsilon_t(h)) &= \varepsilon_s(1_2)\varepsilon(S(h)1_1) && \text{por (4.30)}\\
&= 1_{1'}\varepsilon(1_2 1_{2'})\varepsilon(S(h)1_1) &&\\
&= 1_{1'}\varepsilon(S(h)1_1)\varepsilon(1_2 1_{2'}) &&\\
&= 1_{1'}\varepsilon(S(h)1_{2'}) &&\\
&= \varepsilon_s(S(h))
\end{aligned}$$

além disso,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_s(S(h)) &= \varepsilon(S(h)1_1)S(1_2) && \text{por (4.33)}\\
&= S(\varepsilon(S(h)1_1)1_2) &&\\
&= S(\varepsilon_t(h)) && \text{por (4.30).}
\end{aligned}$$

Portanto, (ii) está provado. ■

Segue agora, um importante resultado que estabelece as imagens da antípoda restrita às subálgebras H_t e H_s de H.

Proposição 1.25 *Seja H uma álgebra de Hopf fraca. Então $S(H_t) = H_s$ e $S(H_s) = H_t$.*

Demonstração: Pelo lema acima, $S(H_t) = S(\varepsilon_t(H)) = (S\varepsilon_t)(H) = (\varepsilon_s S)(H) = \varepsilon_s(S(H)) \subseteq H_s$ e $S(H_s) = S(\varepsilon_s(H)) = (S\varepsilon_s)(H) = (\varepsilon_t S)(H) = \varepsilon_t(S(H)) \subseteq H_t$.

Por outro lado, como $\Delta(1_H) = 1_1 \otimes 1_2 \in H_s \otimes H_t$ e, por (4.32), para todo $h \in H_t$,

$$h = \varepsilon_t(h) = S(1_1)\varepsilon(1_2 h) \in S(H_s)$$

e, por (4.33), para todo $h \in H_s$,

$$h = \varepsilon_s(h) = \varepsilon(h1_1)S(1_2) \in S(H_t).$$

Portanto, $S(H_t) = H_s$ e $S(H_s) = H_t$. ■

Teorema 1.26 *Seja H uma álgebra de Hopf fraca. Então a antípoda S é antimultiplicativa (S é anti-homomorfismo de álgebras) e anticomultiplicativa (S é anti-homomorfismo de coálgebras), isto é,*

(i) $S(xy) = S(y)S(x)$, *para quaisquer* $x, y \in H$;

(ii) $(S(x))_1 \otimes (S(x))_2 = S(x_2) \otimes S(x_1)$ *para qualquer* $x \in H$.

Além disso, as restrições $S|_{H_t}$ e $S|_{H_s}$ são bijeções tais que $S(H_t) = H_s$ e $S(H_s) = H_t$, $S(1_H) = 1_H$ e $\varepsilon S = \varepsilon$.

Demonstração: Pela proposição anterior, $S(H_t) = H_s$ e $S(H_s) = H_t$. Sabemos também que H_s e H_t são k-espaços vetoriais isomorfos e assim, segue diretamente que $S|_{H_t}$ e $S|_{H_s}$ são bijeções.

Mostremos que S é antimultiplicativa. Sejam $x, y \in H$. Então

$$\begin{aligned}
S(xy) &= S((xy)_1)(xy)_2S((xy)_3) && \text{por (4.29)}\\
&= S((xy)_1)\varepsilon_t((xy)_2) && \text{por (4.27)}\\
&= S(x_1y_1)\varepsilon_t(x_2y_2) && \\
&= S(x_1y_1)\varepsilon_t(x_2\varepsilon_t(y_2)) && \text{por (4.8)}\\
&= S(x_1y_1)\varepsilon_t(\varepsilon(x_2y_2)x_3) && \text{por (4.14)}\\
&= S(x_1y_1)\varepsilon(x_2y_2)\varepsilon_t(x_3) && \\
&= S(x_1y_1)(\varepsilon(x_2y_2)x_3)S(x_4) && \text{por (4.27)}\\
&= S(x_1y_1)x_2\varepsilon_t(y_2)S(x_3) && \text{por (4.14)}\\
&= S(x_1y_1)x_2\varepsilon_t(y_2)S(x_3) && \\
&= S(x_1y_1)x_2y_2S(y_3)S(x_3) && \text{por (4.27)}\\
&= \varepsilon_s(x_1y_1)S(y_2)S(x_2) && \text{por (4.28)}\\
&= \varepsilon_s(\varepsilon_s(x_1)y_1)S(y_2)S(x_2) && \text{por (4.9)}\\
&= \varepsilon_s(y_1\varepsilon(x_1y_2))S(y_3)S(x_2) && \text{por (4.15)}\\
&= \varepsilon_s(y_1)\varepsilon(x_1y_2)S(y_3)S(x_2) && \\
&= S(y_1)(y_2\varepsilon(x_1y_3))S(y_4)S(x_2) && \text{por (4.28)}\\
&= S(y_1)\varepsilon_s(x_1)y_2S(y_3)S(x_2) && \text{por (4.15)}\\
&= S(y_1)\varepsilon_s(x_1)\varepsilon_t(y_2)S(x_2) && \text{por (4.27)}\\
&= S(y_1)\varepsilon_t(y_2)\varepsilon_s(x_1)S(x_2) && \text{por (4.16)}\\
&= S(y_1)y_2S(y_3)S(x_1)x_2S(x_3) && \text{por (4.27) e (4.28)}\\
&= S(y)S(x) && \text{por (4.29).}
\end{aligned}$$

Para mostrarmos que S é anticomultiplicativa, necessitamos de duas identidades. Com o mesmo x tomado inicialmente, temos

$$\begin{aligned}
\Delta(S(x)) &= \Delta(S(x_1)x_2S(x_3)) && \text{por (4.29)}\\
&= \Delta(S(x_1)\varepsilon_t(x_2)) && \text{por (4.27)}\\
&= \Delta(S(x_1))\Delta(\varepsilon_t(x_2)) && \\
&= \Delta(S(x_1))(1_1\varepsilon_t(x_2)\otimes 1_2) && \text{por (4.10)}\\
&= (S(x_1))_1 1_1\varepsilon_t(x_2)\otimes (S(x_1))_2 1_2 && \\
&= (S(x_1))_1(1_1x_2)S(x_3)\otimes (S(x_1))_2 1_2 && \text{por (4.27)}\\
&= (S(x_1))_1 x_{2_1}S(x_3)\otimes (S(x_1))_2\varepsilon_t(x_{2_2}) && \text{por (4.12)}\\
&= (S(x_1))_1 x_2S(x_4)\otimes (S(x_1))_2\varepsilon_t(x_3) && \\
&= (S(x_1))_1 x_2S(x_5)\otimes (S(x_1))_2x_3S(x_4) && \text{por (4.27)}\\
&= (S(x_1)x_2)_1S(x_4)\otimes (S(x_1)x_2)_2S(x_3) && \\
&= (\varepsilon_s(x_1))_1S(x_3)\otimes (\varepsilon_s(x_1))_2S(x_2) && \text{por (4.28)}\\
&= 1_1S(x_3)\otimes (\varepsilon_s(x_1)1_2)S(x_2) && \text{por (4.11)}\\
&= 1_1S(x_3)\otimes 1_2\varepsilon_s(x_1)S(x_2) && \text{por (4.16)}\\
&= 1_1S(x_4)\otimes 1_2S(x_1)x_2S(x_3) && \text{por (4.28)}\\
&= 1_1S(x_2)\otimes 1_2S(x_1) && \text{por (4.29)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
S(1_1)\otimes S(1_2) &= S(\varepsilon_s(1_1))\otimes S(1_2) && \\
&= \varepsilon_t(\varepsilon_s(1_1))\otimes S(1_2) && \text{por (4.34)}\\
&= \varepsilon_t(1_1)\otimes S(1_2) && \\
&= \varepsilon(1_{1'}1_1)1_{2'}\otimes S(1_2) && \\
&= 1_{2'}\otimes \varepsilon(1_{1'}1_1)S(1_2) && \\
&= 1_{2'}\otimes \varepsilon_s(1_{1'}) && \text{por (4.33)}\\
&= 1_{2'}\otimes 1_{1'} = 1_2\otimes 1_1. &&
\end{aligned}$$

Agora, estamos aptos a mostrar que S é anticomultiplicativa. De fato,

$$\begin{aligned}
\Delta(S(x)) &= (S(x))_1\otimes (S(x))_2 && \\
&= 1_1S(x_2)\otimes 1_2S(x_1) && \\
&= S(1_2)S(x_2)\otimes S(1_1)S(x_1) && \\
&= S(x_21_2)\otimes S(x_11_1) && \text{por (i)}
\end{aligned}$$

$$= S(x_2) \otimes S(x_1).$$

Finalmente, mostremos que $\varepsilon S = \varepsilon$ e que $S(1_H) = 1_H$.

$$\begin{aligned}
\varepsilon(S(x)) &= \varepsilon(S(x_1)x_2S(x_3)) \\
&= \varepsilon(S(x_1)\varepsilon_t(x_2)) && \text{por (4.27)} \\
&= \varepsilon(S(x_1)x_2) && \text{por (4.5)} \\
&= \varepsilon(\varepsilon_s(x)1_H) && \text{por (4.28)} \\
&= \varepsilon(x) && \text{por (4.6).}
\end{aligned}$$

Por (4.35), $S(1_H) = S(\varepsilon_t(1_H)) = \varepsilon_s(\varepsilon_t(1_H)) = \varepsilon_s(1_H) = 1_H$. ■

A fim de mostrarmos a invertibilidade da antípoda S em uma álgebra de Hopf fraca H, observamos que $S(H)$ é uma álgebra de Hopf fraca com as mesmas funções estruturais de H, só que agora restritas à $S(H)$.

Corolário 1.27 *Seja H uma álgebra de Hopf fraca. Então $S(H)$ é também uma álgebra de Hopf fraca.*

Demonstração: Pelo teorema anterior, S é um anti-homomorfismo de álgebras tal que $S(1_H) = 1_H$ e não é difícil ver que $S(H)$ é uma álgebra. Ainda pelo mesmo teorema, S é um anti-homomorfismo de coálgebras e $\varepsilon S = \varepsilon$. Um simples cálculo nos fornece a coassociatividade.

Por outro lado, dado $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
((\varepsilon \otimes id)\Delta)(S(h)) &= (\varepsilon \otimes id)(S(h_2) \otimes S(h_1)) \\
&= \varepsilon(S(h_2))S(h_1) = \varepsilon(h_2)S(h_1) \\
&= S(h_1\varepsilon(h_2)) = S(h) \\
&= id(S(h)) = ((id \otimes \varepsilon)\Delta)(S(h))
\end{aligned}$$

e vale a propriedade da counidade.

Para verificarmos que $S(H)$ é uma biálgebra fraca, basta provarmos (3) (ii) da Definição 1.1, pois Δ é obviamente multiplicativa em $S(H)$ e como 1_H é a unidade de $S(H)$, seguem (3) (i) e (iii) da Definição 1.1. Mostremos (3) (ii). Sejam $x, y, z \in H$. Então

$$\begin{aligned}
\varepsilon(S(x)S(y)S(z)) &= \varepsilon(S(zyx)) \\
&= \varepsilon(zyx) \\
&= \varepsilon(zy_1)\varepsilon(y_2x) \\
&= \varepsilon(S(zy_1))\varepsilon(S(y_2x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon(S(x)S(y_2))\varepsilon(S(y_1)S(z)) \\
&= \varepsilon(S(x)(S(y))_1)\varepsilon((S(y))_2S(z)).
\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que

$$\varepsilon(S(x)S(y)S(z)) = \varepsilon(S(x)(S(y))_2)\varepsilon((S(y))_1S(z)).$$

Finalmente, para verificarmos que $S(H)$ é uma álgebra de Hopf fraca com a mesma antípoda S, notemos que

$$\begin{aligned}
(S(x))_1S((S(x))_2) &= S(x_2)S(S(x_1)) \\
&= S(S(x_1)x_2) \\
&= S(\varepsilon_s(x)) && \text{por (4.28)} \\
&= \varepsilon_t(S(x)) && \text{por (4.34).}
\end{aligned}$$

Analogamente, $S((S(x))_1)(S(x))_2 = \varepsilon_s(S(x))$. Finalmente,

$$\begin{aligned}
S((S(x))_1)(S(x))_2S((S(x))_3) &= S(S(x_3))S(x_2)S(S(x_1)) \\
&= S(S(x_1)x_2S(x_3)) \\
&= S(S(x)).
\end{aligned}$$

Portanto, $S(H)$ é uma álgebra de Hopf fraca. ■

Indutivamente, podemos concluir que $S^n(H)$ é uma álgebra de Hopf fraca, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.28 *Seja H uma álgebra de Hopf fraca. Então a antípoda S é invertível.*

Demonstração: Consideremos a cadeia descendente de subespaços de H

$$H \supseteq S(H) \supseteq S^2(H) \supseteq S^3(H) \supseteq \cdots$$

Uma vez que $S(1_H) = 1_H$, segue que $1_H = S^m(1_H)$, para todo $m \in \mathbb{N}$ e daí, $1_H \in S^m(H)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Como H possui dimensão finita, H é uma álgebra artiniana e assim, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$S^{n+m}(H) = S^n(H) \subseteq S^{n-1}(H), \text{ para todo } m \in \mathbb{N}. \qquad (\star)$$

Gostaríamos de provar que isso implica que $S^n(H) = S^{n-1}(H)$ e dessa maneira concluirmos que $S(H) = H$ e assim, S seria invertível, pois H é finito dimensional.

Mostremos que ($\star$) implica $S^n(H) = S^{n-1}(H)$ e notemos que é suficiente se o fizermos para $n = 1$ pois, nesse caso, teremos

$$S^{1+m}(H) = S(H) \subseteq H, \text{ para todo } m \in \mathbb{N} \text{ implica } S(H) = H. \quad (\star\star)$$

Assim, ($\star\star$) vale para qualquer álgebra de Hopf fraca com antípoda S e, pelo Corolário 1.27, vale para $A = S^{n-1}(H)$, ou seja,

$$S^{1+m}(A) = S(A) \subseteq A, \text{ para todo } m \in \mathbb{N} \text{ implica } S(A) = A,$$

que é equivalente a dizermos

$$S^{n+m}(H) = S^n(H) \subseteq S^{n-1}(H), \forall m \in \mathbb{N} \text{ implica } S^n(H) = S^{n-1}(H).$$

Portanto, suponhamos $n = 1$. Por hipótese, temos que

$$S^{1+m}(H) = S(H) \subseteq H, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}$$

e, em particular, para $m = 1$ segue que $S^2(H) = S(H)$. Logo $Im(S^2) = Im(S)$ e portanto, $dim(Ker(S)) = dim(Ker(S^2))$. Como $Ker(S) \subseteq Ker(S^2)$, segue que $Ker(S) = Ker(S^2)$.

Assim, se $x \in Ker(S) \cap Im(S)$ então $S(x) = 0$ e $x = S(y)$ para algum $y \in H$ e isso implica que $S^2(y) = S(x) = 0$, isto é, $y \in Ker(S^2) = Ker(S)$, donde $x = 0$. Logo, $Ker(S) \cap Im(S) = 0$.

Portanto, podemos definir $\overline{S} = S|_{S(H)} : S(H) \to S(H)$ e $\overline{S}$ é bijetora, pois $Ker(\overline{S}) \subseteq Ker(S) \cap Im(S) = 0$ e é claramente sobrejetora (pois $S^2(H) = S(H)$). Notemos que $\overline{S}$ é anti-homomorfismo de álgebras e portanto $\overline{S}^{-1}$ também o é.

Consideremos $P_S = \overline{S}^{-1} S : H \to S(H)$. Notemos que, para quaisquer $x, y \in H$, P_S satisfaz $P_S(1_H) = 1_H$, pois $(\overline{S}^{-1} S)(1_H) = (\overline{S}^{-1} S)(S(1_H)) = (\overline{S}^{-1}\overline{S})(S(1_H)) = S(1_H) = 1_H$ e

$$\begin{aligned} P_S(xy) &= \overline{S}^{-1}(S(xy)) \\ &= \overline{S}^{-1}(S(y)S(x)) \\ &= \overline{S}^{-1}(S(x))\overline{S}^{-1}(S(y)) \\ &= P_S(x)P_S(y) \end{aligned}$$

e

$$P_S(P_S(x)) = P_S(\overline{S}^{-1}(S(x)))$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{S}^{-1}(S(\overline{S}^{-1}(S(x)))) \\
&= \overline{S}^{-1}(\overline{S}(\overline{S}^{-1}(S(x)))) \\
&= \overline{S}^{-1}(S(x)) \\
&= P_S(x)
\end{aligned}
$$

e ainda,

$$
\begin{aligned}
P_S(xS(y)) &= \overline{S}^{-1}(S(xS(y))) \\
&= \overline{S}^{-1}(S^2(y)S(x)) \\
&= \overline{S}^{-1}(S(x))\overline{S}^{-1}(S(S(y))) \\
&= \overline{S}^{-1}(S(x))\overline{S}^{-1}(\overline{S}(S(y))) \\
&= P_S(x)S(y).
\end{aligned}
$$

Mostramos, no Teorema 1.26, que $S(H_t) = H_s$ e $S(H_s) = H_t$, isto é, $H_t, H_s \subseteq S(H)$. Tendo em mente as propriedades para P_S mostradas acima e que $x_1\varepsilon_s(x_2) = x = \varepsilon_t(x_1)x_2$ para todo $x \in H$, segue que

$$
\begin{aligned}
P_S(x) &= P_S(x_1\varepsilon_s(x_2)) \\
&= P_S(x_1)\varepsilon_s(x_2) && (H_s \subseteq S(H)) \\
&= P_S(x_1)S(x_2)x_3 && \text{por (4.28)} \\
&= P_S(x_1S(x_2))x_3 \\
&= P_S(1_H\varepsilon_t(x_1))x_2 && \text{por (4.27)} \\
&= P_S(1_H)\varepsilon_t(x_1)x_2 \\
&= x.
\end{aligned}
$$

Portanto, $Ker(P_S) = 0$. Claramente, $Ker(S) \subseteq Ker(P_S)$ o que implica que $Ker(S) = 0$. Donde concluímos que $S(H) = H$, uma vez que H é finito dimensional. ■

O penúltimo lema deste capítulo reúne mais algumas propriedades envolvendo a antípoda, úteis não somente neste, mas nos próximos capítulos.

Lema 1.29 *Seja H uma álgebra de Hopf fraca. Então, para todo $h \in H$, são válidas as igualdades.*

(i) $h_1 \otimes h_2S(h_3) = 1_1h \otimes 1_2$.

(ii) $S(h_1)h_2 \otimes h_3 = 1_1 \otimes h1_2$.

(iii) $h_1 \otimes S(h_2)h_3 = h1_1 \otimes S(1_2)$.

(iv) $h_1 S(h_2) \otimes h_3 = S(1_1) \otimes 1_2 h$.

(v) $1_1 \otimes 1_2 = S(1_2) \otimes S(1_1)$.

(vi) $h_2 S^{-1}(h_1) \otimes h_3 = S^{-1}(\varepsilon_t(h_1)) \otimes h_2 = 1_1 \otimes 1_2 h$.

Demonstração: (i) $h_1 \otimes h_2 S(h_3) \overset{(4.27)}{=} h_1 \otimes \varepsilon_t(h_2) \overset{(4.12)}{=} 1_1 h \otimes 1_2$ e (ii) é análogo, usando (4.28) e (4.13).

Notemos que

$$\begin{aligned}
h_1 \otimes S(h_2)h_3 &= h_1 \otimes \varepsilon_s(h_2) && \text{por } (4.28)\\
&= h_1 \otimes \varepsilon(h_2 1_{1'})S(1_{2'}) && \text{por } (4.33)\\
&= h_1 1_1 \otimes \varepsilon(h_2 1_2 1_{1'})S(1_{2'}) && \text{por } (4.2)\\
&= h_1 1_1 \varepsilon(h_2 1_2) \otimes S(1_3)\\
&= (h1_1)_1 \varepsilon((h1_1)_2) \otimes S(1_2)\\
&= h1_1 \otimes S(1_2)
\end{aligned}$$

e isso verifica (iii). De maneira semelhante, é provado (iv).

Para a prova de (v), sabemos que $S(1_H) = 1_H$ e daí,

$$\begin{aligned}
1_1 \otimes 1_2 &= \Delta(1_H) = \Delta(S(1_H))\\
&= (S(1_H))_1 \otimes (S(1_H))_2\\
&= S(1_2) \otimes S(1_1) && \text{Teo. 1.26.}
\end{aligned}$$

Mostramos em (iii) que $h_1 S(h_2) \otimes h_3 = S(1_1) \otimes 1_2 h$. Aplicando $S^{-1} \otimes id$ em ambos os lados dessa igualdade, obtemos

$$h_2 S^{-1}(h_1) \otimes h_3 = 1_1 \otimes 1_2 h$$

e, além disso, $h_1 S(h_2) \otimes h_3 = \varepsilon_t(h_1) \otimes h_2$. Novamente, aplicando $S^{-1} \otimes id$, temos

$$h_2 S^{-1}(h_1) \otimes h_3 = S^{-1}(\varepsilon_t(h_1)) \otimes h_2.$$

Isso mostra (vi). ∎

Para o último lema deste capítulo, fazemos uma observação útil à prova do mesmo.

Observação 1.30 Seja $h \in H$ então

$$\begin{aligned} S(\varepsilon_s(S^{-1}(h))) &= \varepsilon_t(S(S^{-1}(h))) && \text{por (4.34)} \\ &= \varepsilon_t(h) \\ &= S(S^{-1}(\varepsilon_t(h))). \end{aligned}$$

Como S é injetora, segue que $\varepsilon_s(S^{-1}(h)) = S^{-1}(\varepsilon_t(h))$. Em particular, se $h \in H_t$ então $S^{-1}(h) \in H_s$. Analogamente, $\varepsilon_t(S^{-1}(h)) = S^{-1}(\varepsilon_s(h))$ e daí, $S^{-1}(h) \in H_t$, para todo $h \in H_s$.

Observação 1.31 Seja H uma álgebra de Hopf fraca, em ([10], Remark 2.4.1, p. 218) é dito que H^{op} é também uma álgebra de Hopf fraca com antípoda S^{-1}. Esse fato será útil principalmente para a demonstração do teorema de dualidade fraca, no Capítulo 3.

Lema 1.32 *Seja H uma álgebra de Hopf fraca. Então, para quaisquer $z \in H_t$ e $y \in H_s$, temos*

(i) $1_1 S^{-1}(z) \otimes 1_2 = 1_1 \otimes 1_2 z$.

(ii) $1_1 \otimes S^{-1}(y) 1_2 = y 1_1 \otimes 1_2$.

Demonstração: Se $z \in H_t$ então $S^{-1}(z) \in H_s$ e daí,

$$\begin{aligned} 1_1 S^{-1}(z) \otimes 1_2 &= (S^{-1}(z))_1 \otimes \varepsilon_t((S^{-1}(z))_2) && \text{por (4.12)} \\ &= 1_1 \otimes \varepsilon_t(S^{-1}(z) 1_2) && \text{por (4.11)} \\ &= 1_1 \otimes \varepsilon_t(1_2 S^{-1}(z)) && \text{por (4.16)} \\ &= 1_1 \otimes 1_2 \varepsilon_t(S^{-1}(z)) && \text{por (4.19)} \\ &= 1_1 \otimes 1_2 \varepsilon_t(\varepsilon_s(S^{-1}(z))) \\ &= 1_1 \otimes 1_2 \varepsilon_t(S(S^{-1}(z))) && \text{por (4.34)} \\ &= 1_1 \otimes 1_2 z. \end{aligned}$$

Agora, para (ii), se $y \in H_s$ então $S^{-1}(y) \in H_t$ e

$$\begin{aligned} 1_1 \otimes S^{-1}(y) 1_2 &= \varepsilon_s((S^{-1}(y))_1) \otimes (S^{-1}(y))_2 && \text{por (4.13)} \\ &= \varepsilon_s(1_1 S^{-1}(y)) \otimes 1_2 && \text{por (4.10)} \\ &= \varepsilon_s(S^{-1}(y) 1_1) \otimes 1_2 && \text{por (4.16)} \\ &= \varepsilon_s(S^{-1}(y)) 1_1 \otimes 1_2 && \text{por (4.20)} \\ &= \varepsilon_s(\varepsilon_t(S^{-1}(y))) 1_1 \otimes 1_2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon_s(S(S^{-1}(y)))1_1 \otimes 1_2 && \text{por (4.35)}\\
&= y1_1 \otimes 1_2.
\end{aligned}
$$

■

Antes de enunciarmos a próxima proposição, precisamos lembrar uma das definições equivalentes para que uma álgebra seja separável (veja [6], p. 189).

Definição 1.33 *Uma álgebra A é separável se existe um elemento $e = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in A \otimes A$ tal que $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 1_A$ e, além disso, $\sum_{i=1}^{n} x a_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i x$, para todo $x \in A$. O elemento e é chamado idempotente de separabilidade.*

Proposição 1.34 *Seja H uma álgebra de Hopf fraca. Então as subálgebras canônicas H_t e H_s são separáveis.*

Demonstração: Primeiramente mostremos que H_t é separável com idempotente de separabilidade $e^t = (S \otimes id)\Delta(1_H) = S(1_1) \otimes 1_2$ (e^t é claramente idempotente).

Para isso, notemos que $e^t \in H_t \otimes H_t$, pois como $\Delta(1_H) \in H_s \otimes H_t$ e $S(H_s) = H_t$, segue que $e^t \in H_t \otimes H_t$. Por (4.28)

$$S(1_1)1_2 = \varepsilon_s(1_H) = 1_H.$$

Aplicando $S \otimes id$ à igualdade $1_1 S^{-1}(z) \otimes 1_2 = 1_1 \otimes 1_2 z$ obtemos, para todo $z \in H_t$,

$$zS(1_1) \otimes 1_2 = S(1_1) \otimes 1_2 z.$$

Portanto, H_t é uma álgebra separável com idempotente de separabilidade $e^t = S(1_1) \otimes 1_2$.

Para mostrarmos que H_s é separável, consideremos o idempotente de separabilidade $e^s = (id \otimes S)\Delta(1_H) = 1_1 \otimes S(1_2)$ (e^s é claramente idempotente).

Temos que $e^s \in H_s \otimes H_s$, pois $\Delta(1_H) \in H_s \otimes H_t$ e $S(H_t) = H_s$. Por (4.27) temos

$$1_1 S(1_2) = \varepsilon_t(1_H) = 1_H.$$

Aplicando $id \otimes S$ à igualdade $1_1 \otimes S^{-1}(y)1_2 = y1_1 \otimes 1_2$ segue, para todo $y \in H_s$, que

$$1_1 \otimes S(1_2)y = y1_1 \otimes S(1_2).$$

Logo, H_s é uma álgebra separável com idempotente de separabilidade $e^s = 1_1 \otimes S(1_2)$. ■

Finalizamos o capítulo apresentando um resultado tal que, a partir de uma álgebra de Hopf fraca, são dadas condições equivalentes para que a mesma seja uma álgebra de Hopf no sentido clássico.

Proposição 1.35 *Seja H uma álgebra de Hopf fraca. Então são equivalentes:*

(i) *H é uma álgebra de Hopf no sentido clássico;*

(ii) $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$*;*

(iii) $\varepsilon(xy) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$*, para quaisquer $x, y \in H$;*

(iv) $S(x_1)x_2 = \varepsilon(x)1_H$*, para todo $x \in H$;*

(v) $x_1 S(x_2) = \varepsilon(x)1_H$*, para todo $x \in H$;*

(vi) $H_t = k1_H = H_s$*.*

Demonstração: (i)⇒(ii) Imediato pela definição de biálgebra (clássica).

(ii)⇒(iii) Temos $\varepsilon(xy) = \varepsilon(x1_H y) = \varepsilon(x1_H)\varepsilon(1_H y) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$.

(iii)⇒(ii) Notemos que

$$\begin{aligned} 1_H \otimes 1_H &= 1_1\varepsilon(1_2) \otimes \varepsilon(1_{1'})1_{2'} \\ &= 1_1\varepsilon(1_2 1_{1'}) \otimes 1_{2'} && \text{por (iii)} \\ &= 1_1\varepsilon(1_2) \otimes 1_3 \\ &= 1_1 \otimes 1_2 = \Delta(1_H). \end{aligned}$$

(iii)⇒(iv) Temos

$$\begin{aligned} S(x_1)x_2 &= \varepsilon_s(x) && \text{por (4.28)} \\ &= \varepsilon(x1_2)1_1 \\ &= \varepsilon(x)\varepsilon(1_2)1_1 && \text{por (iii)} \\ &= \varepsilon(x)1_H. \end{aligned}$$

(iv)⇒(iii) Notemos que, para quaisquer $x, y \in H$, temos

$$\varepsilon(xy)1_H = S((xy)_1)(xy)_2 \qquad \text{por (iv)}$$

$$
\begin{aligned}
&= S(y_1)S(x_1)x_2y_2 \\
&= S(y_1)\varepsilon(x)1_H y_2 && \text{por (iv)} \\
&= \varepsilon(x)\varepsilon(y)1_H
\end{aligned}
$$

e isso implica que $\varepsilon(xy) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$.

(iii)⇔(v) É análoga à equivalência (iii)⇔(iv).

(ii)⇒(i) Como já mostramos que (ii) implica (iii) e portanto (iv) e (v), o que resta mostrarmos para concluirmos (i) é que $\varepsilon(1_H) = 1_k$. Mas notemos que

$$\varepsilon(1_H)1_H \overset{\text{(iv)}}{=} S(1_H)1_H = 1_H = 1_k 1_H, \text{ pois } S(1_H) = 1_H$$

e isso implica que $\varepsilon(1_H) = 1_k$. Logo, H é álgebra de Hopf no sentido clássico.

(iii)⇒(vi) Seja $x \in H_t$. Então

$$
\begin{aligned}
x &= \varepsilon_t(x) \\
&= \varepsilon(1_1 x)1_2 \\
&= \varepsilon(x)\varepsilon(1_1)1_2 && \text{por (iii)} \\
&= \varepsilon(x)1_H \in k1_H
\end{aligned}
$$

e analogamente, se $y \in H_s$ então $y = \varepsilon(y)1_H \in k1_H$. Como $1_H \in H_t \cap H_s$, segue que $H_t = k1_H = H_s$.

(vi)⇒(iii) Escrevemos $\Delta(1_H) = \sum_i a_i \otimes b_i$. Sabendo que $\Delta(1_H) \in H_s \otimes H_t$ e por (vi), segue que existem $\alpha_{i's}, \beta_{i's} \in k$ tais que $\Delta(1_H) = \sum_i \alpha_i 1_H \otimes \beta_i 1_H$. Além disso, escrevemos, para cada $y \in H$, $\varepsilon_t(y) = \alpha_y 1_H$ para algum $\alpha_y \in k$.

Seja $x \in H$. Então

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(x)1_H &= \varepsilon(S(x))1_H && \text{Teo. 1.26} \\
&= \varepsilon(S(x_1)x_2S(x_3))1_H \\
&= \varepsilon(S(x_1)\varepsilon_t(x_2))1_H && \text{por (4.27)} \\
&= \varepsilon(S(x_1)\alpha_{x_2}1_H)1_H \\
&= \varepsilon(S(x_1))\alpha_{x_2}1_H \\
&= \varepsilon(S(x_1))\varepsilon_t(x_2) \\
&= \varepsilon(x_1)\varepsilon_t(x_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon_t(x)\\
&= \varepsilon(1_1 x)1_2\\
&= \textstyle\sum_i \alpha_i\beta_i\varepsilon(x)1_H
\end{aligned}
$$

e isso implica que $\varepsilon(x) = \sum_i \alpha_i\beta_i\varepsilon(x)$, para todo $x \in H$. Se $\varepsilon(x) = 0$, para todo $x \in H$, então $\varepsilon(xy) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$, para quaisquer $x, y \in H$.

Caso contrário, $\sum_i \alpha_i\beta_i = 1_k$ e daí,

$$\varepsilon(xy) = \varepsilon(x1_1)\varepsilon(1_2 y) = \textstyle\sum_i \alpha_i\beta_i\varepsilon(x)\varepsilon(y) = \varepsilon(x)\varepsilon(y).$$

■

Capítulo 2

Módulos de Hopf fracos e um teorema de Maschke

Neste capítulo, nossa principal referência é [10]. Apresentamos um estudo de integrais para álgebras de Hopf fracas, uma noção de módulos de Hopf e um teorema fundamental de módulos de Hopf neste contexto fraco concluindo assim, a existência de uma integral não-nula. Finalmente, provamos uma versão fraca do teorema de Maschke.

Em todo este capítulo, H denota uma álgebra de Hopf fraca, quando nada for dito ao contrário.

2.1 Integrais

Iniciamos esta seção com uma generalização de integrais.

Definição 2.1 *Uma integral à esquerda (à direita) em H é um elemento $l \in H$ tal que*

$$hl = \varepsilon_t(h)l, \ \textit{ para todo } h \in H \ (lh = l\varepsilon_s(h), \ \textit{ para todo } h \in H).$$

Vale observarmos que essa noção de integral generaliza a noção de integral no caso de álgebras de Hopf no sentido clássico. Isso é imediato, pois $hl = \varepsilon_t(h)l = 1_1\varepsilon(h1_2)l = 1_H\varepsilon(h1_H)l = \varepsilon(h)l$, para todo $h \in H$ e analogamente para integral à direita.

Observação 2.2 (i) Denotamos por

$$\textstyle\int_H^l = \{l \in H : hl = \varepsilon_t(h)l, \ \text{ para todo } h \in H\}$$

e por
$$\int_H^r = \{r \in H : rh = r\varepsilon_s(h), \text{ para todo } h \in H\}.$$

Pelo fato de ε_t e ε_s serem k-lineares segue facilmente que $\int_H^l$ e $\int_H^r$ são k-subespaços vetoriais de H.

(ii) Uma integral à esquerda l (à direita r) é chamada normalizada se $\varepsilon_t(l) = 1_H$ ($\varepsilon_s(r) = 1_H$).

A próxima proposição fornece condições equivalentes para que um elemento $l \in H$ seja uma integral à esquerda em H, sendo a mesma, importante para a demonstração do teorema de Maschke.

Proposição 2.3 *Seja $l \in H$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $l \in \int_H^l$;

(ii) $l_1 \otimes hl_2 = S(h)l_1 \otimes l_2$, *para todo* $h \in H$;

(iii) $l \rightharpoonup H^* \subseteq H_t^*$;

(iv) $Ker(\varepsilon_t)l = 0$;

(v) $S(l) \in \int_H^r$.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Para todo $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
l_1 \otimes hl_2 &= 1_1 l_1 \otimes h1_2 l_2 && \text{por (4.1)}\\
&= S(h_1)h_2 l_1 \otimes h_3 l_2 && \text{por (4.37)}\\
&= (S(h_1) \otimes 1_H)(h_2 l_1 \otimes h_3 l_2) &&\\
&= (S(h_1) \otimes 1_H)\Delta(h_2 l) && \text{por (i)}\\
&= (S(h_1) \otimes 1_H)\Delta(\varepsilon_t(h_2) l) &&\\
&= (S(h_1) \otimes 1_H)((\varepsilon_t(h_2))_1 l_1 \otimes (\varepsilon_t(h_2))_2 l_2) &&\\
&= (S(h_1) \otimes 1_H)(\varepsilon_t(h_2)1_1 l_1 \otimes 1_2 l_2) && \text{por (4.10) e (4.16)}\\
&= (S(h_1) \otimes 1_H)(\varepsilon_t(h_2) l_1 \otimes l_2) && \text{por (4.1)}\\
&= S(h_1)h_2 S(h_3) l_1 \otimes l_2 &&\\
&= S(h) l_1 \otimes l_2 && \text{por (4.29).}
\end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$(i) Por hipótese, $l_1 \otimes hl_2 = S(h)l_1 \otimes l_2$, para todo $h \in H$ e isso implica que $l_1\varepsilon(hl_2) = S(h)l_1\varepsilon(l_2) = S(h)l$, para todo $h \in H$. Portanto, para todo $h \in H$

$$\begin{aligned} hl &= (hl)_1\varepsilon((hl)_2) = h_1(l_1\varepsilon(h_2l_2)) \\ &= h_1S(h_2)l_1\varepsilon(l_2) = h_1S(h_2)l && \text{por (ii)} \\ &= \varepsilon_t(h)l. \end{aligned}$$

Logo, $l \in \int_H^l$.

(i)⇒(iii) Seja $f \in H^*$. Mostremos que $l \rightharpoonup f \in H_t^*$. Sob a notação do Exemplo 1.8, notemos que para todo $h \in H$, ocorre

$$\begin{aligned} E_t(l \rightharpoonup f)(h) &= E_t(f_1 f_2(l))(h) && \text{por (4.23)} \\ &= E(\varepsilon_1 * f_1)\varepsilon_2(h) f_2(l) \\ &= \varepsilon_1(1_1)f_1(1_2)\varepsilon_2(h)f_2(l) \\ &= f_1(\varepsilon_1(1_1)\varepsilon_2(h)1_2)f_2(l) \\ &= f_1(\varepsilon(1_1h)1_2)f_2(l) \\ &= f_1(\varepsilon_t(h))f_2(l) \\ &= f(\varepsilon_t(h)l) \\ &= f(hl) && \text{por (i)} \\ &= f_1(h)f_2(l) \\ &= (l \rightharpoonup f)(h) && \text{por (4.23)} \end{aligned}$$

e assim, $l \rightharpoonup f \in H_t^*$.

(iii)⇒(i) Novamente, com a notação apresentada no Exemplo 1.8, seja $g \in H^*$. Então, por hipótese, $l \rightharpoonup g = E_t(l \rightharpoonup g)$. Por um lado, por (4.23) temos para todo $h \in H$

$$(l \rightharpoonup g)(h) = g_1(h)g_2(l) = g(hl)$$

e por outro lado

$$\begin{aligned} E_t(l \rightharpoonup g)(h) &= (l \rightharpoonup g)(\varepsilon_t(h)) && \text{por (4.25)} \\ &= g_1(\varepsilon_t(h))g_2(l) && \text{por (4.23)} \\ &= g(\varepsilon_t(h)l). \end{aligned}$$

Logo, $g(hl) = g(\varepsilon_t(h)l)$, para todo $g \in H^*$. Portanto, $hl = \varepsilon_t(h)l$, para todo $h \in H$ e isso implica que $l \in \int_H^l$.

(i)⇒(iv) Seja $z \in Ker(\varepsilon_t)$. Então $\varepsilon_t(z) = 0$ e, por hipótese, $zl = \varepsilon_t(z)l$. Logo, $zl = 0$ e assim, $Ker(\varepsilon_t)l = 0$.

(iv) ⇒(i) Seja $h \in H$. Notemos que $h - \varepsilon_t(h) \in Ker(\varepsilon_t)$, pois

$$\varepsilon_t(h - \varepsilon_t(h)) = \varepsilon_t(h) - \varepsilon_t(\varepsilon_t(h)) = \varepsilon_t(h) - \varepsilon_t(h) = 0.$$

Assim, $(h - \varepsilon_t(h))l = 0$ e portanto, $hl = \varepsilon_t(h)l$, para todo $h \in H$. Consequentemente, $l \in \int_H^l$.

(i)⇒(v) Seja $h \in H$. Como $l \in \int_H^l$ então $S^{-1}(h)l = \varepsilon_t(S^{-1}(h))l$ e, aplicando S em ambos os lados dessa igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} S(l)h &= S(l)S(\varepsilon_t(S^{-1}(h))) \\ &= S(l)\varepsilon_s(S(S^{-1}(h))) && \text{por } (4.35) \\ &= S(l)\varepsilon_s(h) \end{aligned}$$

e portanto, $S(l) \in \int_H^r$.

(v)⇒(i) Por hipótese, para todo $h \in H$, $S(l)S(h) = S(l)\varepsilon_s(S(h))$. Sendo S um anti-homomorfismo de álgebras, S^{-1} também o é. Aplicando S^{-1} em ambos os lados dessa igualdade, obtemos por (4.35)

$$hl = S^{-1}(\varepsilon_s(S(h)))l = S^{-1}(S(\varepsilon_t(h)))l = \varepsilon_t(h)l.$$

Logo, $l \in \int_H^l$. ■

2.2 Módulos de Hopf fracos

Para o desenvolvimento desta seção seguimos principalmente [10] e também [3].

Uma vez que uma álgebra de Hopf fraca H é uma álgebra e uma coálgebra, podemos considerar módulos e comódulos sobre H. Com a finalidade de que o trabalho esteja o mais auto-contido possível, lembremos as definições de comódulo e homomorfismo de comódulos, para maiores informações (veja [6], Capítulo 2).

Definição 2.4 *Seja C uma coálgebra. Um C-comódulo à direita é um par (M, ρ), em que M é um k-espaço vetorial e $\rho : M \to M \otimes C$ é um homomorfismo de k-espaços vetoriais tais que os seguintes diagramas* *comutam*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes C \arrow[d, "id\otimes\Delta"] \\
M \otimes C \arrow[r, "\rho\otimes id"'] & M \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \otimes C \arrow[rr, "id\otimes\varepsilon"] & & M \otimes k \arrow[dl, "\phi"] \\
& M \arrow[ul, "\rho"] &
\end{tikzcd}$$

em que $\phi : M \otimes k \to M$ *é o isomorfismo canônico.*

De maneira similar, é definido um C-comódulo à esquerda. Como fizemos no caso de coálgebras, podemos introduzir a notação de Sweedler para comódulos. Seja M um C-comódulo à direita com a estrutura dada por $\rho : M \to M \otimes C$. Então, para todo $m \in M$, temos que

$$\rho(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)} \in M \otimes C.$$

Como no caso de coálgebras, para designar tal estrutura, escrevemos $\rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)}$, omitindo a soma.

A comutatividade dos diagramas da definição de um comódulo à direita pode ser escrita, em notação de Sweedler, como segue

$$(m_{(0)})_{(0)} \otimes (m_{(0)})_{(1)} \otimes m_{(1)} = m_{(0)} \otimes (m_{(1)})_1 \otimes (m_{(1)})_2$$

e

$$\varepsilon(m_{(1)})m_{(0)} = m.$$

Definição 2.5 *Sejam* C *uma coálgebra,* (M, ρ) *e* (N, λ) *dois* C*- comódulos à direita. Uma função k-linear* $g : M \to N$ *é chamada um homomorfismo de* C*-comódulos se o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho"'] & N \arrow[d, "\lambda"] \\
M \otimes C \arrow[r, "g\otimes id"'] & N \otimes C.
\end{tikzcd}$$

A comutatividade desse diagrama nos diz que

$$g(m)_{(0)} \otimes g(m)_{(1)} = g(m_{(0)}) \otimes m_{(1)}.$$

No nosso caso, consideramos comódulos sobre a álgebra de Hopf fraca H. Dessa forma, como no caso de álgebras de Hopf clássicas, temos a seguinte definição.

Definição 2.6 *Um H-módulo de Hopf à direita fraco M é um k-espaço vetorial tal que*

(i) *M é um H-módulo à direita via $m \otimes h \mapsto m \cdot h$.*

(ii) *M é um H-comódulo à direita via $m \mapsto \rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)}$.*

(iii) *$\rho(m \cdot h) = m_{(0)} \cdot h_1 \otimes m_{(1)} h_2$, para quaisquer $m \in M$ e $h \in H$.*

No contexto fraco, podemos observar que a definição de módulo de Hopf é precisamente a mesma definição dada no contexto clássico, conforme verificamos em ([6], p. 169). A grande diferença está alicerçada na implicação da condição (iii).

Observação 2.7 No caso em que H é uma álgebra de Hopf no sentido clássico e M é um H-módulo de Hopf à direita, é conhecido que $M \otimes H$ é um H-módulo à direita com a ação $(m \otimes h) \cdot g = m \cdot g_1 \otimes hg_2$, para quaisquer $m \in M$ e $h, g \in H$. Nesse caso, a condição (iii) implica em ρ ser um morfismo de H-módulos à direita (veja [6], p. 170).

No nosso caso, H é uma álgebra de Hopf fraca e M é um H-módulo de Hopf à direita fraco e assim, $M \otimes H$ pode não tornar-se um H-módulo à direita com a ação descrita. Nesse caso

$$(m \otimes h) \cdot 1_H = m \cdot 1_1 \otimes h1_2$$

e, não necessariamente, isso será igual à $m \otimes h$.

Todavia, nesse contexto, conseguimos transpor tal estrutura de H-módulo para o espaço $(M \otimes H)\Delta(1_H)$, assim para quaisquer $m \in H$ e $g, h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
((m \otimes g)\Delta(1_H)) \cdot h &= (m \cdot 1_1 \otimes g1_2) \cdot h \\
&= (m \cdot 1_1) \cdot h_1 \otimes g1_2h_2 \\
&= m \cdot 1_1h_1 \otimes g1_2h_2 \\
&= m \cdot h_1 \otimes gh_2 \qquad\qquad \text{por (4.1).}
\end{aligned}$$

Claramente, $(M \otimes H)\Delta(1_H)$ é um H-módulo à direita. Fazendo $h = 1_H$ na igualdade acima, temos $(m \cdot 1_1 \otimes g1_2) \cdot 1_H = m \cdot 1_1 \otimes g1_2$ e

$$\begin{aligned}
(m1_1 \otimes g1_2) \cdot hl &= m \cdot (h_1l_1) \otimes g(h_2l_2) \\
&= (m \cdot h_1) \cdot l_1 \otimes (gh_2)l_2 \\
&= ((m \cdot h_1) \cdot 1_1 \otimes (gh_2)1_2) \cdot l \\
&= (m \cdot (h_11_1) \otimes g(h_21_2)) \cdot l
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (m \cdot h_1 \otimes gh_2) \cdot l && \text{por (4.2)}\\
&= ((m \cdot 1_1 \otimes g1_2) \cdot h) \cdot l.
\end{aligned}
$$

Notemos que $\rho : M \to (M \otimes H)\Delta(1_H)$, dada por $\rho(m) = m_{(0)} \cdot 1_1 \otimes m_{(1)}1_2$, é um homomorfismo de H-módulos à direita. De fato, para quaisquer $m \in M$ e $h \in H$, temos

$$
\begin{aligned}
\rho(m) \cdot h = \rho(m \cdot 1_H) \cdot h &= (m_{(0)} \cdot 1_1 \otimes m_{(1)}1_2) \cdot h\\
&= m_{(0)} \cdot h_1 \otimes m_{(1)}h_2 = \rho(m \cdot h).
\end{aligned}
$$

Vejamos alguns exemplos de módulos de Hopf fracos. Para facilitar a escrita, escrevemos daqui em diante simplesmente módulo de Hopf à direita, omitindo a palavra fraco.

Exemplo 2.8 H é um H-módulo de Hopf à direita com $\rho = \Delta$. É claro que H é um H-módulo à direita e com $\rho = \Delta$, H é um H-comódulo à direita. Como Δ é multiplicativa, para quaisquer $g, h \in H$, obtemos

$$\rho(gh) = \Delta(gh) = \Delta(g)\Delta(h) = g_1h_1 \otimes g_2h_2.$$

Logo, H é um H-módulo de Hopf à direita.

A fim de darmos uma estrutura de H-módulo de Hopf à direita para H^*, apresentamos o seguinte lema.

Lema 2.9 *Seja H uma álgebra de Hopf fraca. Então são válidas as afirmações.*

(i) *H^* é um H-módulo à direita com a ação $f \cdot h = S(h) \rightharpoonup f = S(h) \rightharpoonup f = f_2(S(h))f_1$ para quaisquer $f \in H^*$ e $h \in H$.*

(ii) *H^* é um H-comódulo à direita com a estrutura $\rho(f) = f_{(0)} \otimes f_{(1)}$ para a qual $f_{(0)'s} \in H^*$ e $f_{(1)'s} \in H$ estão univocamente determinados pela condição $f_{(0)}g(f_{(1)}) = g * f$, para todo $g \in H^*$.*

Demonstração: (i) Não é difícil mostrarmos que, de fato, temos uma ação à direita de H em H^*.

(ii) Seja $f \in H^*$. Suponhamos $f_{(0)} \otimes f_{(1)}$ tais que $f_{(0)}\psi(f_{(1)}) = \psi * f$, para toda $\psi \in H^*$.

Suponhamos também que existam $\phi_{i's} \in H^*$ e $h_{i's} \in H$ tais que $\sum_i \phi_i\psi(h_i) = \psi * f$, para toda $\psi \in H^*$.

Assim, notamos que

$\Phi(id\otimes\psi)(f_{(0)}\otimes f_{(1)}) = \psi * f = \Phi(id\otimes\psi)(\sum_i \phi_i \otimes h_i)$, para todo $\psi \in H^*$

em que Φ é o isomorfismo canônico entre $H^* \otimes k$ e H^*. Assim,

$$\Phi(id \otimes \psi)\left(f_{(0)} \otimes f_{(1)} - \textstyle\sum_i \phi_i \otimes h_i\right) = 0, \text{ para qualquer } \psi \in H^*. \quad (\star)$$

Podemos escrever $\left(f_{(0)} \otimes f_{(1)} - \sum_i \phi_i \otimes h_i\right) = \sum_j g_j \otimes e_j$ sendo $\{e_j\}_{j=1}^n$ base de H. Como H é finito dimensional, é possível considerar a base dual $\{e_j^*\}_{j=1}^n$ de H^*, que é tal que $e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$, i, j $\in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Em particular, para $\psi = e_l^*$ em $(\star)$, obtemos

$$0 = \Phi(id \otimes e_l^*)\left(\textstyle\sum_j g_j \otimes e_j\right) = g_l.$$

Daí, $g_l = 0$, para todo $l \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Logo, $f_{(0)} \otimes f_{(1)} = \sum_i \phi_i \otimes h_i$.

Mostremos que H^* é H-comódulo com a ρ dada. Primeiramente,

$$(id \otimes \Delta)(\rho(f)) = f_{(0)} \otimes f_{(1)_1} \otimes f_{(1)_2}$$

e

$$(\rho \otimes id)(\rho(f)) = f_{(0)_{(0)}} \otimes f_{(0)_{(1)}} \otimes f_{(1)}.$$

Omitindo, por abuso de notação, isomorfismos canônicos, para quaisquer $\psi, \phi \in H^*$, temos

$$\begin{aligned}(id \otimes \psi \otimes \phi)(f_{(0)} \otimes f_{(1)_1} \otimes f_{(1)_2}) &= f_{(0)}\psi(f_{(1)_1})\phi(f_{(1)_2}) \\ &= f_{(0)}(\psi * \phi)(f_{(1)}) \\ &= (\psi * \phi) * f\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(id \otimes \psi \otimes \phi)(f_{(0)_{(0)}} \otimes f_{(0)_{(1)}} \otimes f_{(1)}) &= f_{(0)_{(0)}}\psi(f_{(0)_{(1)}})\phi(f_{(1)}) \\ &= \psi * f_{(0)}\phi(f_{(1)}) \\ &= \psi * (\phi * f),\end{aligned}$$

como o produto de convolução é associativo, segue que $(id\otimes\psi\otimes\phi)((id\otimes\Delta)(\rho(f)) - (\rho \otimes id)(\rho(f))) = 0$.

Chamando $t = (id \otimes \Delta)(\rho(f)) - (\rho \otimes id)(\rho(f))$, podemos escrever $t = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \otimes e_i \otimes e_j$ em que $\{e_i\}_{i=1}^n$ é base de H. Considerando

$\{e_j^*\}_{i=1}^n$ base de H^* tal que $e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$ e fixando i_0, $j_0 \in \{1, 2, \cdots, n\}$, segue que $0 = (id \otimes e_{i_0}^* \otimes e_{j_0}^*)(t) = g_{i_0 j_0}$ e assim, $t = 0$.

Logo, $(id \otimes \Delta)\rho = (\rho \otimes id)\rho$. Além disso, $(id \otimes \varepsilon)(\rho(f)) = f_{(0)}\varepsilon(f_{(1)}) = \varepsilon * f = f$. Portanto, H^* é um H-comódulo à direita. ■

Agora, podemos apresentar o seguinte exemplo.

Exemplo 2.10 H^* é um H-módulo de Hopf à direita com as estruturas apresentadas acima. De fato, para quaisquer $f, \psi \in H^*$ e $h \in H$, obtemos

$$
\begin{aligned}
(f_{(0)} \cdot h_1)\psi(f_{(1)}h_2) =& (f_{(0)} \cdot h_1)\psi_1(f_{(1)})\psi_2(h_2) \\
=& ((f_{(0)}\psi_1(f_{(1)})) \cdot h_1)\psi_2(h_2) \\
=& ((\psi_1 * f) \cdot h_1)\psi_2(h_2) \\
=& (S(h_1) \rightharpoonup (\psi_1 * f))\psi_2(h_2) \\
=& (\psi_1 * f_1)((\psi_2 * f_2)(S(h_1)))\psi_3(h_2) && \text{por (4.23)} \\
=& (\psi_1 * f_1)(S^*(\psi_2 * f_2)(h_1))\psi_3(h_2) \\
=& (\psi_1 * f_1)((S^*(f_2) * S^*(\psi_2))(h_1))\psi_3(h_2) \\
=& (\psi_1 * f_1)(S^*(f_2) * S^*(\psi_2) * \psi_3)(h) \\
=& (\psi_1 * f_1)(S^*(f_2) * E_s(\psi_2))(h) && \text{por (4.28)} \\
=& (\psi_1 * f_1)(S^*(S^{*^{-1}}(E_s(\psi_2)) * f_2))(h) \\
=& (\psi_1 * f_1)(S^{*^{-1}}(E_s(\psi_2)) * f_2)(S(h)) && \text{def. de } S^* \\
=& (\psi_1 * (\varepsilon_1 * f_1))(S^{*^{-1}}(E_s(\psi_2)) * (\varepsilon_2 * f_2))(S(h)) \\
=& (\psi_1 * E_s(\psi_2) * \varepsilon_1 * f_1)(\varepsilon_2 * f_2)(S(h)) && \text{por (4.43)} \\
=& (\psi * \varepsilon_1 * f_1)(\varepsilon_2 * f_2)(S(h)) \\
=& (\psi * f_1)f_2(S(h)) && \text{por (4.1)} \\
=& \psi * (S(h) \rightharpoonup f) && \text{por (4.23)} \\
=& \psi * (f \cdot h)
\end{aligned}
$$

e isso implica que $\rho(f \cdot h) = f_{(0)} \cdot h_1 \otimes f_{(1)}h_2$. Donde, H^* é um H-módulo de Hopf à direita.

Nosso próximo resultado importante é o Teorema fundamental de módulos de Hopf. Para isso, introduzimos alguns conceitos já existentes na versão clássica de álgebras de Hopf. Agora, obviamente, no contexto fraco.

Sejam H uma álgebra de Hopf fraca e M um H-comódulo à direita com estrutura ρ, definimos o conjunto dos coinvariantes por

$$Coinv(M) = \{m \in M : \rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)} = m_{(0)} \otimes \varepsilon_t(m_{(1)})\}.$$

Proposição 2.11 *Seja M um H-módulo de Hopf à direita. Então são verdadeiras as afirmações.*

(i) $Coinv(M) = \{m \in M : \rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)} = m \cdot 1_1 \otimes 1_2\}$.

(ii) *$Coinv(M)$ é um H_t-submódulo à direita de M.*

Demonstração: (i) Notemos que por M ser um H-módulo de Hopf à direita então, para qualquer $m \in M$, temos

$$m_{(0)} \otimes m_{(1)} = \rho(m) = \rho(m \cdot 1_H) = m_{(0)} \cdot 1_1 \otimes m_{(1)} 1_2.$$

Seja $m \in Coinv(M)$. Então $m_{(0)} \otimes m_{(1)} \in M \otimes H_t$ e assim

$$\begin{aligned}
m_{(0)} \otimes m_{(1)} &= m_{(0)} \otimes \varepsilon_t(m_{(1)}) \\
&= m_{(0)} \otimes \varepsilon(1_1 m_{(1)}) 1_2 \\
&= m_{(0)} \otimes \varepsilon(m_{(1)} 1_1) 1_2 && \text{por (4.7) e (4.16)} \\
&= m_{(0)} \cdot 1_{1'} \otimes \varepsilon(m_{(1)} 1_{2'} 1_1) 1_2 \\
&= m_{(0)} \cdot 1_{1'} \otimes \varepsilon(m_{(1)} 1_1 1_{2'}) 1_2 && \text{por (4.16)} \\
&= m_{(0)} \cdot 1_1 \otimes \varepsilon(m_{(1)} 1_2) 1_3 \\
&= m_{(0)} \cdot 1_{1_1} \varepsilon(m_{(1)} 1_{1_2}) \otimes 1_2 \\
&= (m \cdot 1_1)_{(0)} \varepsilon((m \cdot 1_1)_{(1)}) \otimes 1_2 && \text{Def. 2.6 (iii)} \\
&= m \cdot 1_1 \otimes 1_2.
\end{aligned}$$

Seja $m \in \{x \in M : \rho(x) = x_{(0)} \otimes x_{(1)} = x \cdot 1_1 \otimes 1_2\}$. Então $\rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)} = m \cdot 1_1 \otimes 1_2 \in M \otimes H_t$ e portanto, $\rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)} = m_{(0)} \otimes \varepsilon_t(m_{(1)})$.

(ii) Pelo fato de ρ ser k-linear, segue que $Coinv(M)$ é um k-subespaço vetorial de M. Para mostrarmos que $Coinv(M)$ é H_t-submódulo de M, basta mostrarmos que $m \cdot z \in Coinv(M)$, para quaisquer $m \in Coinv(M)$ e $z \in H_t$. Sejam $z \in H_t$ e $m \in Coinv(M)$. Então

$$\begin{aligned}
\rho(m \cdot z) &= (m \cdot z)_{(0)} \otimes (m \cdot z)_{(1)} \\
&= m_{(0)} \cdot z_1 \otimes m_{(1)} z_2 \\
&= (m \cdot 1_1) \cdot z_1 \otimes 1_2 z_2 && (m \in Coinv(M)) \\
&= m \cdot z_1 \otimes z_2 && \text{por (4.1)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= m \cdot z1_1 \otimes 1_2 && \text{por (4.10) e (4.16)} \\
&= (m \cdot z) \cdot 1_1 \otimes 1_2
\end{aligned}
$$

e isso implica que $m \cdot z \in Coinv(M)$. ■

A fim de simplificarmos nossa notação, chamemos $N = Coinv(M)$. Sendo N um H_t-módulo à direita e H um H_t-módulo à esquerda, via a multiplicação, podemos considerar $N \otimes_{H_t} H$. Chamamos a atenção do leitor para o fato de que, ao escrevermos um elemento de $N \otimes_{H_t} H$, não colocamos $\otimes_{H_t}$ para diferenciar de $\otimes_k$ e sim apenas $\otimes$. Acreditamos que isso não causa confusão, pois o contexto deixa claro.

Não é difícil vermos que a seguinte ação fornece, em $N \otimes_{H_t} H$, uma estrutura de H-módulo à direita.

$$(n \otimes h) \cdot g = n \otimes hg, \text{ para quaisquer } n \in N \text{ e } g, h \in H.$$

Além disso, $N \otimes_{H_t} H$ é um H-comódulo à direita com a estrutura

$$\rho(n \otimes h) = (id \otimes_{H_t} \Delta)(n \otimes h) = n \otimes h_1 \otimes h_2, \text{ para quaisquer } n \in N \text{ e } h \in H.$$

De fato, para quaisquer $n \in N$ e $h \in H$, temos

$$(\rho \otimes id)(\rho(n \otimes h)) = \rho(n \otimes h_1) \otimes h_2 = n \otimes h_1 \otimes h_2 \otimes h_3$$

e

$$(id \otimes \Delta)(\rho(n \otimes h)) = n \otimes h_1 \otimes \Delta(h_2) = n \otimes h_1 \otimes h_2 \otimes h_3.$$

Finalmente,

$$(id \otimes \varepsilon)(\rho(n \otimes h)) = (id \otimes \varepsilon)(n \otimes h_1 \otimes h_2) = (n \otimes h_1 \varepsilon(h_2) = n \otimes h,$$

acima foi omitido o isomorfismo canônico entre os espaços $N \otimes_{H_t} H$ e $N \otimes_{H_t} H \otimes k$. ■

Proposição 2.12 *Com a notação acima, $N \otimes_{H_t} H$ é um H-módulo de Hopf à direita.*

Demonstração: Sejam $n \in N$, $g, h \in H$. Então

$$
\begin{aligned}
\rho((n \otimes h) \cdot g) &= \rho(n \otimes hg) \\
&= n \otimes (hg)_1 \otimes (hg)_2 \\
&= n \otimes h_1 g_1 \otimes h_2 g_2 \\
&= (n \otimes h_1) \cdot g_1 \otimes h_2 g_2
\end{aligned}
$$

$$= (n \otimes h)_{(0)} \cdot g_1 \otimes (n \otimes h)_{(1)} g_2.$$

Logo, $N \otimes_{H_t} H$ é um H-módulo de Hopf à direira. ■

A próxima observação é útil na prova do teorema fundamental de módulos de Hopf.

Observação 2.13 Seja M um H-módulo de Hopf à direita com estrutura ρ. Para quaisquer $m \in M$ e $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
(\rho \otimes id)\rho(m \cdot h) &= (\rho \otimes id)(m_{(0)} \cdot h_1 \otimes m_{(1)} h_2) \\
&= \rho(m_{(0)} \cdot h_1) \otimes m_{(1)} h_2 \\
&= m_{(0)_{(0)}} \cdot h_{1_1} \otimes m_{(0)_{(1)}} h_{1_2} \otimes m_{(1)} h_2 \\
&\overset{(*)}{=} m_{(0)} \cdot h_1 \otimes m_{(1)} h_2 \otimes m_{(2)} h_3.
\end{aligned}$$

A igualdade $(*)$ segue do fato de que M é um H-comódulo à direita e de que H é uma coálgebra.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\rho \otimes id)\rho(m \cdot h) &= (\rho \otimes id)((m.h)_{(0)} \otimes (m \cdot h)_{(1)}) \\
&= ((m.h)_{(0)})_{(0)} \otimes ((m \cdot h)_{(0)})_{(1)} \otimes (m \cdot h)_{(1)} \\
&= (m.h)_{(0)} \otimes (m \cdot h)_{(1)} \otimes (m \cdot h)_{(2)}
\end{aligned}$$

e a última igualdade segue do fato de que M é um H-comódulo à direita. Logo,

$$(m \cdot h)_{(0)} \otimes (m \cdot h)_{(1)} \otimes (m \cdot h)_{(2)} = m_{(0)} \cdot h_1 \otimes m_{(1)} h_2 \otimes m_{(2)} h_3.$$

Sejam M e L dois H-módulos de Hopf à direita. Como no caso clássico, dizemos que uma aplicação $F : M \to L$ é um *homomorfismo de H-módulos de Hopf à direita* se F for um homomorfismo de H-módulos e de H-comódulos, ambos à direita.

Agora, estamos aptos a demonstrar o teorema fundamental de módulos de Hopf para o contexto fraco.

Teorema 2.14 (Teorema fundamental de módulos de Hopf) *Seja M um H-módulo de Hopf à direita. Com as notações apresentadas acima, a aplicação*

$$\begin{array}{rccc}
\alpha : & N \otimes_{H_t} H & \to & M \\
& n \otimes h & \mapsto & n \cdot h
\end{array}$$

é um isomorfismo de H-módulos de Hopf à direita.

Demonstração: Começamos observando que a propriedade universal do produto tensorial nos garante que α está bem definida, assim como, que é um homomorfismo de grupos abelianos.

É imediato que α é um homomorfismo de H-módulos à direita. Assim, para verificarmos que α é um homomorfismo de H-Hopf módulos à direita, resta mostrarmos que α é homomorfismo de H-comódulos.

Chamemos ρ_M a aplicação que fornece a estrutura de H-comódulo à direita para M e ρ_L a aplicação que fornece a estrutura de H-comódulo à direita para $N \otimes_{H_t} H$. Sejam $n \in N$ e $h \in H$. Então

$$\begin{aligned}
\rho_M(\alpha(n \otimes h)) &= \rho_M(n \cdot h) \\
&= n_{(0)} \cdot h_1 \otimes n_{(1)} h_2 \\
&= (n \cdot 1_1) \cdot h_1 \otimes 1_2 h_2 && (n \in N) \\
&= n \cdot (1_1 h_1) \otimes 1_2 h_2 \\
&= n \cdot h_1 \otimes h_2 && \text{por (4.1)} \\
&= \alpha(n \otimes h_1) \otimes h_2 \\
&= (\alpha \otimes id)\rho_L(n \otimes h).
\end{aligned}$$

Logo, $\rho_M \alpha = (\alpha \otimes id)\rho_L$, isto é, α é homomorfismo de H-comódulos à direita.

Vamos mostrar que

$$\begin{array}{rccc}
\beta : & M & \to & N \otimes_{H_t} H \\
& m & \mapsto & (m_{(0)} \cdot S(m_{(1)})) \otimes m_{(2)}
\end{array}$$

é a inversa de α. Para isso, primeiramente mostremos que β está bem definida, isto é, $m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) \in N$ para todo $m \in M$. De fato, seja $m \in M$. Então

$$\begin{aligned}
\rho_M(m_{(0)} \cdot S(m_{(1)})) &= m_{(0)_{(0)}} \cdot (S(m_{(1)}))_1 \otimes m_{(0)_{(1)}} (S(m_{(1)}))_2 \\
&= m_{(0)} \cdot S(m_{(3)}) \otimes m_{(1)} S(m_{(2)}) && \text{Teo. 1.26 (ii)} \\
&= m_{(0)} \cdot S(m_{(1)_3}) \otimes m_{(1)_1} S(m_{(1)_2}) \\
&= m_{(0)} \cdot S(1_2 m_{(1)}) \otimes S(1_1) && \text{por (4.39)} \\
&= (m_{(0)} \cdot S(m_{(1)})) \cdot S(1_2) \otimes S(1_1) \\
&= (m_{(0)} \cdot S(m_{(1)})) \cdot 1_1 \otimes 1_2 && \text{por (4.40).}
\end{aligned}$$

Logo, $m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) \in N$ para todo $m \in M$. Mostremos que β é homomorfismo de H-módulos de Hopf. Sejam $m \in M$ e $h \in H$. Então

$$\beta(m \cdot h) = (m \cdot h)_{(0)} \cdot S((m \cdot h)_{(1)}) \otimes (m \cdot h)_{(2)}$$

$$
\begin{aligned}
&= (m_{(0)} \cdot h_1) \cdot S(m_{(1)}h_2) \otimes m_{(2)}h_3 && \text{Obs. 2.13}\\
&= m_{(0)} \cdot (h_1 S(h_2) S(m_{(1)})) \otimes m_{(2)}h_3 &&\\
&= m_{(0)} \cdot (S(1_1) S(m_{(1)}) \otimes m_{(2)}1_2 h && \text{por (4.39)}\\
&= m_{(0)} \cdot S(m_{(1)_1}1_1) \otimes m_{(1)_2}1_2 h &&\\
&= m_{(0)} \cdot S(m_{(1)_1}) \otimes m_{(1)_2} h && \text{por (4.2)}\\
&= m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) \otimes m_{(2)} h &&\\
&= (m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) \otimes m_{(2)}) \cdot h &&\\
&= \beta(m) \cdot h. &&
\end{aligned}
$$

Assim, β é homomorfismo de H-módulos à direita. Agora, mostremos que β é homomorfismo de H-comódulos à direita. Seja $m \in M$. Então

$$
\begin{aligned}
\rho_L(\beta(m)) &= \rho_L(m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) \otimes m_{(2)})\\
&= m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) \otimes m_{(2)_1} \otimes m_{(2)_2}\\
&= m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) \otimes m_{(2)} \otimes m_{(3)}\\
&= m_{(0)_{(0)}} \cdot S(m_{(0)_{(1)}}) \otimes m_{(0)_{(2)}} \otimes m_{(1)}\\
&= \beta(m_{(0)}) \otimes m_{(1)}\\
&= (\beta \otimes id)\rho_M(m).
\end{aligned}
$$

Portanto, β é homomorfismo de H-comódulos à direita. Finalmente, usando que $\rho_M(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)} = \rho_M(m \cdot 1_H) = m_{(0)} \cdot 1_1 \otimes m_{(1)}1_2$, temos

$$
\begin{aligned}
\alpha(\beta(m)) &= \alpha(m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) \otimes m_{(2)}) &&\\
&= (m_{(0)} \cdot S(m_{(1)})) \cdot m_{(2)} &&\\
&= m_{(0)} \cdot S(m_{(1)_1}) m_{(1)_2} &&\\
&= m_{(0)} \cdot \varepsilon_s(m_{(1)}) && \text{por (4.28)}\\
&= m_{(0)} \cdot (1_1 \varepsilon(m_{(1)}1_2)) &&\\
&= (m_{(0)} \cdot 1_1)\varepsilon(m_{(1)}1_2) &&\\
&= m_{(0)}\varepsilon(m_1) = m. &&
\end{aligned}
$$

e isso mostra que $\alpha\beta = id_M$.

Sejam $n \in N$ e $h \in H$. Como M é um H-comódulo à direita e $n \in N$, obtemos

$$
n_{(0)} \otimes n_{(1)} \otimes n_{(2)} = (id \otimes \Delta)\rho_M(n) = (id \otimes \Delta)(n \cdot 1_1 \otimes 1_2) = n \cdot 1_1 \otimes 1_2 \otimes 1_3,
$$

ou seja, $n_{(0)} \otimes n_{(1)} \otimes n_{(2)} = n \cdot 1_1 \otimes 1_2 \otimes 1_3$. Assim, como β é um homomorfismo de H-módulos à direita, temos que

$$\begin{aligned}
\beta(\alpha(n \otimes h)) &= \beta(n \cdot h) \\
&= \beta(n) \cdot h \\
&= (n_{(0)} \cdot S(n_{(1)}) \otimes n_{(2)}) \cdot h \\
&= (n \cdot 1_1) \cdot S(1_2) \otimes 1_3 h \\
&= n \cdot (1_1 S(1_2)) \otimes 1_3 h \\
&= n \cdot \varepsilon_t(1_1) \otimes 1_2 h && \text{por } (4.27) \\
&= n \otimes \varepsilon_t(1_1) 1_2 h && \text{pois } \otimes = \otimes_{H_t} \\
&= n \otimes h.
\end{aligned}$$

Logo, $\beta\alpha = id_{N \otimes_{H_t} H}$ e assim, α é um isomorfismo de H-módulos de Hopf à direita. ■

Observação 2.15 Tendo em mente o Lema 2.9, observamos que $\int_{H^*}^{l} = Coinv(H^*)$. De fato, seja $f \in Coinv(H^*) = \{\phi \in H^* : \rho(\phi) = \phi_{(0)} \otimes \phi_{(1)} = \phi_{(0)} \otimes \varepsilon_t(\phi_{(1)})\}$. Mostremos que $f \in \int_{H^*}^{l}$, isto é, que $g * f = E_t(g) * f$ para qualquer $g \in H^*$. Então, supondo $\rho(f) = f_{(0)} \otimes f_{(1)}$, obtemos

$$\begin{aligned}
g * f &= f_{(0)} g(f_{(1)}) \\
&= f_{(0)} g(\varepsilon_t(f_{(1)})) && (f \in Coinv(H^*)) \\
&= f_{(0)} E_t(g)(f_{(1)}) && \text{por } (4.25) \\
&= E_t(g) * f
\end{aligned}$$

e portanto, $f \in \int_{H^*}^{l}$.

Agora, seja $f \in \int_{H^*}^{l}$. Então $g * f = E_t(g) * f$, para todo $g \in H^*$. Lembremos que H^* é H-comódulo à direita com a estrutura $\rho(f) = f_{(0)} \otimes f_{(1)}$ para a qual $f_{(0)'s} \in H^*$ e $f_{(1)'s} \in H$ são univocamente determinados pela condição $f_{(0)} g(f_{(1)}) = g * f$, para todo $g \in H^*$. Então

$$\begin{aligned}
g * f &= E_t(g) * f \\
&= f_{(0)} E_t(g)(f_{(1)}) \\
&= f_{(0)} g(\varepsilon_t(f_{(1)})) && \text{por } (4.25)
\end{aligned}$$

e isso implica que $\rho(f) = f_{(0)} \otimes f_{(1)} = f_{(0)} \otimes \varepsilon_t(f_{(1)})$. Logo, $\int_{H^*}^{l} = Coinv(H^*)$.

Corolário 2.16 *H^* e $\int_{H^*}^{l} \otimes_{H_t} H$ são isomorfos como H-módulos de Hopf à direita. Em particular, $\int_{H^*}^{l}$ é um subespaço não-nulo de H^*.*

Demonstração: Basta tomarmos $M = H^*$ no Teorema 2.14 e utilizarmos a observação acima. ■

2.3 Teorema de Maschke

Terminamos este capítulo com uma versão fraca para o bem conhecido Teorema de Maschke. Assim como na versão clássica, ele garante a existência de integrais à esquerda em uma álgebra de Hopf fraca H em termos da separabilidade e semissimplicidade de H.

Seja R um anel. Antes de enunciarmos e demonstrarmos esse teorema, lembremos que um R-módulo M é semissimples se todo submódulo de M é um somando direto de M (veja [8], p. 26). Uma das definições equivalentes de semissimplicidade para R é que R é semissimples se, e somente se, todo R-módulo é semissimples (veja [8], Theorem (2.5), p. 28).

Antes de enunciarmos e provarmos o teorema de Maschke, gostaríamos de observar o seguinte fato.

Observação 2.17 Seja H uma álgebra de Hopf fraca. Então $Ker(\varepsilon_t)$ é um ideal à esquerda de H. De fato, sejam $x \in Ker(\varepsilon_t)$ e $y \in H$. Então, por (4.8), obtemos

$$\varepsilon_t(yx) = \varepsilon_t(y\varepsilon_t(x)) = \varepsilon_t(y0) = 0.$$

Portanto, $yx \in Ker(\varepsilon_t)$.

Teorema 2.18 (Teorema de Maschke) *Seja H uma álgebra de Hopf fraca. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *H é semissimples;*

(ii) *Existe uma integral à esquerda $l \in H$ tal que $\varepsilon_t(l) = 1_H$;*

(iii) *H é separável.*

Demonstração: (i)⇒(ii) Suponhamos que H seja semissimples. Como $Ker(\varepsilon_t)$ é um ideal à esquerda de H, então existe um idempotente $p \in H$ tal que $Ker(\varepsilon_t) = Hp$ (veja [8], Exercise 1.7, p. 22). Assim, se $x \in Ker(\varepsilon_t)$ então $x = yp$ para algum $y \in H$ e ainda

$$x(1_H - p) = yp(1_H - p) = yp - yp^2 = 0.$$

Logo, $Ker(\varepsilon_t)(1_H - p) = 0$. Por conseguinte, o item (iv) da Proposição 2.3 garante-nos que $(1_H - p) \in \int_H^l$. Além disso, como $p \in Ker(\varepsilon_t)$ $(p = 1_H p)$, temos

$$\varepsilon_t(1_H - p) = \varepsilon_t(1_H) - \varepsilon_t(p) = \varepsilon_t(1_H) = 1_H.$$

(ii)⇒(iii) Seja $l \in \int_H^l$ tal que $\varepsilon_t(l) = 1_H$. Mostremos que $l_1 \otimes S(l_2)$ é o idempotente de separabilidade segundo a Definição 1.33. Utilizando a Proposição 2.3 (ii), para todo $h \in H$, temos

$$\begin{aligned} l_1 \otimes S^{-1}(h) l_2 &= S(S^{-1}(h)) l_1 \otimes l_2 \\ &= h l_1 \otimes l_2 \end{aligned}$$

e aplicando $id \otimes S$ em ambos os lados da igualdade $l_1 \otimes S^{-1}(h) l_2 = h l_1 \otimes l_2$, obtemos

$$l_1 \otimes S(l_2) h = h l_1 \otimes S(l_2)$$

e, além disso, $l_1 S(l_2) = \varepsilon_t(l) = 1_H$. Portanto, H é separável.

(iii)⇒(i) Suponhamos que H seja separável com idempotente de separabilidade $\sum_i r_i \otimes l_i \in H \otimes H$. Sejam X um H-módulo à esquerda. Provemos que X é semissimples. Suponhamos Y um H-submódulo à esquerda qualquer de X. Então, como k-espaço vetorial, existe Z, k-subespaço de X, tal que $X = Y \oplus Z$ (como k-espaço vetorial). Assim, podemos considerar a projeção linear

$$\begin{array}{rccc} \pi: & X & \to & Y \\ & y + z & \mapsto & y. \end{array}$$

Dessa forma, definimos

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\pi}: & X & \to & X \\ & x & \mapsto & \sum_i r_i \pi(l_i y) \end{array}$$

e vemos, por construção, que $\widehat{\pi}(X) \subseteq Y$. Lembremos que $\sum_i r_i l_i = 1_H$ e que $\sum_i x r_i \otimes l_i = \sum_i r_i \otimes l_i x$, para todo $x \in H$.

Mostremos que $\widehat{\pi}$ é homomorfismo de H-módulos. Claramente, $\widehat{\pi}$ é k-linear. De fato, sejam $h \in H$ e $x \in X$. Então

$$\begin{aligned} \widehat{\pi}(hx) &= \sum_i r_i \pi((l_i h) x) \\ &= \sum_i h r_i \pi(l_i x) \\ &= h \widehat{\pi}(x). \end{aligned}$$

Por conseguinte, $L = Ker(\widehat{\pi})$ é um H-submódulo de X. Vamos mostrar que $X = Y \oplus L$.

Primeiramente, vejamos que se $y \in Y$ então $\widehat{\pi}(y) = y$, pois

$$\widehat{\pi}(y) = \textstyle\sum_i r_i \pi(l_i y) = \sum_i r_i l_i y = 1_H y = y.$$

Agora, notemos que como $\widehat{\pi}(X) \subseteq Y$ segue que $\widehat{\pi}^2 = \widehat{\pi}$. Assim, dado $x \in X$,

$$x = \widehat{\pi}(x) + (x - \widehat{\pi}(x))$$

e $\widehat{\pi}(x) \in Y$ e $(x - \widehat{\pi}(x)) \in L$ (pois $\widehat{\pi}(x - \widehat{\pi}(x)) = \widehat{\pi}(x) - \widehat{\pi}^2(x) = 0$), isto é, $X = Y + L$. Essa soma é direta, pois se $x \in Y \cap L$ então $x = \widehat{\pi}(x) = 0$. Portanto, $X = Y \oplus L$ como H-módulo e isso implica que X é um H-módulo semissimples. Logo, H é semissimples. ■

Se analisarmos a demonstração de (iii) $\Rightarrow$ (i) no teorema acima, percebemos que a estrutura de álgebra de Hopf fraca de H não é usada em sua totalidade na demonstração, isto é, basta a estrutura de álgebra de H.

Com isso, podemos concluir que as subálgebras H_t e H_s de H são semissimples, uma vez que já mostramos que tais álgebras são separáveis na Proposição 1.34.

Capítulo 3

Produto smash fraco e um teorema de dualidade

Neste capítulo, utilizamos [9] como referência principal, onde definimos a noção de ação e coação de uma álgebra de Hopf fraca H em uma álgebra A e mostramos a sua relação de dualidade. Apresentamos uma noção de produto smash $A\#H$ fraco e como objetivo principal deste capítulo, é obtida uma generalização para o teorema de Blattner-Montgomery (veja [1]).

Ao longo do capítulo, H é uma álgebra de Hopf fraca, quando nada for dito ao contrário.

3.1 Produto smash fraco

Iniciamos esta seção generalizando o conceito de ação de álgebra de Hopf no contexto fraco.

Definição 3.1 *Uma álgebra A é dita um H-módulo álgebra à esquerda se*

(i) *A é um H-módulo à esquerda via $h \otimes x \mapsto h \cdot x$, para quaisquer $h \in H$ e $x \in A$.*

(ii) *$h \cdot (xy) = (h_1 \cdot x)(h_2 \cdot y)$, para quaisquer $h \in H$ e $x, y \in A$.*

(iii) *$h \cdot 1_A = \varepsilon_t(h) \cdot 1_A$, para todo $h \in H$.*

Vale observarmos que essa noção de H-módulo álgebra à esquerda generaliza a noção clássica, pois se H for uma álgebra de Hopf no sentido clássico, $\varepsilon_t(h) = \varepsilon(h)1_H$, para todo $h \in H$ e assim, $h \cdot 1_A = \varepsilon(h)1_A$.

Como no caso clássico, também podemos definir H-comódulo álgebra à direita.

Definição 3.2 *Uma álgebra A é dita um H-comódulo álgebra à direita se*

(i) *A é um H-comódulo à direita via, para todo $x \in A$, $\rho(x) = x_{(0)} \otimes x_{(1)}$.*

(ii) *Para quaisquer $x, y \in A$, $\rho(xy) = \rho(x)\rho(y)$, isto é, $(xy)_{(0)} \otimes (xy)_{(1)} = x_{(0)}y_{(0)} \otimes x_{(1)}y_{(1)}$.*

(iii) *$\rho(1_A) = (id \otimes \varepsilon_t)\rho(1_A)$.*

De posse das definições acima, provamos um resultado que, embora não seja usado mais neste trabalho, o mesmo generaliza um resultado da versão clássica (veja [6], Proposition 6.2.4).

Proposição 3.3 *Seja A uma álgebra. Então A é um H-módulo álgebra à esquerda se, e somente se, A é um H^*-comódulo álgebra à direita.*

Demonstração: Suponhamos que A seja um H^*-comódulo álgebra à direita via $\rho(x) = x_{(0)} \otimes x_{(1)} \in A \otimes H^*$.

Consideremos a ação $h \cdot x = x_{(1)}(h)x_{(0)}$ para quaisquer $h \in H$ e $x \in A$. Vejamos que A é um H-módulo à esquerda. Sejam $g, h \in H$ e $x \in A$. Então

$$\begin{aligned}
gh \cdot x &= x_{(1)}(gh)x_{(0)} \\
&= x_{(1)_1}(g)x_{(1)_2}(h)x_{(0)} \\
&\overset{(\star)}{=} x_{(0)_{(1)}}(g)x_{(1)}(h)x_{(0)_{(0)}} \\
&= x_{(0)_{(1)}}(g)x_{(0)_{(0)}}x_{(1)}(h) \\
&= (g \cdot x_{(0)})x_{(1)}(h) \\
&= g \cdot x_{(0)}x_{(1)}(h) \\
&= g \cdot (h \cdot x)
\end{aligned}$$

e $1_H \cdot x = x_{(1)}(1_H)x_{(0)} = E(x_{(1)})x_{(0)} \overset{(\star)}{=} x$. As igualdades $(\star)$ são devidas ao fato de que A é H^*-comódulo à direita. Logo, A é H-módulo à esquerda.

Agora, para quaisquer $x, y \in A$ e $h \in H$ temos

$$\begin{aligned} h \cdot (xy) &= (xy)_{(1)}(h)(xy)_{(0)} \\ &= (x_{(1)} * y_{(1)})(h) x_{(0)} y_{(0)} && \text{Def. 3.2 (ii)} \\ &= x_{(1)}(h_1) y_{(1)}(h_2) x_{(0)} y_{(0)} \\ &= x_{(1)}(h_1) x_{(0)} y_{(1)}(h_2) y_{(0)} \\ &= (h_1 \cdot x)(h_2 \cdot y). \end{aligned}$$

Como $\rho(1_A) = (id \otimes E_t)\rho(1_A)$, temos

$$\begin{aligned} 1_{(0)} \otimes 1_{(1)} &= 1_{(0)} \otimes E_t(1_{(1)}) \\ &= 1_{(0)} \otimes 1_{(1)} \varepsilon_t && \text{por (4.25).} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} h \cdot 1_A &= (1_{(1)} \varepsilon_t)(h) 1_{(0)} \\ &= 1_{(1)}(\varepsilon_t(h)) 1_{(0)} \\ &= \varepsilon_t(h) \cdot 1_A. \end{aligned}$$

Agora, suponhamos que A seja um H-módulo álgebra à esquerda. Sejam $\{f_i\}_{i=1}^n$ uma base de H e $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ sua base dual, isto é, $\phi_i(f_j) = \delta_{ij}$, para quaisquer $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Lembremos que

$$h = \sum_i \phi_i(h) f_i, \quad \text{para todo } h \in H$$

e também do isomorfismo canônico $\Theta : H \to H^{**}$ dado por $\Theta(h)(\varphi) = \varphi(h)$, para quaisquer $h \in H$ e $\varphi \in H^*$.

Definimos, para todo $x \in A$, a seguinte coação

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^n f_i \cdot x \otimes \phi_i$$

vamos mostrar que A é um H^*-comódulo álgebra à direita. Para facilitar a escrita, escrevemos apenas $\sum_i$ para denotar $\sum_{i=1}^n$. Mostremos que A é um H^*-comódulo à direita com tal coação. De fato, considerando $\rho(x) = \sum_i f_i \cdot x \otimes \phi_i$, temos

$$\begin{aligned} (id \otimes \Delta)\rho(x) &= (id \otimes \Delta) \sum_i f_i \cdot x \otimes \phi_i \\ &= \sum_i f_i \cdot x \otimes \phi_{i_1} \otimes \phi_{i_2} \end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}(\rho\otimes id)\rho(x) &= (\rho\otimes id)\textstyle\sum_i f_i\cdot x\otimes\phi_i\\ &= \textstyle\sum_{i,j} f_j\cdot(f_i\cdot x)\otimes\phi_j\otimes\phi_i.\end{aligned}$$

Sejam $\psi,\psi'\in H^{**}$. Então existem únicos $g,h\in H$ tais que $\Theta(g)=\psi$ e $\Theta(h)=\psi'$. Daí,

$$\begin{aligned}(id\otimes\psi\otimes\psi')(\textstyle\sum_i f_i\cdot x\otimes\phi_{i_1}\otimes\phi_{i_2}) =&\textstyle\sum_i f_i\cdot x\,\Theta(g)(\phi_{i_1})\Theta(h)(\phi_{i_2})\\ =&\textstyle\sum_i \phi_{i_1}(g)\phi_{i_2}(h)f_i\cdot x\\ =&\textstyle\sum_i \phi_i(gh)f_i\cdot x\\ =&gh\cdot x\\ =&g\cdot(h\cdot x)\\ =&\textstyle\sum_j f_j\phi_j(g)\cdot(\sum_i f_i\phi_i(h)\cdot x)\\ =&\textstyle\sum_{i,j} f_j\cdot(f_i\cdot x)\phi_j(g)\phi_i(h)\\ =&(id\otimes\psi\otimes\psi')\\ &(\textstyle\sum_{i,j} f_j\cdot(f_i\cdot x)\otimes\phi_j\otimes\phi_i).\end{aligned}$$

Omitimos o isomorfismo existente entre A e $A\otimes k\otimes k$. Logo, $(id\otimes\Delta)\rho=(\rho\otimes id)\rho$. Além disso, temos

$$\begin{aligned}\tau(id\otimes E)\rho(x) &= \tau(id\otimes E)(\textstyle\sum_i f_i\cdot x\otimes\phi_i)\\ &= \textstyle\sum_i f_i\cdot x\,E(\phi_i)\\ &= \textstyle\sum_i (f_i\phi_i(1_H))\cdot x\\ &= 1_H\cdot x\\ &= x\end{aligned}$$

em que τ é o isomorfismo canônico entre A e $A\otimes k$. Portanto, A é um H^*-comódulo à direita.

Provemos que $\rho(1_A)=(id\otimes E_t)\rho(1_A)$. Seja $\gamma\in H^{**}$. Então existe um único $h\in H$ tal que $\gamma=\Theta(h)$, isto é, $\gamma(\varphi)=\Theta(h)(\varphi)=\varphi(h)$, para todo $\varphi\in H^*$.

Assim,

$$\begin{aligned}(id\otimes\gamma)((id\otimes E_t)\rho(1_A)) &= (id\otimes\gamma)\left(\textstyle\sum_i f_i\cdot 1_A\otimes E_t(\phi_i)\right)\\ &= \textstyle\sum_i f_i\cdot 1_A\otimes\gamma(E_t(\phi_i))\\ &= \textstyle\sum_i f_i\cdot 1_A\otimes E_t(\phi_i)(h)\\ &= \textstyle\sum_i f_i\cdot 1_A\otimes\phi_i(\varepsilon_t(h)) && \text{por } (4.25)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \textstyle\sum_i (f_i \cdot 1_A)\phi_i(\varepsilon_t(h)) \otimes 1_k \\
&= \textstyle\sum_i (\phi_i(\varepsilon_t(h) f_i)) \cdot 1_A \otimes 1_k \\
&= \varepsilon_t(h) \cdot 1_A \otimes 1_k \\
&= h \cdot 1_A \otimes 1_k && \text{por hipótese} \\
&= \textstyle\sum_i (f_i \phi_i(h)) \cdot 1_A \otimes 1_k \\
&= \textstyle\sum_i (f_i \cdot 1_A)\phi_i(h) \otimes 1_k \\
&= \textstyle\sum_i (f_i \cdot 1_A) \otimes \phi_i(h) \\
&= \textstyle\sum_i (f_i \cdot 1_A) \otimes \gamma(\phi_i) \\
&= (id \otimes \gamma) \left(\sum_i (f_i \cdot 1_A) \otimes \phi_i \right) \\
&= (id \otimes \gamma)\rho(1_A).
\end{aligned}
$$

Portanto, $(id \otimes E_t)\rho(1_A) = \rho(1_A)$. Agora, sejam $x, y \in A$. Então

$$
\begin{aligned}
(id \otimes \gamma)(\rho(xy)) &= (id \otimes \gamma) \left(\textstyle\sum_i f_i \cdot (xy) \otimes \phi_i \right) \\
&= \textstyle\sum_i f_i \cdot (xy) \otimes \gamma(\phi_i) \\
&= \textstyle\sum_i f_i \cdot (xy) \otimes \phi_i(h) \\
&= \textstyle\sum_i (f_i \cdot (xy))\phi_i(h) \otimes 1_k \\
&= \textstyle\sum_i (f_i \phi_i(h)) \cdot (xy) \otimes 1_k \\
&= h \cdot (xy) \otimes 1_k \\
&= (h_1 \cdot x)(h_2 \cdot y) \otimes 1_k && \text{por hipótese} \\
&= \textstyle\sum_i \sum_j ((\phi_i(h_1) f_i) \cdot x)((\phi_j(h_2) f_j) \cdot y) \otimes 1_k \\
&= \textstyle\sum_i \sum_j (f_i \cdot x)(f_j \cdot y) \otimes \phi_i(h_1)\phi_j(h_2) \\
&= \textstyle\sum_i \sum_j (f_i \cdot x)(f_j \cdot y) \otimes (\phi_i * \phi_j)(h) \\
&= \textstyle\sum_i \sum_j (f_i \cdot x)(f_j \cdot y) \otimes \gamma(\phi_i * \phi_j) \\
&= (id \otimes \gamma)(\rho(x)\rho(y)).
\end{aligned}
$$

Logo, $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$. Assim, A é um H^*-comódulo álgebra à direita. ■

Agora, apresentamos alguns exemplos que são úteis para desenvolvermos resultados futuros.

Exemplo 3.4 H_t é um H-módulo álgebra à esquerda com ação dada por

$$h \cdot z = \varepsilon_t(hz), \text{ para quaisquer } h \in H \text{ e } z \in H_t.$$

Primeiramente verifiquemos que H_t é um H-módulo à esquerda com tal ação. Sejam $z, z' \in H_t$ e $h, h' \in H$. Então

$$\begin{aligned} hh' \cdot z &= \varepsilon_t(hh'z)) \\ &= \varepsilon_t(h\varepsilon_t(h'z)) && \text{por (4.8)} \\ &= \varepsilon_t(h(h' \cdot z)) \\ &= h \cdot (h' \cdot z) \end{aligned}$$

e

$$1_H \cdot z = \varepsilon_t(1_H z) = \varepsilon_t(z) = z.$$

Portanto, H_t é um H-módulo à esquerda com a ação apresentada. Mostremos (ii) da Definição 3.1. Sejam $g, h \in H$. Notemos que

$$\begin{aligned} g\varepsilon_t(h) &= \varepsilon_t(g_1(\varepsilon_t(h))_1)g_2(\varepsilon_t(h))_2 \\ &= \varepsilon_t(g_1 1_1 \varepsilon_t(h))g_2 1_2 && \text{por (4.10)} \\ &= \varepsilon_t(g_1 h)g_2 && \text{por (4.2) e (4.8).} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} h \cdot (zz') &= \varepsilon_t(hzz') \\ &= \varepsilon_t((h\varepsilon_t(z))z') && (z \in H_t) \\ &= \varepsilon_t(\varepsilon_t(h_1 z)h_2 z') \\ &= \varepsilon_t(h_1 z)\varepsilon_t(h_2 z') && \text{por (4.19)} \\ &= (h_1 \cdot z)(h_2 \cdot z'). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} h \cdot 1_H &= \varepsilon_t(h 1_H) = \varepsilon_t(h)1_H \\ &= \varepsilon_t(h)\varepsilon_t(1_H) \\ &= \varepsilon_t(\varepsilon_t(h)1_H) && \text{por (4.19)} \\ &= \varepsilon_t(h) \cdot 1_H. \end{aligned}$$

Portanto, H_t é um H-módulo álgebra à esquerda.

Exemplo 3.5 H^* é um H-módulo álgebra à esquerda via

$$h \rightharpoonup f = f_1 f_2(h), \quad \text{para quaisquer } f \in H^* \text{ e } h \in H.$$

Sabemos que com tal ação H^* é um H-módulo à esquerda. Mostremos

(ii) da Definição 3.1. Sejam $f, g \in H^*$ e $h \in H$. Então

$$\begin{aligned} h \rightharpoonup (f * g) &= (f * g)_1 (f * g)_2(h) \\ &= (f_1 * g_1)(f_2 * g_2)(h) \\ &= (f_1 * g_1) f_2(h_1) g_2(h_2) \\ &= f_1 f_2(h_1) * g_1 g_2(h_2) \\ &= (h_1 \rightharpoonup f) * (h_2 \rightharpoonup g) \end{aligned}$$

e sabendo que ε é a unidade de H^*, para todo $h \in H$, obtemos

$$\begin{aligned} h \rightharpoonup \varepsilon &= \varepsilon_1 \varepsilon_2(h) \\ &= \varepsilon_1 E_t(\varepsilon_2)(h) && \text{por } (4.7) \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_2(\varepsilon_t(h)) && \text{por } (4.25) \\ &= \varepsilon_t(h) \rightharpoonup \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, H^* é um H-módulo álgebra à esquerda.

Exemplo 3.6 H é um H^*-módulo álgebra à esquerda com

$$f \rightharpoonup h = h_1 f(h_2), \ \text{ para quaisquer } f \in H^* \text{ e } h \in H.$$

Sabemos que com tal ação H é um H^*-módulo à esquerda. Sejam $x, y \in H$ e $f \in H^*$. Então

$$\begin{aligned} f \rightharpoonup xy &= (xy)_1 f((xy)_2) \\ &= x_1 y_1 f_1(x_2) f_2(y_2) \\ &= x_1 f_1(x_2) y_1 f_2(y_2) \\ &= (f_1 \rightharpoonup x)(f_2 \rightharpoonup y). \end{aligned}$$

Além disso, obtemos

$$\begin{aligned} f \rightharpoonup 1_H &= 1_1 f(1_2) \\ &= 1_1 f(\varepsilon_t(1_2)) && \text{por } (4.7) \\ &= 1_1 E_t(f)(1_2) && \text{por } (4.25) \\ &= E_t(f) \rightharpoonup 1_H. \end{aligned}$$

Portanto, H é um H^*-módulo álgebra à esquerda.

Nosso objetivo agora é introduzir um novo espaço a partir de um H-módulo álgebra à esquerda A. Para isso, fazemos o próximo resultado.

Lema 3.7 *Seja A um H-módulo álgebra à esquerda. Então são verdadeiras as afirmações.*

(i) *A é um H_t-módulo à direita via*

$$x \triangleleft z = S^{-1}(z) \cdot x, \quad \textit{para quaisquer } x \in A \textit{ e } z \in H_t.$$

(ii) *Para quaisquer $z \in H_t$ e $x \in A$, temos $S^{-1}(z) \cdot x = x(z \cdot 1_A)$, isto é, a ação à direita de H_t em A pode ser vista como $x \triangleleft z = x(z \cdot 1_A)$.*

Demonstração: (i) Sejam $z, z' \in H_t$ e $x, y \in A$. Claramente, $x \triangleleft (z + z') = x \triangleleft z + x \triangleleft z'$ e $(x + y) \triangleleft z = x \triangleleft z + y \triangleleft z$. Agora,

$$\begin{aligned} x \triangleleft (zz') &= S^{-1}(zz') \cdot x \\ &= S^{-1}(z') \cdot (S^{-1}(z) \cdot x) \\ &= S^{-1}(z') \cdot (x \triangleleft z) \\ &= (x \triangleleft z) \triangleleft z' \end{aligned}$$

e

$$x \triangleleft 1_H = S^{-1}(1_H) \cdot x = 1_H \cdot x = x.$$

(ii) Sejam $z \in H_t$ e $x \in A$. Pela Observação 1.30 temos que $S^{-1}(z) \in H_s$. Assim, sendo A um H-módulo álgebra à esquerda, primeiramente notemos que

$$\begin{aligned} x \triangleleft z &= S^{-1}(z) \cdot x \\ &= S^{-1}(z) \cdot (x1_A) \\ &= ((S^{-1}(z))_1 \cdot x)((S^{-1}(z))_2 \cdot 1_A) && \text{por hipótese} \\ &= (1_1 \cdot x)(S^{-1}(z)1_2 \cdot 1_A) && \text{por (4.11)} \\ &= (1_1 \cdot x)(1_2 \cdot (S^{-1}(z) \cdot 1_A)) && \text{por hipótese e (4.16)} \\ &= 1_H \cdot (x(S^{-1}(z) \cdot 1_A)) = x(S^{-1}(z) \cdot 1_A) \\ &= x(\varepsilon_t(S^{-1}(z)) \cdot 1_A) && \text{por hipótese} \\ &= x(\varepsilon_t(\varepsilon_s(S^{-1}(z))) \cdot 1_A) && (S^{-1}(z) \in H_s) \\ &= x(\varepsilon_t(S(S^{-1}(z))) \cdot 1_A) && \text{por (4.34)} \\ &= x(\varepsilon_t(z) \cdot 1_A) \\ &= x(z \cdot 1_A). \end{aligned}$$

Logo, $x \triangleleft z = S^{-1}(z) \cdot x = x(z \cdot 1_A)$. ■

A pertinência de colocar (ii), é devida ao fato de que a ação de H_t em A dada daquela forma, será útil para desenvolvermos resultados posteriores.

Observação 3.8 Dado um H-módulo álgebra à esquerda A, podemos considerar o espaço $A \otimes_{H_t} H$, em que A é um H_t-módulo à direita via a ação dada no Lema 3.7 e H é H_t-módulo à esquerda via multiplicação. Assim, fica generalizada a noção de produto smash do caso clássico para o contexto fraco.

Definição 3.9 *Seja A um H-módulo álgebra à esquerda, consideremos A e H como H_t-módulos à direita e à esquerda, respectivamente, segundo a observação acima, definimos o produto smash $A\#H$ de A e H como sendo o k-espaço vetorial $A \otimes_{H_t} H$. Representando $a \otimes h$ por $a\#h$ temos, para quaisquer $x, y \in A$ e $g, h \in H$, a seguinte multiplicação:*

$$(x\#h)(y\#g) = x(h_1 \cdot y)\#h_2 g.$$

Teorema 3.10 *Seja A um H-módulo álgebra à esquerda. Então $A\#H$, com o produto definido acima, é uma álgebra com unidade $1_A\#1_H$.*

Demonstração: Sejam $x, y, t \in A$ e $g, h, l \in H$. Mostremos a associatividade do produto definido

$$\begin{aligned}
(x\#g)((y\#h)(t\#l)) &= (x\#g)(y(h_1 \cdot t)\#h_2 l) \\
&= x(g_1 \cdot (y(h_1 \cdot t)))\#g_2 h_2 l \\
&= x(g_1 \cdot y)(g_2 \cdot (h_1 \cdot t))\#g_3 h_2 l \\
&= x(g_1 \cdot y)((g_2 h)_1 \cdot t)\#(g_2 h)_2 l \\
&= (x(g_1 \cdot y)\#g_2 h)(t\#l) \\
&= ((x\#g)(y\#h))(t\#l).
\end{aligned}$$

Donde segue a associatividade do produto. Além disso,

$$\begin{aligned}
(x\#g)(1_A\#1_H) &= x(g_1 \cdot 1_A)\#g_2 1_H & \\
&= x(\varepsilon_t(g_1) \cdot 1_A)\#g_2 & \\
&= x \triangleleft \varepsilon_t(g_1)\#g_2 & \text{Lema 3.7 (ii)} \\
&= x\#\varepsilon_t(g_1) g_2 & \text{pois } \otimes = \otimes_{H_t} \\
&= x\#g &
\end{aligned}$$

e

$$(1_A\#1_H)(x\#g) = 1_A(1_1 \cdot x)\#1_2 g$$

$$
\begin{aligned}
&= (1_1 \cdot x) \triangleleft 1_2 \# g && \text{por (4.7) e } \otimes = \otimes_{H_t} \\
&= (1_1 \cdot x)(1_2 \cdot 1_A) \# g && \text{Lema 3.7 (ii)} \\
&= 1_H \cdot (x 1_A) \# g = x \# g.
\end{aligned}
$$

■

3.2 Teorema de dualidade

Dada uma álgebra de Hopf H, no sentido clássico, de dimensão finita, foi demonstrado em [1], que existe um isomorfismo de álgebras entre $(A\#H)\#H^*$ e $M_n(A)$, em que $n = dim(H)$ e $M_n(A)$ é a álgebra de matrizes $n \times n$, com entradas em A.

Mostraremos que este resultado se estende no contexto de álgebras de Hopf fracas para o isomorfismo entre as álgebras $(A\#H)\#H^*$ e $End_k(A\#H)_A$, em que $(A\#H)\#H^* = (A \otimes_{H_t} H) \otimes_{H_t^*} H^*$ como k-espaços vetoriais. A observação abaixo começa a preparação para isso.

Observação 3.11 Seja A um H-módulo álgebra à esquerda. Sejam $x, y \in A$ e $h \in H$. Não é difícil ver que $A\#H$ é um A-módulo à direita via

$$(x\#h) \triangleleft y = (x\#h)(y\#1_H) = x(h_1 \cdot y)\#h_2.$$

Lema 3.12 *Seja A um H-módulo álgebra à esquerda. Então $A\#H$ é um H^*-módulo álgebra à esquerda via*

$$f \cdot (x\#h) = x\#(f \rightharpoonup h), \ \textit{para quaisquer } f \in H^*,\ h \in H \textit{ e } x \in A.$$

Demonstração: Já sabemos que H é um H^*-módulo à esquerda via $\rightharpoonup$ dada por (4.21) do Apêndice. Mostremos que $A\#H$ é um H^*-módulo à esquerda. Sejam $f, g \in H^*$, $x \in A$ e $h \in H$. Então

$$\varepsilon \cdot (x\#h) = x\#\varepsilon \rightharpoonup h = x\#h$$

e

$$
\begin{aligned}
f \cdot (g \cdot (x\#h)) &= f \cdot (x\#g \rightharpoonup h) \\
&= x\#f \rightharpoonup (g \rightharpoonup h) \\
&= x\#f * g \rightharpoonup h \\
&= (f * g) \cdot (x\#h).
\end{aligned}
$$

Portanto, $A\#H$ é um H^*-módulo à esquerda com tal ação. Vimos no Exemplo 3.6 que H é H^*-módulo álgebra à esquerda com $\rightharpoonup$. Além disso, para quaisquer $f \in H^*$ e $h \in H$, notemos que

$$\Delta(f \rightharpoonup h) = \Delta(h_1 f(h_2)) = h_1 \otimes h_2 f(h_3). \qquad (*)$$

Assim, para quaisquer $x, y \in A$, $h, l \in H$ e $f \in H^*$, temos

$$\begin{aligned}
(f_1 \cdot (x\#h))(f_2 \cdot (y\#l)) &= (x\#f_1 \rightharpoonup h)(y\#f_2 \rightharpoonup l) \\
&= x((f_1 \rightharpoonup h)_1 \cdot y)\#(f_1 \rightharpoonup h)_2(f_2 \rightharpoonup l) \\
&= x(h_1 \cdot y)\#h_2 f_1(h_3)(f_2 \rightharpoonup l) && \text{por } (*) \\
&= x(h_1 \cdot y)\#(f_1 \rightharpoonup h_2)(f_2 \rightharpoonup l) \\
&= x(h_1 \cdot y)\#f \rightharpoonup (h_2 l) \\
&= f \cdot ((x\#h)(y\#l)).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
f \cdot (1_A \# 1_H) &= 1_A \# f \rightharpoonup 1_H \\
&= 1_A \# E_t(f) \rightharpoonup 1_H \\
&= E_t(f) \cdot (1_A \# 1_H).
\end{aligned}$$

■

Com esse lema, podemos considerar $(A\#H)\#H^*$, uma vez que o mesmo nos diz que $A\#H$ é um H^*-módulo álgebra à esquerda.

Lema 3.13 *Seja A um H-módulo álgebra à esquerda. Então*

$$zh \cdot x = (z \cdot 1_A)(h \cdot x) \quad \textit{para quaisquer } z \in H_t,\ h \in H \textit{ e } x \in A.$$

Demonstração: Sejam $z \in H_t$, $h \in H$ e $x \in A$. Então

$$\begin{aligned}
zh \cdot x &= z \cdot (h \cdot x) \\
&= z \cdot (1_A(h \cdot x)) \\
&= (z_1 \cdot 1_A)(z_2 \cdot (h \cdot x)) \\
&= (1_1 z \cdot 1_A)(1_2 \cdot (h \cdot x)) && \text{por } (4.10) \\
&= (1_1 \cdot (z \cdot 1_A))(1_2 \cdot (h \cdot x)) \\
&= 1_H \cdot ((z \cdot 1_A)(h \cdot x)) \\
&= (z \cdot 1_A)(h \cdot x).
\end{aligned}$$

■

Teorema 3.14 *Seja A um H-módulo álgebra à esquerda. Então a aplicação $\psi : A\#H \to End_k(A)$ dada por*

$$\psi(y\#h)(x) = y(h \cdot x)$$

é um homomorfismo de álgebras.

Demonstração: Definimos $\overline{\psi} : A \times H \to End_k(A)$ por

$$\overline{\psi}(y, h)(x) = y(h \cdot x), \text{ para quaisquer } x, y \in A \text{ e } h \in H.$$

Claramente, $\overline{\psi}(y, h) \in End_k(A)$, para quaisquer $y \in A$ e $h \in H$, pois é obviamente k-linear. Mostremos que $\overline{\psi}$ é H_t-balanceada. De fato, para quaisquer $x, y, t \in A$ e $h, h' \in H$, temos

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}(y + t, h)(x) &= (y + t)(h \cdot x) \\
&= y(h \cdot x) + t(h \cdot x) \\
&= \overline{\psi}(y, h)(x) + \overline{\psi}(t, h)(x)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}(y, h + h')(x) &= y(h + h' \cdot x) \\
&= y(h \cdot x + h' \cdot x) \\
&= \overline{\psi}(y, h)(x) + \overline{\psi}(y, h')(x).
\end{aligned}$$

Agora, sejam $z \in H_t$, $h \in H$ e $x, y \in A$. Então

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}(y \triangleleft z, h)(x) &= (y \triangleleft z)(h \cdot x) \\
&= y(z \cdot 1_A)(h \cdot x) && \text{Lema 3.7 (ii)} \\
&= y(zh \cdot x) && \text{Lema 3.13} \\
&= \overline{\psi}(y, zh)(x).
\end{aligned}$$

Portanto, $\overline{\psi}$ é H_t-balanceada. Assim, pela propriedade universal do produto tensorial, existe um único homomorfismo de grupos ψ tal que $\psi(y\#h) = \overline{\psi}(y, h)$, isto é, $\psi(y\#h)(x) = y(h \cdot x)$ para quaisquer $x, y \in A$ e $h \in H$.

Resta mostrarmos que ψ é um homomorfismo de álgebras. Sejam $x, y, t \in A$ e $h, g \in H$. Então

$$\begin{aligned}
\psi((y\#h)(t\#g))(x) &= \psi(y(h_1 \cdot t)\#h_2 g)(x) \\
&= y(h_1 \cdot t)(h_2 g \cdot x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= y(h_1 \cdot t)(h_2 \cdot (g \cdot x)) \\
&= y(h \cdot (t(g \cdot x))) \\
&= \psi(y\#h)(\psi(t\#g)(x)) \\
&= (\psi(y\#h)\psi(t\#g))(x)
\end{aligned}
$$

e finalmente,

$$\psi(1_A\#1_H)(x) = 1_A(1_H \cdot x) = 1_A x = x = id(x).$$

■

Lema 3.15 *Seja A um H-módulo álgebra à esquerda. Então a aplicação $\alpha : (A\#H)\#H^* \to End_k(A\#H)_A$ definida por*

$$\alpha((x\#h)\#f)(y\#l) = (x\#h)(y\#f \rightharpoonup l) = x(h_1 \cdot y)\#h_2(f \rightharpoonup l)$$

é um homomorfismo de álgebras.

Demonstração: Sabemos, pelo Lema 3.12, que $A\#H$ é um H^*-módulo álgebra à esquerda. Assim, estamos nas hipóteses do Teorema 3.14. Portanto, a aplicação $\psi : (A\#H)\#H^* \to End_k(A\#H)$ dada por

$$\psi((x\#h)\#f)(y\#l) = (x\#h)(f \cdot (y\#l)) = (x\#h)(y\#f \rightharpoonup l)$$

é um homomorfismo de álgebras.

Definindo $\alpha : (A\#H)\#H^* \to End_k(A\#H)_A$ por

$$\alpha((x\#h)\#f)(y\#l) = (x\#h)(y\#f \rightharpoonup l),$$

restaria mostrarmos que, para quaisquer $x \in A$, $h \in H$ e $f \in H^*$, $\alpha((x\#h)\#f) \in End_k(A\#H)_A$, isto é, que tal função é k-linear (isso é claro) e é um endomorfismo do A-módulo (à direita) $A\#H$.

Lembremos que $(f \rightharpoonup h)_1 \otimes (f \rightharpoonup h)_2 = \Delta(f \rightharpoonup h) = h_1 \otimes f \rightharpoonup h_2$. Assim, para quaisquer $x, y, t \in A$, $h, w \in H$ e $f \in H^*$, temos

$$
\begin{aligned}
\alpha((x\#h)\#f)((y\#w) \triangleleft t) &= \alpha((x\#h)\#f)(y(w_1 \cdot t)\#w_2) \quad \text{Obs. 3.11} \\
&= (x\#h)(y(w_1 \cdot t)\#(f \rightharpoonup w_2)) \\
&= (x\#h)(y((f \rightharpoonup w)_1 \cdot t)\#(f \rightharpoonup w)_2 1_H) \\
&= (x\#h)(y\#f \rightharpoonup w)(t\#1_H) \\
&= (\alpha((x\#h)\#f)(y\#w))(t\#1_H) \\
&= (\alpha((x\#h)\#f)(y\#w)) \triangleleft t.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\alpha((x\#h)\#f)$ é um homomorfismo de A-módulos à direita e o lema está provado. $\blacksquare$

Antes de provarmos o teorema de dualidade, lembremos que se $\{f_i\}_{i=1}^n$ é uma base de H e $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ é sua base dual em H^* tal que $\phi_j(f_i) = \delta_{ij}$ para $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, então, para quaisquer $h \in H$ e $g \in H^*$, temos

$$h = \textstyle\sum_i \phi_i(h) f_i \ \text{ e } \ g = \sum_i g(f_i)\phi_i. \qquad (\triangle)$$

Como já dissemos antes, escrevemos $\sum_i$ ao invés de $\sum_i^n$, para facilitar a escrita.

Teorema 3.16 (Teorema da dualidade fraca) *Sejam H uma álgebra de Hopf fraca e A um H-módulo álgebra à esquerda. Então $(A\#H)\#H^*$ e $End_k(A\#H)_A$ são álgebras isomorfas.*

Demonstração: Consideremos a aplicação α dada no Lema 3.15 e definimos

$$\begin{array}{llll} \beta: & End_k(A\#H)_A & \to & (A\#H)\#H^* \\ & T & \mapsto & \sum_i T(1_A\#f_{i_2})(1_A\#S^{-1}(f_{i_1}))\#\phi_i. \end{array}$$

Precisamos provar que $\beta\alpha = id_{(A\#H)\#H^*}$ e que $\alpha\beta = id_{End_k(A\#H)_A}$. Sejam $x \in A$, $h \in H$ e $\varphi \in H^*$. Calculemos $\beta\alpha$.

$$\begin{aligned} \beta(\alpha((x\#h)\#\varphi)) &= \textstyle\sum_i \alpha((x\#h)\#\varphi)(1_A\#f_{i_2})(1_A\#S^{-1}(f_{i_1}))\#\phi_i \\ &= \textstyle\sum_i (x(h_1 \cdot 1_A)\#h_2(\varphi \rightharpoonup f_{i_2}))(1_A\#S^{-1}(f_{i_1}))\#\phi_i \\ &= \textstyle\sum_i (x(\varepsilon_t(h_1) \cdot 1_A)\#h_2(\varphi \rightharpoonup f_{i_2}))(1_A\#S^{-1}(f_{i_1}))\#\phi_i \\ &\overset{3.7(ii)}{=} \textstyle\sum_i (x \triangleleft \varepsilon_t(h_1)\#h_2(\varphi \rightharpoonup f_{i_2}))(1_A\#S^{-1}(f_{i_1}))\#\phi_i \\ &\overset{(\otimes=\otimes_{H_t})}{=} \textstyle\sum_i (x\#\varepsilon_t(h_1)h_2(\varphi \rightharpoonup f_{i_2}))(1_A\#S^{-1}(f_{i_1}))\#\phi_i \\ &= \textstyle\sum_i (x\#h(\varphi \rightharpoonup f_{i_2}))(1_A\#S^{-1}(f_{i_1}))\#\phi_i \\ &= \textstyle\sum_i (x((h(\varphi \rightharpoonup f_{i_2}))_1 \cdot 1_A)\#(h(\varphi \rightharpoonup f_{i_2}))_2 \\ &\quad S^{-1}(f_{i_1}))\#\phi_i \\ &= \textstyle\sum_i (x(\varepsilon_t((h(\varphi \rightharpoonup f_{i_2}))_1) \cdot 1_A)\#(h(\varphi \rightharpoonup f_{i_2}))_2 \\ &\quad S^{-1}(f_{i_1}))\#\phi_i \\ &\overset{3.7(ii)}{=} \textstyle\sum_i (x \triangleleft \varepsilon_t((h(\varphi \rightharpoonup f_{i_2}))_1)\#(h(\varphi \rightharpoonup f_{i_2}))_2 \\ &\quad S^{-1}(f_{i_1}))\#\phi_i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(\otimes=\otimes_{H_t})}{=}\textstyle\sum_i (x\#\varepsilon_t((h(\varphi \rightharpoonup f_{i_2}))_1)(h(\varphi \rightharpoonup f_{i_2}))_2 \\
&\quad S^{-1}(f_{i_1}))\#\phi_i \\
&=\textstyle\sum_i (x\#h(\varphi \rightharpoonup f_{i_2})S^{-1}(f_{i_1}))\#\phi_i \\
&=\textstyle\sum_i (x\#h\varphi(f_{i_3})(f_{i_2}S^{-1}(f_{i_1})))\#\phi_i \\
&=\textstyle\sum_i (x\#h\varphi(1_2 f_i)1_1)\#\phi_i && \text{por (4.41)} \\
&=\textstyle\sum_i (x\#h\varphi_1(1_2)1_1\varphi_2(f_i))\#\phi_i \\
&\overset{(\star)}{=}\sum_i (x\#h(\varphi_1 \rightharpoonup 1_H))\#\varphi_2(f_i)\phi_i \\
&=(x\#h(\varphi_1 \rightharpoonup 1_H))\#\varphi_2 && \text{por } (\triangle) \\
&\overset{(\star\star)}{=}(x\#h)\#E_t(\varphi_1)\varphi_2 \\
&=(x\#h)\#\varphi \\
&=id_{(A\#H)\#H^*}((x\#h)\#\varphi),
\end{aligned}
$$

em que 3.7 (ii) refere-se ao Lema 3.7.

Agora provemos as igualdades $(\star)$ e $(\star\star)$. Como $\varepsilon \in H_t^*$ então $\varphi_2(f_i)\varepsilon \in H_t^*$ para quaisquer i e $\varphi_{2's}$. Portanto, esses elementos de H_t^* podem balancear no segundo tensor de $(A\#H)\#H^*$. Lembramos que $S^{*-1}(\varepsilon) = \varepsilon$. Assim, a igualdade $(\star)$ é justificada por

$$
\begin{aligned}
\textstyle\sum_i (x\#h(\varphi_1 \rightharpoonup 1_H))\#\varphi_2(f_i)\phi_i &=\textstyle\sum_i (x\#h(\varphi_1 \rightharpoonup 1_H))\#\varphi_2(f_i)\varepsilon * \phi_i \\
&=\textstyle\sum_i (x\#h(\varphi_1 \rightharpoonup 1_H)) \triangleleft (\varphi_2(f_i)\varepsilon)\#\phi_i \\
&\overset{3.7(\mathrm{i})}{=}\textstyle\sum_i S^{*^{-1}}(\varphi_2(f_i)\varepsilon)\cdot(x\#h(\varphi_1 \rightharpoonup 1_H))\#\phi_i \\
&=\textstyle\sum_i (\varphi_2(f_i)\varepsilon)\cdot(x\#h(\varphi_1 \rightharpoonup 1_H))\#\phi_i \\
&\overset{3.12}{=}\textstyle\sum_i (x\#(\varphi_2(f_i)\varepsilon) \rightharpoonup h(\varphi_1 \rightharpoonup 1_H))\#\phi_i \\
&=\textstyle\sum_i (x\#\varphi_2(f_i)(\varepsilon \rightharpoonup h(\varphi_1 \rightharpoonup 1_H)))\#\phi_i \\
&=\textstyle\sum_i (x\#\varphi_2(f_i)h(\varphi_1 \rightharpoonup 1_H))\#\phi_i \\
&=\textstyle\sum_i (x\#h\varphi_1(1_2)1_1\varphi_2(f_i))\#\phi_i .
\end{aligned}
$$

Para a igualdade em $(\star\star)$, observamos que $E_t(\varphi_1) \in H_t^*$ e assim,

$$
\begin{aligned}
(x\#h)\#E_t(\varphi_1)\varphi_2 &=(x\#h) \triangleleft E_t(\varphi_1)\#\varphi_2 \\
&\overset{3.7(\mathrm{i})}{=}(S^{*^{-1}}(E_t(\varphi_1))\cdot(x\#h))\#\varphi_2 \\
&=((x\#h)(E_t(\varphi_1)\cdot(1_A\#1_H)))\#\varphi_2 \\
&\overset{3.12}{=}((x\#h)(\varphi_1\cdot(1_A\#1_H)))\#\varphi_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{3.12}{=}((x\#h)(1_A\#\varphi_1 \rightharpoonup 1_H))\#\varphi_2\\
&=(x(h_1\cdot 1_A)\#h_2(\varphi_1 \rightharpoonup 1_H))\#\varphi_2\\
&=(x(\varepsilon_t(h_1)\cdot 1_A)\#h_2(\varphi_1 \rightharpoonup 1_H))\#\varphi_2\\
&\overset{3.7(\text{ii})}{=}(x\triangleleft\varepsilon_t(h_1)\#h_2(\varphi_1 \rightharpoonup 1_H))\#\varphi_2\\
&=(x\#\varepsilon_t(h_1)h_2(\varphi_1 \rightharpoonup 1_H))\#\varphi_2\\
&=(x\#h(\varphi_1 \rightharpoonup 1_H))\#\varphi_2,
\end{aligned}
$$

em que 3.7 (i), 3.7 (ii) e 3.12 referem-se aos lemas deste capítulo.

Portanto, $\beta\alpha = id_{(A\#H)\#H^*}$. Resta mostrarmos que $\alpha\beta = id_{End_k(A\#H)_A}$. Sejam $T\in End_k(A\#H)_A$, $y\in A$ e $g\in H$. Então

$$
\begin{aligned}
\alpha(\beta(T))(y\#g) &=\textstyle\sum_i \alpha(T(1_A\#f_{i_2})(1_A\#S^{-1}(f_{i_1}))\#\phi_i)(y\#g)\\
&=\textstyle\sum_i T(1_A\#f_{i_2})(1_A\#S^{-1}(f_{i_1}))(y\#\phi_i \rightharpoonup g)\\
&=\textstyle\sum_i T(1_A\#f_{i_2})(1_A((S^{-1}(f_{i_1}))_1\cdot y)\#(S^{-1}(f_{i_1}))_2(\phi_i \rightharpoonup g))\\
&=\textstyle\sum_i T(1_A\#f_{i_2})(S^{-1}(f_{i_{1_2}})\cdot y\#S^{-1}(f_{i_{1_1}})\phi_i(g_2)g_1)\\
&=\textstyle\sum_i T(1_A\#f_{i_3})(S^{-1}(f_{i_2})\cdot y\#S^{-1}(f_{i_1}\phi_i(g_2))g_1)\\
&\overset{(*)}{=}T(1_A\#g_{2_3})(S^{-1}(g_{2_2})\cdot y\#S^{-1}(g_{2_1})g_1)\\
&=T(1_A\#g_4)(S^{-1}(g_3)\cdot y\#S^{-1}(g_2)g_1)\\
&\overset{(**)}{=}T(1_A\#g_3)(S^{-1}(g_2)\cdot y\#S^{-1}(\varepsilon_s(g_1))1_H)\\
&=T(1_A\#g_3)((S^{-1}(g_2)\cdot y)\triangleleft S^{-1}(\varepsilon_s(g_1))\#1_H) \quad \text{Obs. 1.30}\\
&\overset{3.7(\text{ii})}{=}T(1_A\#g_3)((S^{-1}(g_2)\cdot y)(S^{-1}(\varepsilon_s(g_1))\cdot 1_A)\#1_H)\\
&\overset{(4.13)}{=}T(1_A\#g_2)((S^{-1}(g_1 1_2)\cdot y)(S^{-1}(1_1)\cdot 1_A)\#1_H)\\
&=T(1_A\#g_2)((S^{-1}(1_2)\cdot(S^{-1}(g_1)\cdot y))(S^{-1}(1_1)\cdot 1_A)\#1_H)\\
&=T(1_A\#g_2)(((S^{-1}(1_H))_1\cdot(S^{-1}(g_1)\cdot y))\\
&\quad ((S^{-1}(1))_2\cdot 1_A)\#1_H)\\
&=T(1_A\#g_2)(S^{-1}(1_H)\cdot((S^{-1}(g_1)\cdot y)1_A)\#1_H)\\
&=T(1_A\#g_2)(S^{-1}(g_1)\cdot y\#1_H)\\
&=T(1_A\#g_2)\triangleleft(S^{-1}(g_1)\cdot y) \quad \text{Obs. 3.11}\\
&=T((1_A\#g_2)\triangleleft(S^{-1}(g_1)\cdot y)) \quad (T\in End_k(A\#H)_A)\\
&=T((1_A\#g_2)(S^{-1}(g_1)\cdot y\#1_H)) \quad \text{Obs. 3.11}\\
&=T(1_A(g_{2_1}\cdot(S^{-1}(g_1)\cdot y))\#g_{2_2}1_H)\\
&=T(1_A((g_2S^{-1}(g_1))\cdot y)\#g_3 1_H)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= T(1_A(1_1 \cdot y)\#1_2 g) && \text{por } (4.41)\\
&= T((1_A\#1_H)(y\#g))\\
&= T(y\#g),
\end{aligned}
$$

as igualdades $(*)$ e $(**)$ são justificadas abaixo.

Uma vez que $g_2 = \sum_i f_i\phi_i(g_2)$, a igualdade $(*)$ é obtida por

$$
\begin{aligned}
g_{2_1} \otimes g_{2_2} \otimes g_{2_3} &= \Delta^2(g_2)\\
&= \textstyle\sum_i \phi_i(g_2)\Delta^2(f_i)\\
&= \textstyle\sum_i f_{i_1}\phi_i(g_2) \otimes f_{i_2} \otimes f_{i_3}.
\end{aligned}
$$

Para a igualdade $(**)$, para todo $g \in H$, temos que $S(g_1)g_2 = \varepsilon_s(g)$. Aplicando S^{-1} em ambos os lados dessa igualdade, segue que $S^{-1}(g_2)g_1 = S^{-1}(\varepsilon_s(g))$. Logo, $\alpha\beta = id_{End_k(A\#H)_A}$. ■

Assim, atingimos o objetivo principal desta dissertação. Precisamente, embasados em [9], o Teorema 3.16, é uma generalização do teorema de dualidade (Blattner-Montgomery, [1]) para o contexto de álgebras de Hopf fracas.

Capítulo 4

Apêndice

Neste apêndice encontram-se as principais identidades utilizadas em todo o trabalho. Acreditamos que colocá-las neste espaço e referenciá-las diretamente daqui proporciona uma maior facilidade de leitura.

No que se segue, apresentamos as identidades e suas respectivas numerações. Apresentamos também, um marcador que referencia a página na qual a identidade encontra-se demonstrada.

$$x_1 \otimes x_2 = 1_1 x_1 \otimes 1_2 x_2 \qquad \text{(p. 6)} \tag{4.1}$$

$$x_1 \otimes x_2 = x_1 1_1 \otimes x_2 1_2 \qquad \text{(p. 6)} \tag{4.2}$$

$$\varepsilon_t(\varepsilon_t(x)) = \varepsilon_t(x) \qquad \text{(p. 15)} \tag{4.3}$$

$$\varepsilon_s(\varepsilon_s(x)) = \varepsilon_s(x) \qquad \text{(p. 15)} \tag{4.4}$$

$$\varepsilon(x\varepsilon_t(z)) = \varepsilon(xz) \qquad \text{(p. 15)} \tag{4.5}$$

$$\varepsilon(\varepsilon_s(x)z) = \varepsilon(xz) \qquad \text{(p. 15)} \tag{4.6}$$

$$\Delta(1_H) = 1_1 \otimes 1_2 \in H_s \otimes H_t \qquad \text{(p. 16)} \tag{4.7}$$

$$\varepsilon_t(x\varepsilon_t(y)) = \varepsilon_t(xy) \qquad \text{(p. 18)} \tag{4.8}$$

$$\varepsilon_s(\varepsilon_s(x)y) = \varepsilon_s(xy) \qquad \text{(p. 18)} \tag{4.9}$$

$$z_1 \otimes z_2 = \Delta(z) = 1_1 z \otimes 1_2,\ \forall z \in H_t \qquad \text{(p. 18)} \tag{4.10}$$

$$y_1 \otimes y_2 = \Delta(y) = 1_1 \otimes y 1_2,\ \forall y \in H_s \qquad \text{(p. 18)} \tag{4.11}$$

$$x_1 \otimes \varepsilon_t(x_2) = 1_1 x \otimes 1_2 \qquad \text{(p. 19)} \tag{4.12}$$

$$\varepsilon_s(x_1) \otimes x_2 = 1_1 \otimes x 1_2 \qquad \text{(p. 19)} \tag{4.13}$$

$$x\varepsilon_t(y) = \varepsilon(x_1 y)x_2 \qquad \text{(p. 19)} \tag{4.14}$$

$$\varepsilon_s(x)y = y_1\varepsilon(xy_2) \qquad \text{(p. 19)} \tag{4.15}$$

$xy = yx,\ \forall x \in H_t,\ \forall y \in H_s$ (p. 20) (4.16)

$1_{1'} \otimes \varepsilon_t(1_{2'}) \otimes 1_{3'} = 1_1 1_{1'} \otimes 1_2 \otimes 1_{2'}$ (p. 20) (4.17)

$1_1 \otimes \varepsilon_s(1_2) \otimes 1_3 = 1_1 \otimes 1_{1'} \otimes 1_2 1_{2'}$ (p. 20) (4.18)

$\varepsilon_t(\varepsilon_t(x)y) = \varepsilon_t(x)\varepsilon_t(y)$ (p. 22) (4.19)

$\varepsilon_s(x\varepsilon_s(y)) = \varepsilon_s(x)\varepsilon_s(y)$ (p. 22) (4.20)

$f \rightharpoonup x = f(x_2)x_1,\ \forall x \in H, \forall f \in H^*$ (p. 22) (4.21)

$x \leftharpoonup f = f(x_1)x_2,\ \forall x \in H, \forall f \in H^*$ (p. 22) (4.22)

$x \rightharpoonup f = f_2(x)f_1,\ \forall x \in H, \forall f \in H^*$ (p. 23) (4.23)

$f \leftharpoonup x = f_1(x)f_2,\ \forall x \in H, \forall f \in H^*$ (p. 23) (4.24)

$E_t(f) = f\varepsilon_t,\ \forall f \in H^*$ (p. 23) (4.25)

$E_s(f) = f\varepsilon_s,\ \forall f \in H^*$ (p. 23) (4.26)

$h_1 S(h_2) = \varepsilon_t(h),\ \forall h \in H$ (p. 29) (4.27)

$S(h_1)h_2 = \varepsilon_s(h),\ \forall h \in H$ (p. 29) (4.28)

$S(h_1)h_2 S(h_3) = S(h),\ \forall h \in H$ (p. 29) (4.29)

$\varepsilon_t(h) = \varepsilon(S(h)1_1)1_2$ (p. 30) (4.30)

$\varepsilon_s(h) = 1_1\varepsilon(1_2 S(h))$ (p. 30) (4.31)

$\varepsilon_t(h) = S(1_1)\varepsilon(1_2 h)$ (p. 31) (4.32)

$\varepsilon_s(h) = \varepsilon(h1_1)S(1_2)$ (p. 31) (4.33)

$\varepsilon_t S = \varepsilon_t \varepsilon_s = S\varepsilon_s$ (p. 31) (4.34)

$\varepsilon_s S = \varepsilon_s \varepsilon_t = S\varepsilon_t$ (p. 31) (4.35)

$h_1 \otimes h_2 S(h_3) = 1_1 h \otimes 1_2$ (p. 38) (4.36)

$S(h_1)h_2 \otimes h_3 = 1_1 \otimes h1_2$ (p. 38) (4.37)

$h_1 \otimes S(h_2)h_3 = h1_1 \otimes S(1_2)$ (p. 39) (4.38)

$h_1 S(h_2) \otimes h_3 = S(1_1) \otimes 1_2 h$ (p. 39) (4.39)

$1_1 \otimes 1_2 = S(1_2) \otimes S(1_1)$ (p. 39) (4.40)

$h_2 S^{-1}(h_1) \otimes h_3 = S(\varepsilon_t(h_1)) \otimes h_2 = 1_1 \otimes 1_2 h$ (p. 39) (4.41)

$1_1 S^{-1} \otimes 1_2 = 1_1 \otimes 1_2 z,\ \forall z \in H_t$ (p. 40) (4.42)

$1_1 \otimes S^{-1}(y)1_2 = y1_1 \otimes 1_2,\ \forall y \in H_s$ (p. 40) (4.43)

Referências Bibliográficas

[1] BLATTNER, R. J. and MONTGOMERY, S., *A Duality Theorem for Hopf Module Algebras*, Journal of Algebra **95** (1985), no. 1, 153-172.

[2] BÖHM, G. and SZLACHÁNYI, K., *A coassociative C^*-quantum group with nointegral dimensions.*, Lett. Math. Phys. **35** (1996), 437.

[3] BÖHM, G., NILL, F., and SZLACHÁNYI, K., *Weak Hopf Algebras I: Integral Theory and C^*-Structure*, Journal of Algebra **221** (1999), no. 2, 385-438.

[4] BRZEZIŃSKI, T. and WISBAUER, R., *Corings and Comodules*, Cambridge University Press, London Mathematical Society Lecture Notes, 2003.

[5] CAENEPEEL, S. and DE GROOT, E., *Modules Over Weak Entwining Structures in "New Trends in Hopf Algebra Theory"*, Contemporary Mathematics **267** (2000), 31-54.

[6] DĂSCĂLESCU, S., NĂSTĂSESCU, C., and RAIANU, S., *Hopf Algebras*: *An Introduction*, New York: Marcel Dekker, 2001.

[7] FLÔRES, D., *Ações de Grupóides sobre Álgebras*: *Teoremas de Estrutura*, Tese de doutorado, PPG-Mat UFRGS, 2011.

[8] LAM, T. Y., *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer-Verlag, 1993.

[9] NIKSHYCH, D., *A Duality Theorem for Quantum Groupoids in "New Trends in Hopf Algebra Theory"*, Contemporary Mathematics **267** (2000), 237-243.

[10] NIKSHYCH, D. and VAINERMAN, L., *Finite Quantum Groupoids and Their Applications in "New Directions in Hopf Algebras"*, MSRI Publications **43** (2002), 211-262.

[11] NILL, F., *Axioms for Weak Bialgebras*, Math. QA/9805104.

[12] SZLACHÁNYI, K., *Weak Hopf Algebras in "Operator Algebras and Quantum Field Theory"*, International Press (1996).

[13] WANG, YU. and ZHANG, L. YU., *The Structure Theorem for Weak Module Coalgebras*, in Russian in Matematicheskie Zametki **88** (2010), no. 1, 3-17.

[14] YAMANOUCHI, T., *Duality for generalized Kac algebras and a Characterization of finite groupoid algebras*, Journal of Algebra **163** (1994), 9-50.