

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

ESTABILIDADE DE SOLUÇÕES
ESTACIONÁRIAS DAS EQUAÇÕES DE
NAVIER-STOKES

Carla Mörschbacher
Orientador: Prof. Dr. Jáuber C. de Oliveira
Florianópolis

2010

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

ESTABILIDADE DE SOLUÇÕES
ESTACIONÁRIAS DAS EQUAÇÕES DE
NAVIER-STOKES

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Básico em Equações Diferenciais Parciais.

Carla Mörschbächer
Florianópolis
Maio de 2010

ESTABILIDADE DE SOLUÇÕES ESTACIONÁRIAS DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

por

Carla Mörschbächer¹

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de “Mestre”,
Área de Concentração em Básico em Equações Diferenciais Parciais, e
aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em
Matemática e Computação Científica.

Prof. Dr. Ruy Exel Filho - Coordenador

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira (Orientador-UFSC)

Prof. Dr. Cláudio Roberto Ávila da Silva Júnior (ITFPR)

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão (UFSC)

Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz (UFSC)

Florianópolis, Maio de 2010.

¹Bolsista do CNPQ

Agradecimentos

Agradeço a Deus e à Nossa Senhora de Aparecida que sempre estiveram comigo, em meus pensamentos e guiando meus passos. Agradeço aos meus pais, Pedro Canisio e Jacinta Mörschbacher simplesmente por existirem e mesmo longe, estarem sempre presentes e torcendo verdadeiramente por mim. Aos meus irmãos Cristiane e Diego por todo o amor, e por não medirem esforços sempre que precisei.

Agradeço ao professor Jáuber, meu orientador, por toda sua paciência, dedicação, amizade, conhecimentos e conselhos compartilhados. Agradeço aos professores da banca pela disponibilidade, atenção e contribuições.

Agradeço a Giovanni Paolo Galdi (University of Pittsburgh, USA) que gentilmente nos enviou a monografia ([10]), que em muito contribuiu para o enriquecimento desta dissertação.

A todos os meus grandes amigos, em especial a André, Fabiano, Gláucia, Marcos e Patrícia pela amizade, compreensão, carinho e apoio. Ao Sigmar, pelos momentos alegres, pela companhia e incentivo.

Agradeço à toda minha família, tios, primos, avós, pela torcida, em particular às minhas tias professoras que, devido a admiração, levaram-me a seguir o mesmo caminho. Aos meus professores da E.

E. B. Oscar Majolo, em especial, a Ademir Martiori(in memoriun), que incentivaram-me a iniciar essa jornada. A todos os professores da graduação, grandes mestres! Agradeço também a CAPES pelo apoio financeiro durante o mestrado.

Resumo

Nesta dissertação tratamos do estudo da estabilidade de soluções estacionárias das equações de Navier -Stokes, através dos métodos linear e não-linear. Com relação ao método linear, estudamos resultados fundamentais devidos à Sattinger, que justificam o uso desse método e estabelecem condições suficientes para a ocorrência de instabilidade. Em complemento, através do método não-linear (método da energia), obtemos condições suficientes para a ocorrência de estabilidade, e consequentemente obtemos critérios universais de estabilidade. Analisamos também algumas das conexões que existem entre esses dois métodos e aplicamos estas teorias ao escoamento de Couette.

Abstract

In this work, we study the stability of steady motions of the Navier-Stokes equations, through the linear and nonlinear methods. In the linear method, we study Sattinger's classical result to justify the use of this method and to provide sufficient conditions for instability. In addition, through the nonlinear theory (energy method), we studied sufficient conditions for stability. Finally, we have also analyzed some of the connections that exist between these two methods and apply these theories to the Couette flow.

Sumário

Notações	1
Introdução	4
1 Noções Básicas	10
1.1 Resultados Auxiliares	10
1.1.1 Equações Diferenciais Ordinárias	10
1.1.2 Resultados de Cálculo Variacional	12
1.1.3 Resultados de Análise Funcional	13
1.1.4 Espaços $\mathbf{L^p}(\Omega)$	18
1.1.5 Distribuições	19
1.1.6 Espaços de Sobolev	21
1.2 Espaços $\mathbf{V}$ e $\mathbf{H}$	25
1.3 Problema de autovalor auxiliar	28
2 Teoria da estabilidade linear	38
2.1 Definição de estabilidade	39
2.2 Uma introdução à teoria linear	41
2.3 O operador L	43
2.4 Lemas	45

2.5	Teorema de Estabilidade	63
2.6	Teorema de Instabilidade	73
2.7	Conclusões	79
3	O Método da Energia	81
3.1	Identidade fundamental para a energia	82
3.2	O Método da Energia segundo Serrin [35]	85
3.3	Reformulação do Método da Energia segundo Davis e Kerczek [7]	89
3.3.1	Problema de autovalor associado ao Método da Energia	91
3.3.2	Outro Critério Universal de Estabilidade	93
4	Relações entre a teoria linear e a não-linear	95
4.1	Os problemas de autovalor	95
4.1.1	Estabilidade não-linear implica em estabilidade linear	96
4.1.2	Simetria	101
4.2	Formulação Abstrata	102
4.2.1	Situação Geral	102
4.2.2	Operador Simétrico	106
4.2.3	Operador Simetrizável	106
5	Aplicações	115
5.1	Escoamento de Couette	115
5.1.1	Solução Estacionária	115
5.1.2	Estabilidade Linear do Escoamento de Couette .	118
5.1.3	Estabilidade não-Linear do Escoamento de Couette	123

Notações

Usamos as seguintes notações neste trabalho:

$$C : B = C_{ij}B_{ij};$$

$$B.u = B_{ij}u_j;$$

$$v.B.u = v_iB_{ij}u_j;$$

$$\nabla u = \frac{\partial u_i}{\partial x_j};$$

$$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i};$$

$$\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3);$$

$$\operatorname{Re} (.) = \text{parte real};$$

$$\operatorname{Im} (.) = \text{parte imaginária};$$

$$\mathcal{N}uc(T) = \text{núcleo de um operador } T;$$

$\mathcal{I}m(T)$ = imagem de um operador T ;

$D(T)$ = domínio um operador T ;

Ω = conjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$;

$\partial\Omega$ = fronteira de Ω ;

$\mathcal{R}$ = número de Reynolds;

$\mathcal{V} = \{u \in \mathbb{D}(\Omega)^n, \operatorname{div} u = 0\}$;

$\mathbf{H} := \overline{\mathcal{V}}^{L^2(\Omega)^n}$;

$\mathbf{V} := \overline{\mathcal{V}}^{H_0^1(\Omega)^n}$;

$|v|_{L^2(\Omega)^n} = |v|_{\mathbf{H}}^2 = \int_{\Omega} v_i v_i \, dx$;

$|v|_{H_0^1(\Omega)^n} = \|v\|_{\mathbf{V}}^2 = \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx$;

$Au = P_{\sigma}(-\Delta u) = -\Delta u - \nabla p$, para algum $p \in H^1(\Omega)$, sendo que $u \in \mathbf{V} \cap H^2(\Omega)^n$;

P_{σ} = projeção de $L^2(\Omega)^n$ sobre $\mathbf{H}$;

$Lu = P_{\sigma}[-\frac{1}{\mathcal{R}}\Delta u + U \cdot \nabla u + u \cdot \nabla U]$, $u \in \mathbf{V} \cap H^2(\Omega)^n$;

$L^* =$ adjunto de L ;

$\mathfrak{M}_n =$ subespaço de $\mathbf{H}$ gerado pelas autofunções de L com parte real menor ou igual do que n ;

$\mathfrak{N}_n =$ complemento ortogonal de $\mathfrak{M}_n$ em $\mathbf{H}$.

$P_n =$ projeção ortogonal de $\mathbf{H}$ sobre $\mathfrak{M}_n$;

$E_k =$ projeção ortogonal de $\mathbf{H}$ sobre o espaço invariante de A gerado pelas primeiras $k + 1$ autofunções;

$F_k = I - E_k$;

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2(x, t) \, dx;;$$

Introdução

O escoamento de um fluido Newtoniano com densidade de massa e viscosidade constantes ocupando uma região $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$ é modelado matematicamente pelas equações de Navier-Stokes:

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) &= -\nabla p + \mu \Delta v \text{ em } \Omega \times (0, \infty), \\ \nabla \cdot v &= 0 \text{ em } \Omega \times (0, \infty).\end{aligned}\tag{1}$$

sendo que $v(x, t)$ representa o campo de velocidade, $p(x, t)$ o campo escalar de pressão, μ o coeficiente de viscosidade e ρ a densidade de massa.

O sistema (1) é obtido através do princípio de conservação de massa e do princípio de conservação de quantidade de momentum. A este modelo é necessário agregar informações do escoamento quando $t = 0$ e do comportamento do escoamento na fronteira da região considerada.

Em muitos casos é conveniente trabalhar com o sistema (1) em sua forma adimensionalizada

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v &= -\nabla p + \frac{\nu}{LV} \Delta v \text{ em } \Omega \times (0, \infty), \\ \nabla \cdot v &= 0 \text{ em } \Omega \times (0, \infty),\end{aligned}\tag{2}$$

pois permite o estudo simultâneo de uma classe de escoamentos. No sistema (2) $v(x, t)$ representa o campo de velocidades do escoamento, $p(x, t)$ o campo escalar de pressão e $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ o coeficiente de viscosidade cinemática, todos adimensionais.

Esta forma adimensionalizada é obtida fazendo a seguinte mudança de variáveis no sistema:

$$\{t, x, v\} \longrightarrow \left\{t \frac{L}{V}, \frac{x}{L}, \frac{v}{V}\right\},$$

sendo V uma velocidade característica do fluido e L um comprimento representativo para Ω .

Denotamos a constante positiva adimensional ($\frac{LV}{\nu}$) que surge em (2) por $\mathcal{R}$ e a chamamos de número de Reynolds. Além disso, denominamos uma solução (v, p) de (1) ou (2) por *escoamento/campo básico* e no caso de (v, p) ser independente do tempo, dizemos que o escoamento/campo básico é *estacionário*.

Um fato muito curioso ocorre quando dispomos de uma solução das equações Navier-Stokes. Algumas vezes ela representa o escoamento observado na natureza e outras vezes, devido às perturbações que todo escoamento está sujeito, não representa. Assim, torna-se necessário um estudo a fim de descobrir quando a solução obtida realmente representa o escoamento real ou quando trata-se apenas de uma solução matemática das equações.

Para alcançarmos este objetivo, analisaremos o efeito de uma perturbação inicial imposta aos campos de velocidade e pressão de uma solução estacionária (escoamento básico estacionário). Diremos que o escoamento é estável se os campos de perturbação de velocidade e pressão, permanecem "pequenos" em qualquer instante de tempo desde

que a perturbação inicial seja suficientemente 'pequena'. Em caso contrário, diremos que o campo básico é instável. Quando as perturbações desaparecem com o passar do tempo, diremos que o escoamento básico é (assintoticamente) estável.

Desta maneira, o estudo da estabilidade de soluções é muito relevante, pois soluções não estáveis, mesmo sendo soluções do sistema de equações, podem não representar o escoamento modelado pelas equações. Além disso, a instabilidade do escoamento pode estar associada à perda de unicidade de soluções (bifurcação), ou a transição a um comportamento caótico bastante complexo denominado turbulência.

Osbourne Reynolds, físico e engenheiro hidráulico irlandês (1883), foi uma das primeiras pessoas a estudar a respeito da estabilidade hidrodinâmica. Seus experimentos ainda hoje são muito usados, pois representam muito bem a transição de um fluido estável para um instável. Nesse sentido Reynolds observou que a passagem da estabilidade para a instabilidade ocorria de acordo com o número de Reynolds, $\mathcal{R} = UL/\nu$, dependente de uma velocidade média dimensional, U , de uma propriedade do fluido denominada de viscosidade cinemática, ν , e de um comprimento (dimensional) L representativo da região (Ω) ocupada pelo fluido.

Ainda em sua época foram formuladas várias maneiras de analisar a estabilidade do escoamento de fluidos. Uma das primeiras abordagens é a denominada Teoria Linear. Na década seguinte, com o mesmo objetivo, o próprio Reynolds (1895) e Orr (1907) desenvolveram um outro método, denominado Método da Energia. Ambos os métodos serão abordados com detalhes na dissertação.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

No primeiro capítulo reunimos os resultados básicos de cálculo variacional e análise funcional utilizados. Além disso, apresentamos algumas propriedades básicas dos espaços utilizados nos capítulos seguintes, e propriedades de um problema de autovalor auxiliar.

No capítulo 2 abordamos a teoria linear. Trabalhamos com um dos pilares desta teoria: Um teorema importante de Sattinger, que valida o uso da teoria linear. Mostramos também que para perturbações suficientemente pequenas e sob algumas outras restrições, a instabilidade linear implica em instabilidade.

No capítulo 3 tratamos a respeito de um método não-linear para analisar a ocorrência de estabilidade: o método da energia. Este método traz condições suficientes para a ocorrência de estabilidade, independentemente do tamanho inicial da perturbação.

No capítulo 4 apresentamos algumas das relações existentes entre as teorias linear e não-linear.

No capítulo 5 consideramos aplicações ao escoamento de Couette: O escoamento entre dois cilindros infinitos, concêntricos e em rotação. Este capítulo foi baseado na monografia([10]) de Giovanni Paolo Galdi.

Ressaltamos que nesta dissertação não abordaremos questões de existência/unicidade para o campo básico do escoamento e para o campo de perturbações. No caso em que o domínio é limitado, consideramos que o campo básico (U, P) existe nos espaços $\mathbf{V} \times L^1_{loc}(\Omega)$ (ver seções 1.6 e 1.7 para as definições destes espaços) e satisfazem, no caso $n = 3$ com f em $L^2(\Omega)$, a seguinte equação variacional:

$$(1/\mathcal{R})((u, v)) + b(u, u.v) = (f, v), \forall v \in \mathbf{V},$$

$$\text{sendo } b(u, v, w) = \sum_{i,j} \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j dx, ((u, v)) = \sum_i (\text{grad } u_i, \text{grad } u_j).$$

Este resultado de existência está provado em ([39], pg. 164). Além disso, na página 167 da mesma referência, está provado que se $n = 2, 3$ e $(1/\mathcal{R})^2 > c(n)\|f\|_{\mathbf{V}'}$ então o problema tem uma única solução. Nesta desigualdade $c(n)$ é uma constante (dependente da dimensão n) tal que

$$|b(u, v, w)| \leq c(n)\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)}.$$

No caso não-limitado, na mesma referência temos o resultado de existência em outro espaço (ver [39], pg. 168).

Com relação ao problema de evolução, supondo que $f \in L^2(0, T; \mathbf{V}')$ e que $u_0 \in H$, a solução (fraca) u existe em $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, u fracamente contínua de $[0, T]$ em H e com $du/dt \in L^1(0, T; \mathbf{V}')$ para o caso em que Ω é um aberto limitado (caso não limitado em [39], pg. 290) com fronteira Lipschitz ([39], pg. 282). Para $n = 2$, a unicidade de soluções é garantida (Teorema 3.2, [39], pg. 294). A unicidade no caso tridimensional tem forte relação com resultados de regularidade. Supondo que os dados do problema são suficientemente "pequenos" (ou que $\mathcal{R}$ é muito pequeno), é possível provar tais resultados de regularidade ([39], pg. 299).

Se Ω é um aberto limitado com fronteira de classe C^2 com $n = 2$ ou $n = 3$ e $f = 0$ prova-se que $u \in L^\infty(T^*, \infty; \mathbf{V})$ e u decai a zero, em $\mathbf{V}$, quando t tende para infinito ([39], pg. 318). $T^* = 0$ se $n = 2$. O decaimento é exponencial no caso bidimensional e polinomial ($t^{-1/4}$) no caso tridimensional.

Concluimos essa breve menção dos resultados básicos referentes a questões de existência/unicidade de soluções para as equações de Navier-Stokes observando que o problema de estabilidade que consideraremos no trabalho faz sentido para soluções fracas em vista da

existência de soluções globais. No caso tridimensional, a existência de soluções globais mais regulares (u em $C([0, \infty); \mathbf{V}) \cap L^2(0, \infty; H^2(\Omega))$) tem sido obtida ao custo de hipóteses bastante restritivas sobre os dados do problema (f e u_0 bem "pequenos"), Ω suave e tal que vale desigualdade de Poincaré, $D(A)$ contido em $H^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ (ver [38]).

Capítulo 1

Noções Básicas

Este capítulo está dividido em três seções. Na primeira seção vamos enunciar os resultados de Equações Diferenciais Ordinárias, Cálculo Variacional e Análise Funcional considerados como pré-requisitos. Na segunda seção, vamos apresentar os espaços $\mathbf{V}$ e $\mathbf{H}$, que são os espaços onde trabalharemos no decorrer da dissertação e na terceira seção estudamos um problema de autovalor auxiliar que será importante para o desenvolvimento do capítulo 2.

1.1 Resultados Auxiliares

1.1.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Definição 1.1.1 ([40], pg. 137) *Seja A uma matriz quadrada, então*

$$e^{At} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n.$$

Proposição 1.1.2 ([40], pg. 143, 144) Todos os elementos da Matriz e^{tA} são da forma

$$\sum_{k=1}^s e^{\alpha_k t} [p(t) \cos(\beta_k t) + q(t) \sin(\beta_k t)],$$

sendo que, $\alpha_k + i\beta_k$ são as raízes da equação característica $\det(A - \lambda I) = 0$, p_k e q_k são polinômios com coeficientes reais e grau menor ou igual a $m_k - 1$, sendo que m_k é a ordem da multiplicidade da raiz $\alpha_k + i\beta_k$ com $k = 1, 2, \dots, s$.

Proposição 1.1.3 ([3], pg. 80) Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ os autovalores distintos de uma matriz A , sendo que λ_i tem multiplicidade finita n_i e $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Seja ρ , tal que

$$\rho > \max_{j=1, 2, 3, \dots, k} \{Re(\lambda_j)\},$$

então existe uma constante $K > 0$, tal que

$$|e^{At}| \leq K e^{\rho t}, \quad 0 \leq t < \infty,$$

sendo $|e^{-Lt}| = \sum_j \sum_i |(e^{-Lt})_{ij}|$.

Proposição 1.1.4 (Desigualdade de Gronwall; [31], pg. 13) Sejam f, g funções contínuas, não negativas sobre $[a, b]$ e $c(x)$ contínua e não-decrescente. Se

$$f(x) \leq c(x) + \int_a^x f(s)g(s) ds, \quad \forall x \in [a, b],$$

então

$$f(x) \leq c(x) e^{\int_a^x g(s) ds}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Proposição 1.1.5 (*Desigualdade de Bihari; [40], pg. 45*) Sejam $x, k : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $w : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ funções contínuas com w não-decrescente sobre $\mathbb{R}^+$. Se

$$x(t) \leq m + \int_a^t k(s)w(x(s)) ds, \forall t \in [a, b],$$

então

$$x(t) \leq \Phi^{-1} \left(\int_a^t k(s) ds \right), \forall t \in [a, b],$$

sendo que, $\Phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\Phi(d) = \int_m^d \frac{ds}{w(s)}, \forall d \in \mathbb{R}^+.$$

1.1.2 Resultados de Cálculo Variacional

Definição 1.1.6 Sejam X espaço de Banach e $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$. A derivada de F em x , na direção de y , é definida por

$$F'(x)y = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(x + \epsilon y) - F(x)}{\epsilon},$$

e a diferenciabilidade (no sentido de Frechet) de F em x é dada por

$$F(x + y) = F(x) + F'(x)y + o(\|y\|_X), \text{ quando } \|y\|_X \longrightarrow 0.$$

Se a aplicação $F' : X \longrightarrow X'$ é contínua, então dizemos que F é C^1 . Definimos x como um ponto crítico de F , se $F'(x) = 0$, isto é,

$$F'(x)y = 0, \forall y \in X. \tag{1.1}$$

Proposição 1.1.7 ([25], pg. 229) Sejam X um espaço de Banach

e $F, G : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Supomos que existe $x_0 \in X$ tal que $G(x_0) = 0$ e x_0 é um extremo local para F quando restrito ao conjunto de nível $S = \{x \in X : G(x) = 0\}$. Então uma das possibilidades a seguir, e apenas uma, é válida:

(i) $G'(x_0)v = 0, \forall v \in X$.

(ii) Existe $\mu \in \mathbb{R}$, tal que $F'(x_0)w = \mu G'(x_0)w, \forall w \in X$.

1.1.3 Resultados de Análise Funcional

Definição 1.1.8 ([22], pg. 168) *Sejam X um espaço normado e $M \subseteq X$. Então M é dito ser um conjunto total se $\overline{\text{span } M} = X$.*

Proposição 1.1.9 (Desigualdade de Bessel; [22], pg. 157) *Seja $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ um conjunto ortonormal em um espaço de Hilbert X , então*

$$\sum_k |(x, e_k)_X|^2 \leq \|x\|_X^2, \forall x \in X.$$

Proposição 1.1.10 (Relação de Parseval; [22], pg. 170) *Seja $M = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ um conjunto ortonormal em um espaço de Hilbert X , então M é total em X se, e somente se,*

$$\sum_k |(x, e_k)_X|^2 = \|x\|_X^2, \forall x \in X.$$

Proposição 1.1.11 (Soma direta; [22], pg. 146) *Seja H um espaço de Hilbert e Y um subconjunto fechado de H . Então $H = Y \oplus Y^\perp$.*

Teorema 1.1.12 (Representação de Riesz; [22], pg. 189) *Sejam H um espaço de Hilbert e H' o seu dual. Então, $\forall f \in H'$, existe um único $y \in H$, tal que*

(i) $f(x) = (y, x)_H, \forall x \in H$, em que $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ é o produto interno em H .

(ii) $\|f\|_{H'} = \|y\|_H$.

Teorema 1.1.13 (*Lax-Milgram; [15], pg. 6*) *Sejam X um espaço de Hilbert real e $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua e elíptica, isto é, existem duas constantes M e $\alpha > 0$, tais que*

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_X \|v\|_X, \forall u, v \in X,$$

$$|a(u, u)| \geq \|u\|_X^2, \forall u \in X.$$

Então, dado $l \in X'$ existe único $u \in X$ tal que

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle, \forall v \in X,$$

sendo que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa a dualidade entre X e X' . Ademais, a função $l \longrightarrow u$ é um isomorfismo de X' em X .

Definição 1.1.14 ([22], pg. 257) *Sejam X um espaço de Banach, X' o seu dual e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$. Dizemos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge fraco** em X , se existe $x \in X$, tal que para todo $f \in X'$ temos $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$.*

Lema 1.1.15 ([22], pg. 258) *Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência fracamente convergente para x em um espaço normado X . Então*

(i) *O limite fraco x é único.*

(ii) *Toda subsequência de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge fracamente para x .*

(iii) *A sequência $\{\|x_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.*

Proposição 1.1.16 ([22], pg. 242) *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Proposição 1.1.17 ([41], pg. 126) *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X . Então podemos extrair de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge fraco em X .*

Proposição 1.1.18 ([20], pg. 137) *Se X é espaço de Hilbert e $u^j \rightarrow u$ fraco em X , então $|u|_X \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} |u_j|_X$.*

Proposição 1.1.19 ([24], pg. 132) *Sejam X, Y espaços de Banach. Se $T : X \rightarrow Y$ é um operador linear fechado bijetivo, então T^{-1} é contínuo.*

Definição 1.1.20 ([22], pg. 292) *Sejam X e Y espaços normados e $T : D(T) \rightarrow Y$ um operador linear densamente definido em X . Dizemos que T é um **operador fechado** se, e somente se, seu gráfico é um conjunto fechado no espaço normado $X \times Y$.*

Teorema 1.1.21 (Teorema do Gráfico fechado; [22], pg. 292) *Sejam H espaço de Hilbert complexo e $T : D(T) \rightarrow H$ um operador linear densamente definido.*

- (i) *T é um operador fechado se, e somente se, dado $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq D(T)$, tal que $u_m \rightarrow u$ e $Tu_m \rightarrow w$ em H implicar que $u \in D(T)$ e $Tu = w$.*
- (ii) *Se T é um operador limitado. Então T é fechado se, e somente se, $D(T)$ é fechado.*

Proposição 1.1.22 ([22], pg. 536) *Sejam H espaço de Hilbert e $T : D(T) \longrightarrow H$ um operador linear densamente definido. Então T^* é fechado.*

Teorema 1.1.23 ([20], pg. 187) *Seja T um operador fechado em X com resolvente compacto para algum $\xi \in X$, então o espectro de T consiste de uma sequência de autovalores, com multiplicidades finitas, podendo se acumular somente no infinito.*

Proposição 1.1.24 ([26], pg. 213) *Sejam W e H espaços de Hilbert e $T : W \longrightarrow H$ densamente definida, então T^* é fechado e $\mathcal{N}uc(T^*) = \mathcal{I}m(T)^\perp$.*

Lema 1.1.25 ([2], pg. 284) *Sejam X e Y dois espaços de Hilbert separáveis e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear contínuo. Se a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |Te_n|_Y^2$$

converge para uma base ortonormal $\{e_n\}$ de X , então

$$\sum_{n=1}^{\infty} |Te_n|_Y^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |Te'_n|_Y^2 = \sum_{n,m=1}^{\infty} |(Te_n, f_m^*)_{Y^*}|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |T^* f_m^*|_X^2$$

independente de qual base $\{e'_n\}$ de X e $\{f_m^\}$ de Y^* for escolhida.*

Definição 1.1.26 ([2], pg. 285) *Sejam X e Y dois espaços de Hilbert separáveis e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear contínuo. Se a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |Te_n|_Y^2$$

*converge para pelo menos uma base ortonormal $\{e_n\}$ de X , então T é denominado um **operador de classe Hilbert-Schmidt**.*

Proposição 1.1.27 ([9], pg. 1012) *Se T é um operador de classe Hilbert-Schmidt e B é um operador limitado, então TB e BT são operadores de classe Hilbert-Schmidt.*

Proposição 1.1.28 ([9], pg. 1012) *Todo operador de classe Hilbert-Schmidt é compacto.*

Proposição 1.1.29 ([22], pg. 375) *Sejam X um espaço de Banach e $T : X \rightarrow X$ um operador limitado. Se $\|T\| < 1$, então $(I - T)^{-1}$ existe e é limitado.*

Definição 1.1.30 ([34], pg. 807) *Um raio de crescimento mínimo de um operador T é um raio $\{\rho e^{i\theta}; \rho > 0\}$ no plano complexo, tal que, $(L - \lambda)^{-1}$ existe para $|\lambda| = |\rho e^{i\theta}|$ suficientemente grande e $|(T - \lambda)^{-1}| = \mathcal{O}(|\lambda|^{-1})$ quando λ tende para o infinito ao longo do raio.*

Teorema 1.1.31 ([9], pg. 1039) *Sejam $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_5$ curvas diferenciáveis no plano complexo, partindo da origem. Suponha que cada uma destas cinco regiões, nas quais o plano foi dividido, está contida em um setor com abertura menor do que $\pi/2$. Seja $N > 0$ um inteiro, e seja T um operador de classe Hilbert-Schmidt em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, cujo resolvente satisfaz a seguinte igualdade*

$$|R(\lambda; T)| = \mathcal{O}(|\lambda|^{-N})$$

quando $\lambda \rightarrow 0$ ao longo de qualquer um dos arcos γ_i . Então o espaço gerado pelas autofunções de T contém o subespaço $T^N \mathcal{H}$.

Corolário 1.1.32 ([9], pg. 1042) *Seja T um operador não-limitado, definido em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, com a propriedade de que para*

algum λ_0 no resolvente de T temos que $(T - \lambda_0)^{-1}$ é de classe Hilbert-Schmidt. Sejam $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_5$ curvas diferenciáveis, com uma direção limitada no infinito e curvas adjacentes não podem formar um ângulo tão grande quanto $\frac{\pi}{2}$. Suponha ainda que $(T - \lambda)^{-1}$ satisfaz $|(T - \lambda)^{-1}| = O(\lambda^{-N})$ quando $\lambda \rightarrow \infty$ ao longo de cada arco γ_i . Então o fecho do subespaço gerado pelas autofunções é igual a $\mathcal{H}$, isto é as autofunções de T são completas em $\mathcal{H}$.

1.1.4 Espaços $L^p(\Omega)$

Nesta seção, definiremos os espaços $L^p(\Omega)$, e apresentaremos algumas de suas principais propriedades. As definições e resultados enunciados nesta subseção estão baseadas nas referências [1], [4] e [27].

Seja Ω um conjunto aberto e não-vazio de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p \leq \infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o conjunto das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ mensuráveis, tais que

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \text{ se } 1 \leq p < \infty, \quad (1.2)$$

$$\|u\|_{\infty} = \inf\{M \in \mathbb{R}^+ : |f(x)| < M, \text{ quase sempre em } \Omega\} < \infty, \text{ se } p = \infty. \quad (1.3)$$

Os conjuntos $L^p(\Omega)$ são espaços vetoriais e seus elementos são classes de equivalência, pois identificamos funções que são iguais quase sempre. As expressões (1.2) e (1.3) definem normas em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$ e $p = \infty$, respectivamente. Além disso, $L^p(\Omega)$ é espaço de Banach para todo p , e $L^2(\Omega)$ é espaço de Hilbert, com o seguinte produto interno natural

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Teorema 1.1.33 (Desigualdade de Hölder; [4], pg. 56) *Seja Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Se*

$f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$, então $f.g \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}.$$

Teorema 1.1.34 (Imersão para espaços L^p ; [1], pg. 25) *Sejam Ω um conjunto aberto, com medida finita do $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Se $u \in L^q(\Omega)$, então $u \in L^p(\Omega)$ e $\|u\|_p \leq \text{med}(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|u\|_q$.*

Seja Ω um conjunto aberto e não vazio de $\mathbb{R}^n$ e $p \in [1, +\infty]$. Denotamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $f\chi_K \in L^p(\Omega)$ para todo conjunto compacto K contido em Ω , e χ_K é a função característica de K . É imediato ver que $L^p(\Omega) \subseteq L^p_{loc}(\Omega)$, $\forall p \in [1, +\infty]$.

1.1.5 Distribuições

As principais referências utilizadas nessa subsecção são [21] e [27].

Um multi-índice é uma n -upla de números inteiros não-negativos

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Denotamos o conjunto de todos os multi-índices por $\mathbb{N}_0^n$. Associamos a um multi-índice os seguintes símbolos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n;$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} + x_2^{\alpha_2} + \dots + x_n^{\alpha_n}, x \in \mathbb{R}^n;$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} + \partial x_2^{\alpha_2} + \dots + \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Proposição 1.1.35 ([4], pg. 68) *Sejam Ω um conjunto aberto e não-vazio de $\mathbb{R}^n$ e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Consideremos a família de todos os conjuntos abertos $(w_i)_{i \in I}$, $w_i \subset \Omega$, tais que para cada $i \in I$, $u = 0$ quase sempre em w_i . Seja $W = \bigcup_{i \in I} w_i$. Então, $u = 0$ quase sempre em W .*

Definição 1.1.36 ([4], pg. 68) *Sejam $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável e W definido como na proposição anterior. Definimos o suporte de u como sendo o complementar de W em relação a Ω , isto é, $\text{supp } u := \Omega \setminus W$.*

Seja Ω um conjunto aberto e não-vazio de $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto contido em Ω . O conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ é um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e chamamos seus elementos de funções testes. Ademais, dizemos que uma sequência de funções $(\varphi_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$ de $C_0^\infty(\Omega)$ é convergente para zero quando as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) Existe K compacto tal que $\text{supp}(\varphi_\mu) \subset K, \forall \mu \in \mathbb{N}$.
- (ii) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$, a sequência $(D^\alpha \varphi_\mu)$ converge a zero uniformemente em $\mathbb{K}$.

Definição 1.1.37 ([27], pg. 10) *O espaço linear $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência acima é denominado o **espaço das funções testes** e é representado por $\mathbb{D}(\Omega)$.*

Definição 1.1.38 ([27], pg. 10) *Seja Ω um conjunto aberto e não-vazio de $\mathbb{R}^n$. Uma **distribuição sobre Ω** é um funcional linear T sobre $\mathbb{D}(\Omega)$ que é contínuo em relação a noção de convergência definida em $\mathbb{D}(\Omega)$.*

O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial e o denotamos por $\mathbb{D}'(\Omega)$. Ademais, uma sequência $(T_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{D}'(\Omega)$ converge para zero, se para todo $\varphi \in \mathbb{D}(\Omega)$ a sequência $T_\mu(\varphi)$ converge para zero em $\mathbb{K}$.

Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, sendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e não-vazio, então o funcional linear definido sobre $\mathbb{D}(\Omega)$ por

$$T_u(\varphi) = \int_{\Omega} u(x) \cdot \varphi(x) dx,$$

é uma distribuição sobre Ω , denominada distribuição regular.

Lema 1.1.39 *(de Du Bois Raymond; [27], pg. 10) Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então, $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$, quase sempre, em Ω .*

Deste modo, como $L^p(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$, podemos associar a cada função de $L^p(\Omega)$ uma distribuição. Essa identificação será usada na definição dos espaços de Sobolev, isto é, sempre que nos referirmos a alguma função de $L^p(\Omega)$ estaremos nos referindo à distribuição regular associada.

Definição 1.1.40 *([27], pg. 14) Sejam Ω um conjunto aberto e não vazio de $\mathbb{R}^n$, $T \in \mathbb{D}(\Omega)$ e $\alpha \in N_0^n$, um multi-índice. A **derivada de ordem α de T** é a forma linear em $\mathbb{D}(\Omega)$ definida por*

$$(D^\alpha T)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} \cdot T(D^\alpha \varphi), \forall \varphi \in \mathbb{D}(\Omega).$$

1.1.6 Espaços de Sobolev

Consideraremos Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $\partial\Omega$ sua fronteira.

Definição 1.1.41 *([21], pg. 51) Seja $m > 0$ um número inteiro e*

$1 \leq p \leq \infty$. O **espaço de Sobolev** $W^{m,p}(\Omega)$ é definido por:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para todo } |\alpha| \leq m\}.$$

Segue da definição que $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ e $W^{m_2,p}(\Omega) \subseteq W^{m_1,p}(\Omega)$, se $m_1 \leq m_2$. Além disso, $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial e com a seguinte norma torna-se um espaço de Banach, para $1 \leq p < \infty$,

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)},$$

e $W^{m,\infty}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Introduzimos as seguintes semi-normas em $W^{m,p}(\Omega)$:

$$|u|_{m,p,\Omega} = \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}, \text{ para } 1 \leq p < \infty,$$

$$|u|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Quando $p = 2$, denotamos $W^{m,p}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$, $\|u\|_{m,p,\Omega}$ por $\|u\|_{m,\Omega}$ e $|u|_{m,p,\Omega}$ por $|u|_{m,\Omega}$. Ressaltamos que $H^m(\Omega)$ é espaço de Hilbert com o seguinte produto interno natural

$$(u, v)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v \, dx.$$

Proposição 1.1.42 ([21], pg. 53) $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo, para todo $1 < p < \infty$, e separável para $1 \leq p < \infty$. Em particular, $H^1(\Omega)$ é separável e reflexivo.

Definição 1.1.43 Definimos o *espaço* $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathbb{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.

Observamos que $H_0^1(\Omega)$ é espaço de Hilbert e portanto é reflexivo.

Teorema 1.1.44 (*Desigualdade de Poincaré; [21], pg. 70*) Seja Ω um conjunto limitado do $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante positiva $C = C(\Omega, p)$, tal que

$$|u|_{0,p,\Omega} \leq C|u|_{1,p,\Omega}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular, $u \rightarrow |u|_{1,p,\Omega}$ define uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ que é equivalente a norma $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$. Em $H_0^1(\Omega)$, a forma bilinear

$$(u, v) \longrightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

define um produto interno, cuja norma associada $|\cdot|_{1,\Omega}$ é equivalente a norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

Definição 1.1.45 ([25], pg. 08) Dizemos que um conjunto aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é de classe C^r se existe cobertura aberta localmente finita $(U_i)_{i \in I}$ de $\partial\Omega$ e um difeomorfismo de classe C^r

$$\psi : U_i \longrightarrow D = B_{\mathbb{R}^n}(0, 1),$$

tal que,

$$\psi(U_i \cap \Omega) = D_+ = \{x \in D : x_n > 0\}, \quad \psi(U_i \cap \partial\Omega) = D_0 = \{x \in D : x_n = 0\}.$$

Proposição 1.1.46 (*Rellich-Kondrasov; [21], pg. 84*) Seja Ω um conjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ e com fronteira de classe C^1 . Então as seguintes imersões são compactas.

- (i) se $p < n$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq p^*$, sendo $p^* = \frac{np}{n-p}$;
- (ii) se $p = n$, $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq \infty$;
- (iii) se $p > n$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

Proposição 1.1.47 ([21], pg. 89) *Seja $F \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Então existem funções $f_0, f_1, \dots, f_n \in L^{p'}(\Omega)$, tais que*

$$F(u) = \int_{\Omega} f_0 u \, dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

e $\|F\| = \max_{0 \leq i \leq n} \|f_i\|_{0,p',\Omega}$. Ademais, se Ω é limitado, então $f_0 = 0$.

Teorema 1.1.48 (Teorema do Traço, [21], pg. 102) *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e com fronteira de classe C^2 . O operador traço*

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$$

é um operador limitado que estende a operação restrição $u \rightarrow u|_{\partial\Omega}$ para funções $u \in C^1(\Omega)$. $\mathcal{Nuc}(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$, $H^{\frac{1}{2}} := \text{Im}(\gamma_0)$ (é espaço de Hilbert).

Teorema 1.1.49 (Teorema de Green; [21], pg. 102) *Sejam Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, limitado, que está do mesmo lado da fronteira e com fronteira de classe C^1 . Sejam u e $v \in H^1(\Omega)$. Então, para $1 \leq i \leq n$, temos*

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx + \int_{\partial\Omega} uv \nu_i \, d\sigma.$$

Ademais, se $u \in H^2(\Omega)$, então

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v \, dx + \int_{\partial\Omega} \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, d\sigma.$$

Teorema 1.1.50 (*Teorema da Divergência de Gauss, [21], pg. 103*) *Sejam Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, limitado, que está do mesmo lado da fronteira e com fronteira de classe C^1 . Seja $u \in H^1(\Omega)^n$. Então,*

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot u \, dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot \eta \, ds.$$

1.2 Espaços $\mathbf{V}$ e $\mathbf{H}$

Nesta seção vamos definir os espaços que serão utilizados nos capítulos posteriores e ver algumas de suas propriedades. Todas as definições e resultados constam na referência [39].

Iniciemos denotando o seguinte espaço:

$$\mathcal{V} := \{u \in \mathbb{D}(\Omega)^n, \operatorname{div} u = 0\}.$$

Definimos então

$$\mathbf{H} := \overline{\mathcal{V}}^{L^2(\Omega)^n},$$

$$\mathbf{V} := \overline{\mathcal{V}}^{H_0^1(\Omega)^n}.$$

Como $L^2(\Omega)^n$ e $H_0^1(\Omega)^n$ são espaços de Hilbert, inferimos que $\mathbf{H}$ e $\mathbf{V}$ também são. Consequentemente $\mathbf{H}$ e $\mathbf{V}$ são espaços reflexivos.

Com o intuito de melhor caracterizar os espaços $\mathbf{V}$ e $\mathbf{H}$, vamos introduzir o seguinte espaço linear e obter algumas de suas propriedades:

$$E(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)^n, \operatorname{div} u \in L^2(\Omega)\}$$

Proposição 1.2.1 (*[39], pg. 05*) *$E(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com*

o seguinte produto interno:

$$((u, v))_{E(\Omega)} = (u, v) + (\operatorname{div} u, \operatorname{div} v), \forall u, v \in E(\Omega).$$

Definição 1.2.2 Dizemos que Ω é **Lipschitz contínuo** se $\partial\Omega$ pode ser parametrizada por uma função Lipschitz contínua.

Proposição 1.2.3 ([39], pg. 06) Seja Ω um conjunto aberto e Lipschitz de $\mathbb{R}^n$, então $\mathbb{D}(\overline{\Omega})^n$ é denso em $E(\Omega)$.

Proposição 1.2.4 ([39], pg. 09) Seja Ω um conjunto aberto, limitado e Lipschitz de $\mathbb{R}^n$, então existe um operador linear contínuo $\gamma_\nu \in \mathcal{L}(E(\Omega), H^{-1/2}(\partial\Omega))$ tal que

$$a) \quad \gamma_\nu u = u \cdot \nu|_{\partial\Omega}, \forall u \in \mathbb{D}(\overline{\Omega})^n.$$

$$b) \quad \mathcal{N}uc(\gamma_\nu) = E_0(\Omega).$$

$$c) \quad \mathcal{I}m(\gamma_\nu) = H^{-1/2}(\partial\Omega).$$

$$d) \quad \text{Ademais, para todo } u \in E(\Omega) \text{ e } w \in H^1(\Omega) \text{ temos}$$

$$(u, \operatorname{grad} w) + (\operatorname{div} u, w) = \langle \gamma_\nu u, \gamma_0 w \rangle.$$

Proposição 1.2.5 ([39], pg. 14) Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$, aberto, $f_i \in \mathbb{D}'(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Então, $f = \nabla p$ para algum $p \in \mathbb{D}'(\Omega)$ se e somente se $(f, v) = 0, \forall v \in \mathcal{V}$.

Proposição 1.2.6 ([39], pg. 15) Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado, Lipschitz e $f \in L^2(\Omega)^n$. Se $f = \nabla p$ para algum $p \in L^2(\Omega)$ ou para algum $p \in H^1(\Omega)$ então $(f, v) = 0, \forall v \in \mathcal{V}$.

Impondo algumas condições de regularidade na fronteira de Ω obtemos as seguintes caracterizações para $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}^\perp$ e $\mathbf{V}$.

Proposição 1.2.7 ([39], pg. 15) *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$, aberto, limitado, localmente Lipschitz. Então:*

$$a) \mathbf{H}^\perp = \{u \in L^2(\Omega)^n : u = \nabla p, p \in H^1(\Omega)\};$$

$$b) \mathbf{H} = \{u \in L^2(\Omega)^n : \operatorname{div} u = 0, \gamma_\nu u = 0\}.$$

Proposição 1.2.8 ([39], pg. 18) *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$, aberto, limitado e localmente Lipschitz. Então:*

$$\mathbf{V} = \{u \in H_0^1(\Omega)^n, \operatorname{div} u = 0\}.$$

Proposição 1.2.9 *A imersão de $\mathbf{V}$ em $\mathbf{H}$ é compacta.*

Demonstração 1.2.10 *Seja $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{V} \subset \mathbf{H}$, limitada em $\mathbf{V}$. Então como $\mathbf{V} \subset H_0^1(\Omega)^n$, temos, devido ao Teorema de Rellich-Kondrasov, que existe uma subsequência, $\{u_{mk}\}_{mk \in \mathbb{N}}$, de $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ convergente em $L^2(\Omega)^n$. Por outro lado $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{H}$, que é um espaço de Hilbert, logo $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbf{H}$ e portanto a imersão de $\mathbf{V}$ em $\mathbf{H}$ é compacta.*

■

Proposição 1.2.11 ([23], pg. 66) *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e limitado. Valem as seguintes desigualdades:*

$$(i) \int_{\Omega} u \cdot \nabla v \cdot w \, dx \leq \|u\|_4 \|v\|_2 \|w\|_4, \, u, w \in L^4(\Omega) \, e \, v \in \mathbf{V}.$$

$$(ii) \|v\|_4^4 \leq (4/3)^{(3/4)} \|v\| \|v\|^3, \, v \in \mathbf{V} \cap L^4(\Omega).$$

1.3 Problema de autovalor auxiliar

Consideremos Ω um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ e o seguinte operador linear

$$A : \mathbf{V} \cap H^2(\Omega)^n \longrightarrow L^2(\Omega),$$

definido por $Au = P_\sigma(-\Delta u) = -\Delta u - \nabla p$, para algum $p \in H^1(\Omega)$.

Os autovalores de A satisfazem $Au = \mu u$, para algum $u \neq 0$ em $\mathbf{V} \cap H^2(\Omega)^n$, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta u - \nabla p = \mu u, & \text{em } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.4)$$

Multiplicando a primeira equação de (1.4) por $v \in \mathbf{V}$, integrando sobre Ω e usando a fórmula de Green, segue que u e μ satisfazem:

$$\int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx = \mu \int_{\Omega} uv \, dx, \forall v \in \mathbf{V}. \quad (1.5)$$

As soluções de (1.5) também são soluções de (1.4), via resultados de regularidade elíptica.

Definimos os seguintes funcionais:

$$F : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ por } F(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \text{ e}$$

$$G : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ por } G(u) = \int_{\Omega} u^2 dx - 1.$$

Mostremos que F atinge seu valor mínimo em $\mathbf{V}$, sujeito a restrição $G(u) = 0$ e vamos relacionar este valor mínimo com o primeiro autovalor de A .

Denotemos $S = \{x \in \mathbf{V} : G(x) = 0\}$.

Notemos que $F(u) \geq 0$. Logo, $I := \inf\{F(u), u \in \mathbf{V} \cap S\}$ existe. Escolhemos $u^j \in \mathbf{V} \cap S$, tal que,

$$F(u^j) \rightarrow I \text{ e } F(u^j) = \|u^j\|_{\mathbf{V}}^2 \leq I + 1.$$

Através da desigualdade de Poincaré, temos que $\|u^j\|_{\mathbf{V}}$ é limitada inferiormente por 1, pois $|u^j|_{L^2(\Omega)^n}$ é limitada inferiormente por 1. Deste modo, devido à compacidade da imersão de $H_0^1(\Omega)^n$ em $L^2(\Omega)^n$ e a compacidade sequencial fraca de conjuntos limitados em $\mathbf{V}$, existe uma subsequência u_{j_k} e $\bar{u} \in L^2(\Omega)^n$, tais que $u_{j_k} \rightarrow \bar{u}$ em $L^2(\Omega)^n$ e $u_{j_k} \rightharpoonup \bar{u}$ fraco em $\mathbf{V}$. Como $u_{j_k} \in S, \forall k \in \mathbb{N}$, implica que $\bar{u} \in S$, isto é, $|\bar{u}|_{L^2(\Omega)^n} = 1$.

Mostremos então que $\bar{u}$ minimiza F . Devido a Proposição 1.1.18, temos

$$F(\bar{u}) = \|\bar{u}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \liminf_{j_k \rightarrow \infty} \|u_{j_k}\|_{\mathbf{V}}^2 = \liminf_{j_k \rightarrow \infty} F(u_{j_k}) = I,$$

donde $F(\bar{u}) = I$ e $\bar{u}$ minimiza F .

Observamos agora que

$$F'(u)v = 2 \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx \quad \text{e} \quad G'(u)v = 2 \int_{\Omega} uv \, dx, \quad u, v \in \mathbf{V}.$$

Ademais, como F, G são aplicações de classe C^1 e

$$G'(\bar{u})\bar{u} = 2 \int_{\Omega} |\bar{u}|^2 \, dx = 2 \neq 0,$$

temos, pela Proposição 1.1.7, que existe $\nu \in \mathbb{R}$, tal que

$$F'(\bar{u})v = \nu G'(\bar{u})v, \forall v \in \mathbf{V},$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{u} : \nabla v \, dx = \nu \int_{\Omega} \bar{u} v \, dx.$$

Assim, $(\bar{u}, \nu)$ satisfaz (1.5) e portanto ν e $\bar{u}$ são autovalor e autovetor de A , respectivamente.

Por outro lado, colocando $v = \bar{u}$, resulta que

$$I = F(\bar{u}) = \int_{\Omega} |\nabla \bar{u}|^2 \, dx = \nu \int_{\Omega} |\bar{u}|^2 \, dx = \nu.$$

Concluimos então que $\nu = I$ e

$$\nu = \inf \left\{ \frac{\|u\|_{\mathbf{V}}^2}{|u|_{L^2(\Omega)^n}^2}, u \in V \cap S \right\}.$$

Notemos que $\nu > 0$. De fato, supondo o contrário temos $\|\bar{u}\|_{\mathbf{V}} = 0$ e então devido a desigualdade de Poincaré $|\bar{u}|_{L^2(\Omega)^n} = 0$. Mas isto é uma contradição, pois por hipótese $|\bar{u}|_{L^2(\Omega)^n} = 1$.

Denotemos $(\bar{u}, \nu)$ por (u_1, μ_1) .

Vamos supor agora que (u_2, μ_2) é outra solução de (1.5), com $\mu_1 \neq \mu_2$. Segue de (1.5) que

$$\begin{aligned} (\mu_1 - \mu_2) \int_{\Omega} u_1 u_2 \, dx &= \mu_1 \int_{\Omega} u_1 u_2 \, dx - \mu_2 \int_{\Omega} u_1 u_2 \, dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u_1 : \nabla u_2 \, dx - \int_{\Omega} \nabla u_1 : \nabla u_2 \, dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $\mu_1 \neq \mu_2$, inferimos que $\int_{\Omega} u_1 u_2 \, dx = 0$. Constatamos então que autofunções associadas a autovalores distintos são ortogonais na norma de $L^2(\Omega)^n$ e consequentemente na norma de $\mathbf{H}$. Além disso,

obtemos que

$$u_2 \in X_1 := \{v \in \mathbf{V} : (v, u_1) = 0\}.$$

Definimos

$$\mu_2 = \inf\{F(v) : v \in X_1 \cap S\},$$

ou equivalentemente,

$$\mu_2 = \inf \left\{ \frac{\|v\|_{\mathbf{V}}^2}{\|v\|_{L^2(\Omega)^n}^2}, v \in \mathbf{V} \cap S, (v, u_1) = 0 \right\}.$$

Pelo fato de $X_1 \subseteq \mathbf{V}$, inferimos que $\mu_2 \geq \mu_1$.

Notemos que X_1 é um espaço de Hilbert com o mesmo produto interno de $\mathbf{V}$, pois X_1 é o espaço nulo do funcional contínuo $(\cdot, u_1)$ sobre $\mathbf{V}$. Usando então os argumentos anteriores é possível mostrar que μ_2 é atingido em algum $u_2 \in X_1$.

Procedendo indutivamente obtemos

$$\mu_k = \inf \left\{ \frac{\|v\|_{\mathbf{V}}^2}{\|v\|_{L^2(\Omega)^n}^2}, v \in \mathbf{V} \cap S, (v, u_i) = 0, i = 1, 2, 3, \dots, k-1 \right\}.$$

A autofunções associadas são ortonormais em $L^2(\Omega)^n$ por construção e ortogonais em $\mathbf{V}$. De fato, devido a (1.5) temos

$$(v_n, v_m)_{\mathbf{V}} = \int_{\Omega} \nabla v_n : \nabla v_m = \begin{cases} \mu_n, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m. \end{cases}$$

Mostremos agora que $\mu_n \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$.

Vamos supor, por absurdo, que μ_n não tende para o infinito, então μ_n é limitada, ou seja, existe $C > 0$ tal que $|\mu_n| \leq C, \forall n \in \mathbb{N}$. Isto

implica que u_n é limitada em $\mathbf{V}$, pois

$$\|u_n\|_{\mathbf{V}}^2 = \mu_n \leq C.$$

Deste modo, pelo Teorema de Compacidade de Rellich, $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em $L^2(\Omega)^n$, que continuaremos a denotar por $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Consequentemente $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em $L^2(\Omega)^n$. Mas isto é um absurdo, pois

$$|u_n - u_m|_{L^2(\Omega)^n}^2 = (u_n - u_m, u_n - u_m) = 2, \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Provamos então o seguinte resultado:

Teorema 1.3.1 *Os autovalores de A formam uma sequência não decrescente de números reais positivos, $\mu_1, \mu_2, \dots$, tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = +\infty$. As autofunções associadas, $u_1, u_2, \dots$, formam uma sequência ortonormal em $L^2(\Omega)^n$ e ortogonal em $\mathbf{V}$. Ademais,*

$$\mu_k = \inf \left\{ \frac{\|v\|_{\mathbf{V}}^2}{|v|_{L^2(\Omega)^n}^2}, v \in \mathbf{V} \cap S \text{ e } (v, u_i) = 0, i = 1, 2, 3, \dots, k-1 \right\}.$$

Proposição 1.3.2 *As autofunções de A formam um conjunto total em $\mathbf{V}$ e em $\mathbf{H}$.*

Demonstração 1.3.3 *Mostremos que para qualquer $f \in \mathbf{H}$, existem coeficientes $\alpha_n \in \mathbb{R}$, tais que,*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n. \tag{1.6}$$

Equivalentemente, mostraremos

$$|p_N|_{L^2(\Omega)^n} := |f - \sum_{m=1}^N \alpha_m u_m|_{L^2(\Omega)^n} \rightarrow 0, \text{ quando } N \rightarrow \infty. \quad (1.7)$$

Primeiro mostraremos (1.7) para $f \in \mathbf{V}$.

Definimos $\alpha_n := (f, u_n)$ e então devido a ortonormalidade das autofunções de A em $L^2(\Omega)^n$, segue que

$$(p_N, u_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (1.8)$$

Notemos que $p_N \in \mathbf{V}$, pois $f, u_n \in \mathbf{V}$. Deste modo, escolhendo em (1.5), $v = p_N$, $\mu = \mu_n$, $u = u_n$ e utilizando (1.8), obtemos

$$(p_N, u_n)_{\mathbf{V}} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (1.9)$$

Segue de (1.9) e (1.5) que

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathbf{V}}^2 &= \|p_N - \sum_{n=1}^N \alpha_n u_n\|_{\mathbf{V}}^2 \\ &= \|p_N\|_{\mathbf{V}}^2 + \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 \mu_n. \end{aligned}$$

Assim obtemos que

$$\|p_N\|_{\mathbf{V}}^2 \leq C = \text{constante}, \quad (1.10)$$

pois $\mu_n > 0$ e $\|f\|_{\mathbf{V}}^2$ não depende de N .

Por outro lado, devido a (1.9), temos

$$\mu_{N+1} |p_N|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq \|p_N\|_{\mathbf{V}}^2. \quad (1.11)$$

Concluimos a partir de (1.10) e (1.11) que

$$|p_N|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq \frac{C}{\mu_{N+1}} \rightarrow 0, \quad \text{quando } N \rightarrow \infty,$$

pois $\mu_N \rightarrow \infty$.

Agora, vamos estender este resultado para $f \in \mathbf{H}$.

Como $\mathbf{V}$ é denso em $\mathbf{H}$, consideremos $\{f_l\}_{l \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{V}$, tal que $f_l \rightarrow f$ em $L^2(\Omega)^n$, quando $l \rightarrow \infty$. Então

$$\alpha_n, l := (f_l, u_n) \rightarrow \alpha_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} |f - \sum_{n=1}^N \alpha_n u_n|_{L^2(\Omega)^n} &\leq |f - f_l|_{L^2(\Omega)^n} + |f_l - \sum_{n=1}^N \alpha_{n,l} u_n|_{L^2(\Omega)^n} \\ &\quad + |\sum_{n=1}^N (\alpha_{n,l} - \alpha_n) u_n|_{L^2(\Omega)^n}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Devido a ortonormalidade das autofunções de A em $L^2(\Omega)^n$ e a desigualdade de Bessel, inferimos que

$$|\sum_{n=1}^N (\alpha_{n,l} - \alpha_n) u_n|_{L^2(\Omega)^n} = \left(\sum_{n=1}^N (\alpha_{n,l} - \alpha_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq |f_l - f|_{L^2(\Omega)^n}.$$

Substituindo esta última expressão em (1.11) obtemos o resultado para $f \in \mathbf{H}$, ou seja, as autofunções de A formam um conjunto total em $\mathbf{H}$.

A totalidade das autofunções de A em $\mathbf{V}$ pode ser encontrada em [33], pg. 199, onde o autor apresenta a demonstração do seguinte resultado.

Proposição 1.3.4 ([33], pg. 199) Se $X = \mathbf{H}, \mathbf{V}$ or $\mathbf{V}^*$, então $\|P_n u\|_X \leq \|u\|_X$ e $P_n u \rightarrow u$ em X . Sendo que, $P_n u = \sum_{j=1}^n (u, w_j) w_j$ com $A w_i = \lambda_i w_i$ sendo $\{w_i\}$ uma base ortonormal em $\mathbf{H}$ e ortogonal em $\mathbf{V}$. ■

Observação 1.3.5 Denotamos $A_r = (A + r)^{-1}, r > 0$.

Proposição 1.3.6 Seja λ um número complexo, $\lambda = |\lambda|e^{i\theta}$, tal que λ não é autovalor, então $(A - \lambda)^{-1}$ mapeia $\mathbf{H}$ em $\mathbf{V}$ e

$$\|(A - \lambda)^{-1} u\|_{\mathbf{V}} \leq [2|\lambda|(1 - \cos \theta)]^{-\frac{1}{2}} \|u\|_{\mathbf{H}}.$$

Demonstração 1.3.7 Normalizando as autofunções de A , obtemos uma sequência ortonormal total em $\mathbf{V}$: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$. Logo, dado $u \in \mathbf{V}$, vale a relação de Parseval

$$\|u\|_{\mathbf{V}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(u, \varphi_k)_{\mathbf{V}}|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{\Omega} \nabla u : \nabla \varphi_k dx \right|^2. \quad (1.13)$$

Substituindo a equação (1.5) em (1.13) obtemos que

$$\|u\|_{\mathbf{V}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left| \int_{\Omega} u \cdot \varphi_k dx \right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k |(u, \varphi_k)|^2. \quad (1.14)$$

Deste modo, como

$$(A - \lambda)^{-1} u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(u, \varphi_k) \varphi_k}{\mu_k - \lambda},$$

segue que

$$\|(A - \lambda)^{-1}u\|_{\mathbf{V}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k |(u, \varphi_k)|^2}{|\mu_k - \lambda|^2}. \quad (1.15)$$

A função $\frac{\mu}{|\mu - \lambda|^2}$, para $\mu > 0$, atinge seu valor máximo em $\mu = |\lambda|$.

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\mu_k}{|\mu_k - \lambda|^2} &\leq \frac{|\lambda|}{|\lambda - |\lambda||^2} \\ &= \frac{|\lambda|}{||\lambda|e^{i\theta} - |\lambda||^2} \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{2(1 - \cos \theta)}. \end{aligned}$$

Substituindo esta estimativa em (1.15), obtemos

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda)^{-1}u\|_{\mathbf{V}}^2 &\leq (2|\lambda|(1 - \cos \theta))^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} |(u, \varphi_k)|^2 \\ &= (2|\lambda|(1 - \cos \theta))^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-1} |(u, \sqrt{\mu_k} \varphi_k)|^2 \\ &\leq (2|\lambda|(1 - \cos \theta))^{-1} c \sum_{k=1}^{\infty} |(u, \sqrt{\mu_k} \varphi_k)|^2 \\ &\leq (2|\lambda|(1 - \cos \theta))^{-1} c \|u\|_{\mathbf{H}}^2. \end{aligned}$$

■

Corolário 1.3.8 Para r suficientemente grande, A_r é de classe Hilbert-Schmidt.

Demonstração 1.3.9 Mostremos que $\sum_{k=1}^{\infty} |(A + r)^{-1} \varphi_k|_{\mathbf{H}}^2 < \infty$, para

a sequência ortonormal de autofunções de A .

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |(A+r)^{-1} \varphi_k|_{\mathbf{V}}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\varphi_k, \varphi_l) \varphi_l}{\mu_l + r} \right|_{\mathbf{V}}^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k|_{\mathbf{H}}^4 |\varphi_k|_{\mathbf{V}}^2}{(\mu_k + r)^2} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k|_{\mathbf{V}}^6}{(\mu_k + r)^2} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_k + r)^2} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu'_k)^2} < \infty,
\end{aligned}$$

sendo que μ'_k são os autovalores do operador Laplaciano (Δ). A convergência de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu'_k)^2}$ segue da Teoria de Hilbert-Schmidt aplicada a operadores compactos, pois Δ^{-1} é um operador compacto ([16], pg. 275).

■

Capítulo 2

Teoria da estabilidade linear

Iniciamos este capítulo com uma definição rigorosa do conceito de estabilidade. Devido a esta definição reduzimos o estudo da estabilidade ao estudo de um sistema de equações diferenciais parciais não-linear para os campos de perturbação, que possui difícil resolução.

Como uma primeira aproximação ao estudo da estabilidade, um caminho histórico foi utilizar o método linear, que consiste em estudar o sistema para os campos de perturbação desconsiderando o termo não-linear.

Neste capítulo, após uma introdução sobre o método linear, temos como objetivo justificá-lo matematicamente. Para alcançar este objetivo vamos demonstrar um teorema devido a Sattinger. Este Teorema afirma que se a parte real do primeiro autovalor de um operador linear, associado ao sistema de equações diferenciais parciais para os campos

de perturbação linearizado, (L) , for positiva, então ocorre estabilidade.

Diante disso, dedicamos as seções 2.3 e 2.4 a definir o operador L e estudar propriedades relativas deste operador, como por exemplo, caracterizar o seu espectro e provar algumas propriedades técnicas. Na seção 2.5, provamos finalmente a validade do método linear, sob as seguintes hipóteses: O escoamento básico e as autofunções de L e L^* terem primeiras derivadas parciais de primeira ordem limitadas e os campos de perturbação serem suficientemente pequenos em um instante inicial.

Porém, apresentamos apenas ao final deste capítulo, na seção 2.6, o grande mérito do método linear: Um teorema que garante a instabilidade de um escoamento básico independente do tamanho inicial da perturbação.

Neste capítulo, consideraremos o escoamento básico e os campos de perturbação nos espaços já citados na introdução.

2.1 Definição de estabilidade

Seja $m = (U, P)$ uma solução estacionária do sistema de equações de Navier-Stokes, isto é, uma solução que satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mathcal{R}} \Delta U_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} = U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \text{ em } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \text{ em } \Omega \times (0, \infty), \\ U = \psi \text{ em } \partial\Omega \times (0, \infty), \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Consideremos agora uma perturbação nos campos de velocidade e pressão, $(u(x, t), p(x, t))$, tal que u satisfaça as mesmas condições de

fronteira que U e tenha divergente nulo. Deste modo, $w_i = U_i + u_i$ satisfaz as equações de Navier-Stokes, visto que continua a descrever o movimento de algum fluido. Ademais, o sistema de equações (2) para w nos traz o seguinte sistema de equações diferenciais para u , denominado *sistema de equações para os campos de perturbação*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{1}{\mathcal{R}} \Delta u_i + U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \text{ em } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \text{ em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Definição 2.1.1 *Seja $m = (U, P)$ uma solução básica estacionária para as equações de Navier-Stokes. Dizemos que m é **estável** se, e somente se,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 : \int_{\Omega} u_0^2 dx < \delta \Rightarrow \sup_{t \in [0, \infty)} \int_{\Omega} u^2(x, t) dx < \epsilon.$$

*Dizemos que m é **instável** se não é estável.*

Definição 2.1.2 *Dizemos que m é **assintoticamente estável** se, e somente se, m é estável e,*

$$\exists \gamma \in (0, \infty] : \int_{\Omega} u_0^2 dx < \gamma \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u^2(x, t) dx = 0.$$

*Se $\gamma = \infty$, então m é dito **incondicionalmente assintoticamente estável**.*

Observação 2.1.3 *Esta definição continua sendo válida caso a solução básica não seja estacionária.*

Uma consequência imediata da definição é que o estudo da estabilidade de U resume-se ao estudo da evolução no tempo das soluções do sistema de equações diferenciais (2.2). No entanto, esse sistema apresenta um termo não-linear, tornando o seu estudo bastante difícil.

2.2 Uma introdução à teoria linear

Na teoria linear, motivo de estudo deste capítulo, tenta-se contornar a dificuldade apresentada anteriormente linearizando o sistema (2.2), isto é, ignorando o termo não linear. Isso facilita bastante a análise, conforme veremos.

Considerando o sistema (2.2), para a perturbação, sem o termo não-linear

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{\mathcal{R}} \Delta u_i + U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \text{ em } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \text{ em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

podemos obter soluções da forma

$$u(x, t) = \psi(x)e^{-\sigma t} \text{ e } p = \phi(x)e^{-\sigma t}, \text{ } \sigma \text{ complexo.} \quad (2.4)$$

Sendo σ complexo, $\sigma = \text{Re}(\sigma) + i\text{Im}(\sigma)$, temos que

$$u(x, t) = \psi(x)e^{-\text{Re}(\sigma)t} (\cos(\text{Im}(\sigma)t) - i \sin(\text{Im}(\sigma)t)).$$

Logo, se $\text{Re}(\sigma) > 0$, então u e p tendem a zero com o passar do tempo, de modo que, a evolução no tempo de soluções da forma (2.4) depende apenas do sinal de $\text{Re}(\sigma)$.

Substituindo (2.4) em (2.3), obtemos que σ é um autovalor do seguinte problema:

$$\begin{cases} -\frac{1}{\mathcal{R}}\Delta\psi + U.\nabla\psi + \psi.\nabla U + \nabla\phi = \sigma\psi & \text{em } \Omega, \\ \text{div } \psi = 0 & \text{em } \Omega, \\ \psi(x) = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.5)$$

Então, se todos os autovalores de (2.5) tiverem parte real positiva, o escoamento básico é estável para perturbações da forma (2.4).

Para que o escoamento seja estável é necessário que ele o seja para qualquer perturbação, isto é, para qualquer solução de (2.3) e não apenas para soluções da forma (2.4). No entanto, Galdi mostrou que se estas soluções específicas tendem a desaparecer com o tempo, então o mesmo ocorre com todas as soluções de (2.3) ([10], pg. 18).

Salientamos que a priori não sabemos se existe estabilidade ou instabilidade como definido na seção 2.1, uma vez que esta análise foi feita para soluções de (2.3) e não de (2.2). Logo,

Definição 2.2.1 *Dizemos que um escoamento básico estacionário m é dito **linearmente estável** se, e somente se todos os autovalores de (2.5) são positivos. m é dito **linearmente instável** se, e somente se, (2.5) possui algum autovalor negativo.*

A análise linear, como vimos acima, facilita bastante o estudo da estabilidade e evidências experimentais mostram que, para perturbações suficientemente pequenas, existe realmente uma concordância da solução vinda das equações linearizadas com a realidade. Por estes motivos durante muito tempo, cerca de 80 anos, a teoria linear foi muito utilizada, para fins práticos, sem uma justificativa matemática rigorosa de sua validade.

A princípio poderíamos justificar o uso da teoria linear afirmando que o termo não linear é insignificante, pois estamos considerando perturbações suficientemente pequenas. No entanto, isso não é evidente, devido ao fato desse termo envolver derivadas.

G. Prodi, em 1962, foi o primeiro a apresentar um resultado que justificava o uso da teoria linear. Anos mais tarde, em 1969, Davis H. Sattinger apresentou um resultado com algumas hipóteses diferentes do trabalho de G. Prodi.

Neste capítulo, vamos justamente apresentar o Teorema devido a Sattinger. Este Teorema reduz o estudo da estabilidade ao estudo do espectro de um operador linear conveniente (L), que está relacionado à parte linear do sistema de equações para as perturbações. Deste modo, o termo não-linear não influencia no conceito de estabilidade.

2.3 O operador L

Nesta seção vamos definir o operador L associado à parte linear do sistema de equações para a perturbação. Veremos que a análise do espectro deste operador garantirá ou não a estabilidade do escoamento básico.

Consideraremos Ω com fronteira de classe C^2 e as seguintes normas em $\mathbf{H}$ e $\mathbf{V}$, respectivamente,

$$|v|_{\mathbf{H}}^2 = \int_{\Omega} v_i v_i \, dx, \quad \|v\|_{\mathbf{V}}^2 = \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx.$$

Lembramos que $L^2(\Omega)^n = \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}^{\perp}$, pois $\mathbf{H}$ é um subespaço fechado de $L^2(\Omega)^n$, que por sua vez é espaço de Hilbert. Logo, dado $u \in L^2(\Omega)^n$ temos que $u = w + \nabla p$, sendo $w \in \mathbf{H}$ e $\nabla p \in \mathbf{H}^{\perp}$.

A partir desta decomposição definimos as projeções ortogonais de $L^2(\Omega)^n$ sobre $\mathbf{H}^{\perp}$ e sobre $\mathbf{H}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P_{\pi} : L^2(\Omega)^n &\longrightarrow \mathbf{H}^{\perp} & P_{\sigma} : L^2(\Omega)^n &\longrightarrow \mathbf{H} \\ u &\longmapsto \nabla p & u &\longmapsto I - P_{\pi}(u) \end{aligned}$$

sendo $u = w + \nabla p$, $w \in \mathbf{H}$ e $\nabla p \in \mathbf{H}^{\perp}$.

Aplicando a projeção P_{σ} em (2.2) obtemos a expressão a seguir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu + N(u, u) = 0, \quad (2.6)$$

sendo

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu = P_{\sigma}[-\frac{1}{\mathcal{R}}\Delta u + U \cdot \nabla u + u \cdot \nabla U]; \\ N(u, u) = P_{\sigma}(u \cdot \nabla u); \\ P_{\sigma}(\nabla p) = 0, \text{ pois } \nabla p \in \mathbf{H}^{\perp}; \\ P_{\sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \text{ pois } \frac{\partial u}{\partial t} \in \mathbf{H}. \end{array} \right.$$

Ressaltamos que, devido a definição de P_{σ} , temos uma expressão

explícita para $L : \mathbf{V} \cap H^2(\Omega)^n \rightarrow L^2(\Omega)^n$:

$$L(u) = -\frac{1}{\mathcal{R}}\Delta u + U \cdot \nabla u + u \cdot \nabla U - P_\pi \left[-\frac{1}{\mathcal{R}}\Delta u + U \cdot \nabla u + u \cdot \nabla U \right].$$

Ademais, como todo elemento de $\mathbf{H}^\perp$ é da forma ∇p , para algum $p \in H^1(\Omega)$, temos $-P_\pi \left[-\frac{1}{\mathcal{R}}\Delta u + U \cdot \nabla u + u \cdot \nabla U \right] = \nabla p$, para algum $p \in H^1(\Omega)$. Consequentemente,

$$L(u) = -\frac{1}{\mathcal{R}}\Delta u + U \cdot \nabla u + u \cdot \nabla U + \nabla p. \quad (2.7)$$

2.4 Lemas

Nesta seção vamos provar vários lemas com o intuito de provar o teorema já citado no início do capítulo.

Lema 2.4.1 *Se o campo de velocidade do escoamento básico U e as autofunções de L e L^* possuem derivadas parciais de primeira ordem limitadas em Ω , então as seguintes desigualdades são válidas para $v(t), u(t) \in \mathbf{V} \cap H^2(\Omega)^n$:*

- (i) $\frac{d}{dt} \frac{|u|_{\mathbf{H}}^2}{2} + (Lu, u) = 0;$
- (ii) $|(Lu, v)| \leq c_1 \|u\|_{\mathbf{V}} \|v\|_{\mathbf{V}};$
- (iii) $Re(Lu, u) \geq \|u\|_{\mathbf{V}}^2 - c_2 |u|_{\mathbf{H}}^2;$
- (iv) $Im(Lu, u) \leq c_7 \|u\|_{\mathbf{V}} |u|_{\mathbf{H}}.$

Demonstração 2.4.2 (i) *Multiplicando (2.6) por u , no produto interno de $L^2(\Omega)^n$, obtemos*

$$\frac{d}{dt} \frac{|u|_{\mathbf{H}}^2}{2} + (Lu, u) + (N(u, u), u) = 0. \quad (2.8)$$

No entanto,

$$\begin{aligned}
(N(u, u), u) &= (P_\sigma(u \cdot \nabla u), u) \\
&= (u \cdot \nabla u, P_\sigma^* u) \\
&= (u \cdot \nabla u, u) \\
&= \int_\Omega u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_i \, dx \\
&= \int_\Omega \left(\frac{\partial u_j u_i^2}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} \right) dx \\
&= - \int_\Omega u_i \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} \, dx \\
&= - \int_\Omega u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j \, dx \\
&= -(N(u, u), u).
\end{aligned}$$

Concluimos, deste modo, que $(N(u, u), u) = 0$ e

$$\frac{d}{dt} \frac{|u|_{\mathbf{H}}^2}{2} + (Lu, u) = 0.$$

(ii) De fato,

$$\begin{aligned}
|(Lu, v)| &= \left| \int_\Omega \left(-\Delta u_i \bar{v}_i + U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \bar{v}_i + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \bar{v}_i \right) dx \right| \\
&= \left| \int_\Omega \left(-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \bar{v}_i \right) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_j u_i \bar{v}_i) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\partial U_j}{\partial x_j} u_i \bar{v}_i - U_j u_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \bar{v}_i \right) dx \right| \\
&= \left| \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - U_j u_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \bar{v}_i \right) dx \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} dx \right| + \left| \int_{\Omega} U_j u_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} dx \right| + \left| \int_{\Omega} u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \bar{v}_i dx \right| \\
&\leq \tilde{c}_1 \|u\|_{\mathbf{V}} \|v\|_{\mathbf{V}} + \|U\|_4 \|v\|_2 \|u\|_4 + \|u\|_4 \|U\|_2 \|v\|_4 \\
&\leq \tilde{c}_1 \|u\|_{\mathbf{V}} \|v\|_{\mathbf{V}} + \tilde{c}_2 |u|_{\mathbf{H}}^{1/4} \|u\|_{\mathbf{V}}^{3/4} \|v\|_{\mathbf{V}} + \tilde{c}_3 |u|_{\mathbf{H}}^{1/4} \|u\|_{\mathbf{V}}^{3/4} |v|_{\mathbf{H}}^{1/4} \|v\|_{\mathbf{V}}^{3/4} \\
&\leq c_1 \|u\|_{\mathbf{V}} \|v\|_{\mathbf{V}}.
\end{aligned}$$

Notemos que no terceiro passo usamos o Teorema da Divergência, no quinto passo usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o item (i) da Proposição 1.2.11. No sexto passo usamos o item (ii) da Proposição 1.2.11, a desigualdade de Poincaré, e a hipótese que as primeiras derivadas parciais de U são limitadas. No último passo usamos a desigualdade de Poincaré nas segunda e terceira parcelas.

(iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{\partial(U_j u_i)}{\partial x_j} \bar{u}_i dx &= \int_{\Omega} \left(\frac{U_j \partial u_i}{\partial x_j} \bar{u}_i - \frac{\partial U_j}{\partial x_j} u_i \bar{u}_i \right) dx \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial(U_j u_i \bar{u}_i)}{\partial x_j} - U_j u_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) dx.
\end{aligned}$$

Consequentemente $\int_{\Omega} U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \bar{u}_i dx = - \int_{\Omega} U_j u_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} dx$, donde

$$\operatorname{Re} \left(\int_{\Omega} U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \bar{u}_i dx \right) = 0.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(Lu, u) &= \operatorname{Re} \int_{\Omega} \left(-\Delta u_i \bar{u}_i + U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \bar{u}_i + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \bar{u}_i \right) dx \\
&= \operatorname{Re} \int_{\Omega} \left(-\Delta u_i \bar{u}_i + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \bar{u}_i \right) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} \int_{\Omega} \left(-\operatorname{div} [\nabla u_i] \bar{u}_i + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \bar{u}_i \right) dx \\
&= \operatorname{Re} \int_{\Omega} \left(\nabla u_i \cdot \nabla \bar{u}_i - \operatorname{div} (\bar{u}_i \nabla u_i) + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \bar{u}_i \right) dx \\
&= \operatorname{Re} \int_{\Omega} \left(\nabla u_i \cdot \nabla \bar{u}_i + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \bar{u}_i \right) dx \\
&= \|u\|_{\mathbf{V}}^2 + \operatorname{Re} \left(\int_{\Omega} u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \bar{u}_i dx \right).
\end{aligned}$$

Usando a Proposição 1.2.11, a desigualdade de Poincaré e o fato que as primeiras derivadas parciais de U são limitadas, inferimos que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \bar{u}_i dx \right| &\leq \|u\|_4 \|U\|_2 \|u\|_4 \\
&\leq \tilde{c} |u|_{\mathbf{H}}^{1/2} \|u\|_{\mathbf{V}}^{3/2} \\
&\leq c_2 \|u\|_{\mathbf{V}}^2.
\end{aligned}$$

Por conseguinte, usando a desigualdade de Poincaré, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left(\int_{\Omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} u_j u_i dx \right) &\geq -\tilde{c}_2 \|u\|_{\mathbf{V}}^2 \\
&\geq -c_2 |u|_{\mathbf{H}}^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\operatorname{Re} (Lu, u) \geq \|u\|_{\mathbf{V}}^2 - c_2 |u|_{\mathbf{H}}^2.$$

(iv) Devido aos itens anteriores temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} (Lu, u) &= \operatorname{Im} \left(\int_{\Omega} u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \bar{u}_i dx \right) + \int_{\Omega} U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \bar{u}_i dx \\
&= \operatorname{Im} \left(\int_{\Omega} u_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} U_i dx \right) + \int_{\Omega} U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \bar{u}_i dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|u\|_4 \|u\|_2 \|U\|_4 + \|U\|_4 \|u\|_2 \|u\|_4 \\
&\leq c |u|_{\mathbf{H}}^{1/4} \|u\|_{\mathbf{V}}^{3/4} |u|_{\mathbf{H}} \\
&\leq c \|u\|_{\mathbf{H}}^{1/4} \|u\|_{\mathbf{V}}^{3/4} |u|_{\mathbf{H}} \\
&\leq c_7 |u|_{\mathbf{H}} \|u\|_{\mathbf{V}}.
\end{aligned}$$

No segundo passo usamos na primeira parcela o Teorema da Divergência e os seguintes fatos: u se anula na fronteira e u tem divergente nulo. No terceiro passo usamos o item (i) da Proposição 1.2.11. No quarto passo usamos o item (ii) da Proposição 1.2.11 e em seguida, usamos a desigualdade de Poincaré e o fato que as derivadas parciais de primeira ordem de U são limitadas. No quinto passo, usamos a desigualdade de Poincaré novamente.

Lema 2.4.3 *Os espectros de L e L^* consistem ambos de um conjunto infinito enumerável de autovalores tendendo ao infinito no lado direito do plano. Cada autovalor tem multiplicidade finita, e os autovalores não podem se aglomerar perto de um número complexo finito.*

Demonstração 2.4.4 *Vamos provar que L é um operador fechado e que existe r tal que $(L + rI)^{-1}$ é compacto, pois devido à Teorema 1.1.23, teremos que o espectro de L consiste de um conjunto infinito enumerável e com multiplicidades algébrica e geométrica finitas. Em seguida, mostraremos que os autovalores de L estão dentro de uma região parabólica no lado direito do plano, donde seguirá o resultado.*

Consideremos a forma bilinear

$$L_r[u, v] = ((L + r)u, v), \quad (u, v) \in \mathbf{V} \cap H^2(\Omega)^n \times V, \quad r \geq c_2 > 0,$$

sendo c_2 definido no item (iii) do Lema 2.4.1.

L_r é contínua. De fato,

$$\begin{aligned}
 |L_r[u, v]| &\leq |(Lu, v)| + r|(u, v)| \\
 &\leq c_1\|u\|_{\mathbf{V}}\|v\|_{\mathbf{V}} + r|u|_{\mathbf{H}}|u|_{\mathbf{H}} \\
 &\leq c_1\|u\|_{\mathbf{V}}\|v\|_{\mathbf{V}} + \tilde{r}\|u\|_{\mathbf{V}}\|v\|_{\mathbf{V}} \\
 &= c\|u\|_{\mathbf{V}}\|v\|_{\mathbf{V}}.
 \end{aligned}$$

Notemos que para obter a segunda desigualdade usamos o item (ii) do Lema 2.4.1 e a desigualdade de Cauchy-Schwarz; para obter a terceira usamos a desigualdade de Poincaré.

Mostremos agora que o operador $(L + r) : \mathbf{V} \cap H^2(\Omega)^n \longrightarrow \mathbf{H}$ é fechado.

Seja $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{V} \cap H^2(\Omega)^n$, tal que $u_n \rightarrow u$ quando $n \rightarrow \infty$ e $(L + r)u_n \rightarrow w$ em $\mathbf{H}$. Notemos que $u \in \mathbf{V} \cap H^2(\Omega)^n$, assim para mostrar que $(L + r)$ é fechado, basta mostrar $(L + r)u = w$. Mostremos então que $((L + r)u - w, v) = 0$, $\forall v \in \mathbf{H}$.

Dado $v \in \mathbf{H}$ temos:

$$\begin{aligned}
 |((L + r)u - w, v)| &\leq |((L + r)(u - u_n), v)| + |((L + r)u_n - w, v)| \\
 &\leq c\|u - u_n\|_{\mathbf{V}}\|v\|_{\mathbf{V}} + |(L + r)u_n - w|_{\mathbf{H}}|v|_{\mathbf{H}},
 \end{aligned}$$

sendo que a última desigualdade segue, respectivamente, da continuidade da forma bilinear $L_r[u, v]$ e da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

O termo $c\|u - u_n\|_{\mathbf{V}}\|v\|_{\mathbf{V}} + |(L + r)u_n - w|_{\mathbf{H}}|v|_{\mathbf{H}}$ tende a zero, pois $u_n \rightarrow u$ em $\mathbf{V} \cap H^2(\Omega)^n$ e $(L + r)u_n \rightarrow w$ em $\mathbf{H}$, donde $((L + r)u - w, v) = 0$, $\forall v \in \mathbf{H}$. Segue que $(L + r)u = w$ e portanto $(L + r)$ é fechado.

Consequentemente obtemos que L é fechado. Notemos que $L_r[u, v]$

é forma bilinear contínua definida em $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$, $\mathbf{V}$ é espaço de Hilbert e devido aos itens (iii) e (iv) do Lema 2.4.1, temos

$$|L_r(x, y)| \leq \alpha \|x\|_{\mathbf{V}} \|y\|_{\mathbf{V}} \text{ e } L_r(x, x) \geq \|x\|_{\mathbf{V}}^2.$$

Assim, devido ao Teorema de Lax-Milgram, dado $f \in \mathbf{H}$, o problema generalizado de Dirichlet abaixo possui uma única solução $u \in \mathbf{V}$, $\forall \varphi \in \mathbf{V}$.

$$L_r[u, \varphi] = (f, \varphi).$$

Como $L_r[u, \varphi] = ((L+r)u, \varphi)$, temos $((L+r)u, v) = (f, v)$, para todo v em $\mathbf{V}$. Consequentemente segue da Proposição 1.2.6 que $(L+r)u - f = \nabla w$, para algum $w \in H^1(\Omega)$.

No entanto, ∇w está no complemento ortogonal de $\mathbf{H}$ e $(L+r)u - f$ está em $\mathbf{H}$ (pois $L+r$ aplica $\mathbf{V}$ em $\mathbf{H}$ e f está em $\mathbf{H}$), logo $\nabla w = 0$, isto é, $(L+r)u = f$. Constatamos assim que $(L+r) : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{H}$ é bijetivo.

Deste modo, como $(L+r)$ é operador linear fechado e bijetivo inferimos, devido a Proposição 1.1.19, que $(L+r)^{-1} : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{V}$ é contínuo. Além disso, devido a Proposição 1.2.9, temos que a imersão i de $\mathbf{V}$ em $\mathbf{H}$ é compacta. Logo, $i \circ (L+r)^{-1} : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ é compacto, pois é a composição de um operador compacto com um contínuo. Segue que $L : \mathbf{V} \cap H^2(\Omega)^n \longrightarrow \mathbf{H}$ tem resolvente compacto.

Vamos mostrar agora que os autovalores de L estão dentro da região parabólica

$$c_3\tau^2 < \sigma + c_4, \quad (\lambda = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}).$$

De fato, seja λ um número complexo, pertencente ao conjunto resolvente de L , então $(L - \lambda I)^{-1}$ existe e é limitado. Logo, dado $f \in \mathbf{H}$

existe $u \in \mathbf{V}$ tal que $Lu - \lambda u = f$, a saber $u = (L - \lambda I)^{-1}f$.

Fazendo o produto interno por $u \in \mathbf{V}$ em ambos os lados de $Lu - \lambda u = f$, segue que

$$(Lu, u) - \lambda(u, u) = (f, u). \quad (2.9)$$

Consideramos a seguir a parte real e imaginária de (2.9) para obter uma relação entre as partes real e imaginária de λ .

Considerando a parte real de (2.9) obtemos a seguinte equação:

$$\operatorname{Re}(Lu, u) - \sigma|u|_{\mathbf{H}}^2 = \operatorname{Re}(f, u). \quad (2.10)$$

Pelo item (iii), do Lema 2.4.1, temos $\operatorname{Re}(Lu, u) \geq \|u\|_{\mathbf{V}}^2 - c_2|u|_{\mathbf{H}}^2$ e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz resulta que $\operatorname{Re}(f, u) \leq |f|_{\mathbf{H}} \cdot |u|_{\mathbf{H}}$. Substituindo estas estimativas em (2.10) segue que

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathbf{V}}^2 - \sigma|u|_{\mathbf{H}}^2 &\leq |f|_{\mathbf{H}} \cdot |u|_{\mathbf{H}} + c_2|u|^2 \\ &\leq 2 \left(\frac{|f|_{\mathbf{H}}^2}{4} + |u|_{\mathbf{H}}^2 \right) + c_2|u|_{\mathbf{H}}^2 \\ &= \frac{|f|_{\mathbf{H}}^2}{2} + c_4|u|_{\mathbf{H}}^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$-\sigma|u|_{\mathbf{H}}^2 \leq \frac{|f|_{\mathbf{H}}^2}{2} + c_4|u|_{\mathbf{H}}^2 - \|u\|_{\mathbf{V}}^2. \quad (2.11)$$

Agora vamos considerar a parte imaginária de (2.9):

$$\operatorname{Im}(Lu, u) - \tau|u|_{\mathbf{H}}^2 = \operatorname{Im}(f, u).$$

Usando o item (iv) do Lema 2.4.1 e a desigualdade de Cauchy-

Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
\tau|u|_{\mathbf{H}}^2 &\leq \operatorname{Im}(Lu, u) + |f|_{\mathbf{H}} \cdot |u|_{\mathbf{H}} \\
&\leq c_7|u|_{\mathbf{H}} \cdot \|u\|_{\mathbf{V}} + |f|_{\mathbf{H}} \cdot |u|_{\mathbf{H}} \\
&\leq \left(\|u\|_{\mathbf{V}} + \frac{|f|_{\mathbf{H}}}{c_7} \right) |u|_{\mathbf{H}} c_7.
\end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
\frac{\tau^2|u|_{\mathbf{H}}^2}{c_7^2} &\leq \left(\|u\|_{\mathbf{V}} + \frac{|f|_{\mathbf{H}}}{c_7} \right)^2 \\
&\leq 2(\|u\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{|f|_{\mathbf{H}}^2}{c_7^2}),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\tau^2|u|_{\mathbf{H}}^2}{2c_7^2} \leq \|u\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{|f|_{\mathbf{H}}^2}{c_7^2}. \quad (2.12)$$

Adicionando (2.11) e (2.12) obtemos

$$(c_3\tau^2 - \sigma - c_4)|u|_{\mathbf{H}}^2 \leq c_8|f|_{\mathbf{H}}^2,$$

e então, se $(c_3\tau^2 - \sigma - c_4) > 0$, segue que

$$\frac{|u|_{\mathbf{H}}}{|f|_{\mathbf{H}}} \leq \frac{c_8^{\frac{1}{2}}}{(c_3\tau^2 - \sigma - c_4)^{\frac{1}{2}}}, \quad \forall f \in \mathbf{H}.$$

Além disso,

$$\frac{|(L - \lambda)^{-1}f|_{\mathbf{H}}}{|f|_{\mathbf{H}}} = \frac{|u|_{\mathbf{H}}}{|f|_{\mathbf{H}}} \leq \frac{c_8^{\frac{1}{2}}}{(c_3\tau^2 - \sigma - c_4)^{\frac{1}{2}}}, \quad \forall f \in \mathbf{H}.$$

Consequentemente

$$|(L - \lambda)^{-1}| = \sup_{v \in \mathbf{H}, v \neq 0} \frac{|(L - \lambda)^{-1}v|_{\mathbf{H}}}{|v|_{\mathbf{H}}} \leq \frac{c_8^{\frac{1}{2}}}{(c_3\tau^2 - \sigma - c_4)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.13)$$

e $(L - \lambda)^{-1}$ está bem definida. Deste modo, se λ é tal que $(c_3\tau^2 - \sigma - c_4) > 0$, então λ está no conjunto resolvente de L . Logo, o conjunto dos autovalores de L está na região interior da parábola $c_3\tau^2 < \sigma + c_4$, sendo $\lambda = \sigma + i\tau$.

■

Observação 2.4.5 Segue de (2.13) que em um raio $\{\lambda = \rho e^{i\theta}; \rho > 0\}$ do plano complexo, temos

$$\begin{aligned} |(L - \lambda)^{-1}| &\leq \frac{c_8^{\frac{1}{2}} |\lambda|^{-1} |\lambda|}{(c_3\tau^2 - \sigma - c_4)^{\frac{1}{2}}} \\ &= |\lambda|^{-1} \frac{c_8^{\frac{1}{2}} (\sigma^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}}{(c_3\tau^2 - \sigma - c_4)^{\frac{1}{2}}} \\ &= |\lambda|^{-1} \frac{c_8^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{\tau^2}{\sigma^2})^{\frac{1}{2}}}{(c_3 \frac{\tau^2}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma} - \frac{c_4}{\sigma^2})^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Devido a definição de raio de crescimento mínimo de um operador, temos que $\frac{\tau^2}{\sigma^2} = \tan \theta = \text{constante}$. Logo, exceto pelo eixo real positivo, todo raio é de crescimento mínimo para o operador L .

Lema 2.4.6 Para r suficientemente grande o operador $(L + r)$ possui inversa de classe Hilbert-Schmidt.

Demonstração 2.4.7 *Escrevemos $L = A + B$, sendo*

$$Bu = P_\sigma \left[U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right].$$

Notemos que B é um operador limitado:

$$\begin{aligned} |Bu|_{\mathbf{H}}^2 &= \int_{\Omega} \left(U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \left(U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \left(U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} u_j^2 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \\ &\leq c |u|_{\mathbf{H}} \\ &\leq c_9 \|u\|_{\mathbf{V}}^2. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Notemos que para obtermos o terceiro passo utilizamos o Teorema da Divergência em conjunto com os seguintes fatos: u se anula na fronteira e U possui divergente zero. No quarto passo usamos que as primeiras derivadas de U são limitadas em Ω ; e para a obtenção do quinto passo usamos a desigualdade de Poincaré.

Devido a Proposição 1.3.6 e ao Corolário 1.3.8, temos que A_r mapeia $\mathbf{H}$ em $\mathbf{V}$ e é de classe Hilbert-Schmidt. Assim a composição BA_r é um operador de $\mathbf{H}$ nele mesmo e BA_r é um operador de classe Hilbert-Schmidt, pois é o produto de um operador de classe Hilbert-Schmidt com um limitado. Consequentemente BA_r é um operador compacto.

Deste modo, através da equação (2.14) e a Proposição 1.3.6, obtemos

$$|BA_r u|_{\mathbf{H}} \leq c_9 \|A_r u\|_{\mathbf{V}} \leq \frac{c_9}{2r^{\frac{1}{2}}} |u|_{\mathbf{H}}.$$

Notemos, na desigualdade acima, que se r for grande o suficiente, então $|BA_r| < 1$. Concluimos, devido a Proposição 1.1.29, que $(I + BA_r)^{-1}$ existe e é limitado.

Logo,

$$(L + r)^{-1} = (A + B + r)^{-1} = ((I + BA_r)(A + r))^{-1} = A_r(I + BA_r)^{-1},$$

e então $(L + r)^{-1}$ é um operador de classe Hilbert-Schmidt, pois é o produto de um operador de classe Hilbert-Schmidt com um limitado.

■

Lema 2.4.8 *As autofunções de L e L^* são completas em $\mathbf{H}$.*

Demonstração 2.4.9 *O resultado segue devido a observação 2.4.5, ao Lema 2.4.6 e ao Corolário 1.1.32.*

■

Definimos agora $\mathfrak{M}_n$ como sendo o subespaço de $\mathbf{H}$ invariante por L , correspondente aos autovalores que tem parte real menor ou igual do que n . Devido ao Lema 2.4.3 sabemos que os autovalores de L tem multiplicidades algébrica e geométrica finitas e podem acumular-se apenas no infinito, logo a dimensão de $\mathfrak{M}_n$ é finita e portanto $\mathfrak{M}_n$ é um subespaço fechado de $\mathbf{H}$.

Denotaremos por $\mathfrak{N}_n$ o complemento ortogonal em $\mathbf{H}$ e por $\mathfrak{M}_n^*$ o espaço dual de $\mathfrak{M}_n$. Como $\mathfrak{M}_n$ é um subespaço fechado de $\mathbf{H}$ temos, devido a Proposição 1.1.11, que $\mathbf{H} = \mathfrak{M}_n \oplus \mathfrak{N}_n$.

Então, $\mathfrak{M}_n$ e $\mathfrak{N}_n$ são respectivamente imagem e núcleo do seguinte operador de projeção ([32], pg. 418)

$$P_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} (\lambda - L)^{-1} d\lambda,$$

sendo que C_n engloba exatamente os autovalores λ com $Re(\lambda) \leq n$. Além disso, $\mathfrak{M}_n^*$ é a projeção do operador adjunto de P_n

$$P_n^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} (\bar{\lambda} - L^*)^{-1} d\lambda.$$

Assim, devido a Proposição 1.1.24, temos que $(\mathfrak{N}_n)^\perp = \mathfrak{M}_n^*$.

Lema 2.4.10 *Seja $\mathfrak{M}_n$ o subespaço invariante de L correspondendo aos autovalores λ tais que $Re(\lambda) \leq n$ e seja $\mathfrak{N}_n$ o subespaço complementar. Então para n suficientemente grande,*

$$(Lu, u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_{\mathbf{V}}^2, \forall u \in \mathfrak{N}_n \cap \mathbf{V}.$$

Demonstração 2.4.11 *Pelo item (iii) do Lema 2.4.1, temos que*

$$Re(Lu, u) \geq \|u\|_{\mathbf{V}}^2 - c_2 |u|_{\mathbf{H}}^2 = \|u\|_{\mathbf{V}}^2 (1 - c_2 \frac{|u|_{\mathbf{H}}^2}{\|u\|_{\mathbf{V}}^2}), \quad \forall u \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}.$$

Logo, para demonstrarmos o lema, basta mostrarmos que $\|u\|_{\mathbf{V}}^2 \geq 2c_2 |u|_{\mathbf{H}}^2$, $u \in \mathfrak{N}_n \cap \mathbf{V}$, n grande o suficiente.

Denotemos

$$d(\mathfrak{M}_n^*) := \inf \left\{ \frac{\|u\|_{\mathbf{V}}^2}{|u|_{\mathbf{H}}^2}, \text{ sendo } u \in (\mathfrak{M}_n^*)^\perp \cap \mathbf{V} = \mathfrak{N}_n \cap \mathbf{V} \right\} = 0.$$

Consideremos o operador $A(u) = P_\sigma(-\Delta u)$. Pelo Teorema 1.3.1, os autovalores de A formam uma sequência enumerável $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$,

de números reais positivos, tendendo para o infinito, as autofunções associadas $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ formam uma sequência ortonormal em $\mathbf{H}$, e ortogonal em $\mathbf{H}$, além disso

$$\mu_k = \inf \left\{ \frac{\|u\|_{\mathbf{V}}^2}{|u|_{\mathbf{H}}^2}, u \in \mathbf{V}, (u, \varphi_i) = 0, i = 1, 2, 3, \dots, k-1 \right\}. \quad (2.15)$$

Mostraremos então que para qualquer k existe n tal que $d(\mathfrak{M}_n^*) \geq \mu_k$, pois deste modo, dado $\mu_k \geq 2c$, teremos

$$\|u\|_{\mathbf{V}}^2 \geq d(\mathfrak{M}_n^*)_k |u|_{\mathbf{H}}^2 \geq \mu_k |u|_{\mathbf{H}}^2 \geq 2c_2 |u|_{\mathbf{H}}^2,$$

para qualquer função $u \in \mathfrak{N}_n \cap \mathbf{H}$, e o lema estará demonstrado.

Denotemos por E_k o operador linear que projeta ortogonalmente sobre o espaço gerado por $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k+1}\}$. Então

$$E_k u = \sum_{i=1}^{k+1} (u, \varphi_i) \varphi_i.$$

Definindo $F_k = I - E_k$, temos $(E_k(u), F_k(u)) = 0$ e $(E_k(u), F_k(u))_{\mathbf{V}} = 0$ para toda $u \in \mathbf{H} \cap \mathbf{V}$. Consequentemente

$$|u|_{\mathbf{H}}^2 = |E_k u|_{\mathbf{H}}^2 + |F_k u|_{\mathbf{H}}^2, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathbf{V}}^2 &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial(E_k u)_i}{\partial x_j} + \frac{\partial(F_k u)_i}{\partial x_j} \right) \cdot \left(\frac{\partial(E_k u)_i}{\partial x_j} + \frac{\partial(F_k u)_i}{\partial x_j} \right) \\ &= \|E_k u\|_{\mathbf{V}}^2 + \|F_k u\|_{\mathbf{V}}^2 + \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{\partial(E_k u)_i}{\partial x_j} \frac{\partial(F_k u)_i}{\partial x_j} + \frac{\partial(F_k u)_i}{\partial x_j} \frac{\partial(E_k u)_i}{\partial x_j} \\ &= \|E_k u\|_{\mathbf{V}}^2 + \|F_k u\|_{\mathbf{V}}^2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Sejam $u \in \mathbf{V}$ e φ_i autofunção de A , então

$$\begin{aligned}
(F_k u, \varphi_i) &= (u - E_k u, \varphi_i) \\
&= \left(u - \sum_{i=1}^{k+1} (u, \varphi_i) \varphi_i, \varphi_i \right) \\
&= (u, \varphi_i) - \left(\sum_{i=1}^{k+1} (u, \varphi_i) \varphi_i, \varphi_i \right) \\
&= (u, \varphi_i) - (u, \varphi_i) (\varphi_i, \varphi_i) \\
&= 0, \forall i = 1, 2, \dots, k+1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\|F_k u\|_{\mathbf{V}}^2}{\|F_k u\|_{\mathbf{H}}^2} \geq \inf \left\{ \frac{\|v\|_{\mathbf{V}}^2}{\|v\|_{\mathbf{H}}^2}, v \in V, (v, \varphi_i) = 0, i = 1, 2, 3, \dots, k \right\} = \mu_{k+1}.$$

Consequentemente

$$\|F_k u\|_{\mathbf{V}}^2 \geq \mu_{k+1} \|F_k u\|_{\mathbf{H}}^2. \quad (2.18)$$

Pelo Lema 2.4.8, as autofunções de L^* são completas em $\mathbf{H}$ e então dado $\epsilon > 0$, k fixo, n suficientemente grande, existem $v_1, v_2, \dots, v_{k+1} \in \mathfrak{M}_n^*$ tais que

$$|\varphi_i - v_i|_{\mathbf{H}} < \epsilon^{\frac{1}{2}} (k+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Finalmente, seja $u \in \mathfrak{N}_n \cap \mathbf{V} \subseteq (\mathfrak{M}^*)^\perp$. Devido a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade anterior, obtemos

$$|(u, \varphi_i)| = |(u, \varphi_i - v_i)| \leq \frac{\sqrt{\epsilon} |u|_{\mathbf{H}}}{\sqrt{k+1}}, \forall \epsilon > 0, i = 1, 2, \dots, k+1,$$

donde,

$$|E_k u|_{\mathbf{H}}^2 = \sum_{i=1}^{k+1} |(u, \varphi_i)|_{\mathbf{H}}^2 \leq \epsilon |u|_{\mathbf{H}}^2, \forall \epsilon > 0. \quad (2.19)$$

Estimando (2.16), através de (2.19), podemos afirmar que

$$|F_k u|_{\mathbf{H}}^2 = |u|_{\mathbf{H}}^2 - |E_k u|_{\mathbf{H}}^2 \geq (1 - \epsilon)|u|_{\mathbf{H}}^2, \forall \epsilon > 0. \quad (2.20)$$

Portanto, usando respectivamente (2.17), (2.18) e (2.20), constatamos

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \|E_k u\|_{\mathbf{V}}^2 + \|F_k u\|_{\mathbf{V}}^2 \\ &\geq \|F_k u\|_{\mathbf{V}}^2 \\ &\geq \mu_{k+1} |F_k u|_{\mathbf{H}}^2 \\ &\geq \mu_{k+1} (1 - \epsilon) |u|_{\mathbf{H}}^2, \forall \epsilon > 0, \forall u \in \mathfrak{N}_n \cap \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Consequentemente $d(\mathfrak{M}^*) \geq \mu_{k+1} \geq \mu_k$ e o resultado segue. ■

Lema 2.4.12 *Seja $\mathfrak{M}$ um subespaço de $\mathbf{H}$, com dimensão finita, gerado por $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$. Seja $u \in \mathfrak{M}$, $u = \sum_{k=1}^n c_k \psi_k$, então:*

(i) *Existem constantes d e d' tais que*

$$d \left(\sum_{k=1}^n c_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq |u|_{\mathbf{H}} \leq d' \left(\sum_{k=1}^n c_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(ii) *Se $\|\psi_i\|_{\mathbf{V}} < \infty$ e se $\psi \Big|_{\partial\Omega} = 0$, para $i = 1, \dots, n$, então as normas $|\cdot|_{\mathbf{H}}$ e $\|\cdot\|_{\mathbf{V}}$ são equivalentes em $\mathfrak{M}$, isto é, existem constantes d e d' tais que $d|u|_{\mathbf{H}} \leq \|u\|_{\mathbf{V}} \leq d'|u|_{\mathbf{H}}$ para todo u em $\mathfrak{M}$.*

Demonstração 2.4.13 (i) *Como $u = \sum_{k=1}^n c_k \psi_k$ segue, respectivamente, pela desigualdade triangular e desigualdade de Cauchy-*

Schwarz, que

$$|u|_{\mathbf{H}} \leq \sum_{k=1}^n |c_k| |\psi_k|_{\mathbf{H}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |\psi_k|_{\mathbf{H}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Deste modo, para obtermos a segunda desigualdade basta considerarmos $d' = \left(\sum_{k=1}^n |\psi_k|_{\mathbf{H}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Para provarmos a primeira desigualdade, notemos que

$$(u, \psi_j) = \left(\sum_{k=1}^n c_k \psi_k, \psi_j \right) = \sum_{k=1}^n (\psi_k, \psi_j) c_k = A_{jk} c_k.$$

Como o conjunto $\{\psi_j, j = 1, 2, \dots, n\}$ é linearmente independente temos que a matriz A_{jk} é inversível, donde $c_k = (A_{jk})^{-1}(u, \psi_j)$ e então

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_k^2 &= \sum_{k=1}^n |(A_{jk})^{-1}(u, \psi_j)|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^n |(A_{jk})^{-1}|^2 |(u, \psi_j)|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^n |(A_{jk})^{-1}|^2 |u|_{\mathbf{H}}^2 |\psi_j|_{\mathbf{H}}^2 \\ &= |u|_{\mathbf{H}}^2 \sum_{k=1}^n |(A_{jk})^{-1}|^2 |\psi_j|_{\mathbf{H}}^2. \end{aligned}$$

Deste modo, basta considerar $d = 1 / \sum_{k=1}^n |(A_{jk})^{-1}|^2 |\psi_j|_{\mathbf{H}}^2$.

(ii) Através do processo de ortogonalização de Gram Schmidt podemos

considerar um conjunto $\{\varphi_i\}$ ortonormal no produto interno $(\cdot, \cdot)$ ao invés de $\{\psi_i\}$. Logo, dado $u \in \mathfrak{M}$, temos que $c_k = (u, \varphi_k)$, e então

$$u = \sum_{k=1}^n (u, \varphi_k) \varphi_k = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |u|_{\mathbf{H}}^2 &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \sum_{l=1}^n a_l \varphi_l \, dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^n a_k a_l \varphi_k \varphi_l \, dx \\ &= \sum_{k=1}^n a_k^2 \int_{\Omega} \varphi_k \varphi_k \, dx = \sum_{k=1}^n a_k^2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathbf{V}}^2 &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial \varphi_{k_i}}{\partial x_j} \sum_{m=1}^n a_m \frac{\partial \varphi_{m_i}}{\partial x_j} \, dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_{k,m=1}^n a_k a_m \frac{\partial \varphi_{k_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_{m_i}}{\partial x_j} \, dx \\ &= \sum_{k,m=1}^n a_k a_m \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_{k_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_{m_i}}{\partial x_j} \, dx \\ &\leq \sum_{k,m=1}^n a_k a_m \|\varphi_k\|_{\mathbf{V}} \|\varphi_m\|_{\mathbf{V}} \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq \tilde{c} \sum_{k,m=1}^n a_k a_m \leq c \sum_{k=1}^n a_k^2 = c |u|_{\mathbf{H}}^2. \end{aligned}$$

Por hipótese, $\|\psi_i\|_{\mathbf{V}} < \infty$. Logo se $u \in \mathfrak{M}_n$ então $u \in \mathbf{V}$ e então

vale a desigualdade de Poincaré para u . Consequentemente

$$d|u|_{\mathbf{H}} \leq \|u\|_{\mathbf{V}}, \forall u \in \mathfrak{M}_n.$$

■

2.5 Teorema de Estabilidade

Teorema 2.5.1 *Se todos os autovalores de L tem parte real positiva, então U é condicionalmente assintoticamente estável na norma de $L^2(\Omega)$.*

Demonstração 2.5.2 *Seja u uma solução do sistema de equações para os campos de perturbações. É suficiente provar que u tende para zero, quando t tende para o infinito, sempre que todos os autovalores de L têm parte real positiva.*

Sabemos que u satisfaz a equação (2.4.2), ou seja

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{|u|_{\mathbf{H}}^2}{2} + (Lu, u) = 0.$$

Pelo Lema 2.4.3, L tem uma quantidade enumerável de autovalores tendendo para infinito no lado direito do plano e cada autovalor tem multiplicidades algébrica e geométrica finitas. Por hipótese estamos supondo que tais autovalores tem parte real positiva, e então existe $\gamma > 0$, tal que se λ é autovalor de L , então $\text{Re}(\lambda) \geq \gamma$. De posse destes fatos, consideremos os subespaços $\mathfrak{M}_n$ e $\mathfrak{N}_n$, como no Lema 2.4.10, de modo que, se $w \in \mathbf{H}$, então $w = w_1 + w_2$, $w_1 \in \mathfrak{M}_n$, $w_2 \in \mathfrak{N}_n$ e $\mathfrak{M}_n$ com dimensão finita.

Substituindo $u = u_1 + u_2$ em (2.4.2) temos, devido a linearidade de

L e do produto interno, que

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{|u|_{\mathbf{H}}^2}{2} + (Lu_2, u_2) = -(Lu_1, u_2) - (Lu_2, u_1) - (Lu_1, u_1). \quad (2.21)$$

Agora vamos estimar cada uma das parcelas do lado direito de (2.21).

Todo operador linear é contínuo sobre espaços vetoriais de dimensão finita. Em particular, L é limitado sobre $\mathfrak{M}_n$, donde existe uma constante $c_1 = c_1(n)$, tal que $c_1 \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$ e

$$|Lu_1|_{\mathbf{H}} \leq c_1 |u_1|_{\mathbf{H}}.$$

Consequentemente, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$|(Lu_1, u_1)| \leq |Lu_1|_{\mathbf{H}} \cdot |u_1|_{\mathbf{H}} \leq c_1 |u_1|_{\mathbf{H}}^2,$$

$$|(Lu_1, u_2)| \leq |Lu_1|_{\mathbf{H}} \cdot |u_2|_{\mathbf{H}} \leq c_1 |u_1|_{\mathbf{H}} \cdot |u_2|_{\mathbf{H}}.$$

Seja L^* o operador adjunto de L , então

$$(Lu_2, u_1) = (u_2, L^*u_1) = (u_2, Lu_1) + (u_2, (L^* - L)u_1).$$

Como

$$L^*(u) = -\Delta u - U \cdot \nabla u + u \cdot \nabla U - \nabla p \quad e$$

$$L(u) = -\Delta u + U \cdot \nabla u + u \cdot \nabla U - \nabla p$$

constatamos que $(L^* - L)u_1$ é um operador diferencial parcial de primeira ordem e então existe $c > 0$, tal que

$$|(L^* - L)u_1|_{\mathbf{H}} \leq c \|u_1\|_{\mathbf{V}}.$$

Além disso, $\mathfrak{M}_n$ tem dimensão finita e é gerado por autofunções que

estão em $\mathbf{V}$. Logo, devido ao Lema 2.4.12, existe uma constante d' , tal que $c\|u_1\|_{\mathbf{V}} \leq d'|u_1|_{\mathbf{H}}$. Logo, $|(L^* - L)u_1|_{\mathbf{H}} \leq d'|u_1|_{\mathbf{H}}$, e portanto

$$|(Lu_2, u_1)| \leq (c_1 + d')|u_1|_{\mathbf{H}}|u_2|_{\mathbf{H}}.$$

Substituindo estas estimativas para $|(Lu_1, u_1)|, |(Lu_1, u_2)|, |(Lu_2, u_1)|$ em (2.21), usando Lema 2.4.10 e a desigualdade

$$ab \leq \frac{a^2}{4\epsilon} + \epsilon b^2$$

conseguimos a seguinte estimativa

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{|u|_{\mathbf{H}}^2}{2} + \frac{\|u_2\|_{\mathbf{V}}^2}{2} \leq c_3|u_1|_{\mathbf{H}}^2 + \epsilon|u_2|_{\mathbf{H}}^2, \quad (2.22)$$

com $c_3 = \left(c_1 + \frac{(2c_1 + d')^2}{4\epsilon} \right)$ tendendo para o infinito quando $n \rightarrow \infty$ ou quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Escolhendo n suficientemente grande obtemos, da demonstração do Lema 2.4.10, que $\|u_2\|_{\mathbf{V}}^2 \geq c_4|u_2|_{\mathbf{H}}^2$, sendo c_4 tão grande quanto necessário. Logo, segue de (2.22) que

$$\frac{d}{dt} \frac{|u|_{\mathbf{H}}^2}{2} + c_5|u_2|_{\mathbf{H}}^2 \leq c_3|u_1|_{\mathbf{H}}^2, \quad \text{sendo } c_5 = \frac{c_4}{2} - \epsilon. \quad (2.23)$$

Notemos ainda que $|u|_{\mathbf{H}}^2 = |u_1 + u_2|_{\mathbf{H}}^2 \leq 2|u_1|_{\mathbf{H}}^2 + 2|u_2|_{\mathbf{H}}^2$, e isto implica que

$$|u_2|_{\mathbf{H}}^2 \geq \frac{|u|_{\mathbf{H}}^2}{2} - |u_1|_{\mathbf{H}}^2.$$

Substituindo esta estimativa inferior para $|u_2|_{\mathbf{H}}$ em (2.23) garantimos que

$$\frac{d}{dt} |u|_{\mathbf{H}}^2 + c_5|u|_{\mathbf{H}}^2 \leq c_6|u_1|_{\mathbf{H}}^2, \quad (2.24)$$

e c_5, c_6 tendem para infinito quando $n \rightarrow \infty$.

Agora vamos obter uma estimativa para $|u_1(t)|_{\mathbf{H}}$ e posteriormente substituí-la em (2.24).

Seja P_n a projeção de $\mathbf{H}$ sobre $\mathfrak{M}_n$ considerada antes do Lema 2.4.10. Podemos representá-la da seguinte forma

$$P_n(u(t)) = \sum_{j=1}^m C_j(u) \varphi_j,$$

sendo $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ uma base de Jordan para $\mathfrak{M}_n$.

Como P_n é linear e contínua, inferimos que $C_j(u) \in \mathbf{H}^*$. Logo existe $\varphi_j^* \in \mathbf{H}^*$, tal que

$$P_n(u(t)) = \sum_{j=1}^m (u, \varphi_j^*) \varphi_j. \quad (2.25)$$

Segue de (2.25) que $(\varphi_i, \varphi_j^*) = 0$ se $i \neq j$ e $(\varphi_i, \varphi_j^*) = 1$ se $i = j$. Ademais, considerando que P_n comuta com L e que $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ é uma base de Jordan para L em $\mathfrak{M}_n$, obtemos que $\{\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_m^*\}$ é uma base de Jordan para L^* em $\mathfrak{M}_n^*$.

Aplicando P_n em (2.6) obtemos

$$\frac{du_1}{dt} + Lu_1 + P_n(N(u, u)) = 0, \quad (2.26)$$

pois

$$\begin{aligned} P_n\left(\frac{du}{dt}\right) &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{du}{dt}, \varphi_j^*\right) \varphi_j \\ &= \sum_{j=1}^m \varphi_j \int_{\Omega} \frac{du}{dt} \varphi_j^* dx \end{aligned}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^m (u, \varphi_j^*) \varphi_j \right) dx = \frac{du_1}{dt}.$$

Multiplcando (2.26) por φ_k^* (no produto interno de $\mathbf{H}$) e denotando (u, φ_k^*) por $q_k(t)$, podemos afirmar que

$$\frac{dq_k}{dt} + L_{kj} q_j + (P_n N(u, u), \varphi_k^*) = 0, \quad (2.27)$$

pois

$$\begin{aligned} \left(\frac{du_1}{dt}, \varphi_k^* \right) &= \left(\frac{d(P_n u)}{dt}, \varphi_k^* \right) = \left(\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n (u, \varphi_j^*) \varphi_j \right), \varphi_k^* \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} (u, \varphi_j^*) \varphi_j + (u, \varphi_j^*) \frac{d}{dt} \varphi_j \right], \varphi_k^* \right) \\ &= \frac{d}{dt} (u, \varphi_k^*) = \frac{dq_k}{dt}. \\ (Lu_1, \varphi_k^*) &= \left(L \left(\sum_{j=1}^n (u, \varphi_j^*) \varphi_j \right), \varphi_k^* \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n (u, \varphi_j^*) L(\varphi_j), \varphi_k^* \right) \\ &= (L(\varphi_k), \varphi_j^*) (u, \varphi_j^*) = L_{kj} q_j. \end{aligned}$$

Agora vamos estimar o termo $(P_n(N(u, u)), \varphi_k^*)$:

$$\begin{aligned} (P_n(N(u, u)), \varphi_k^*) &= (N(u, u), P_n^*(\varphi_k^*)) \\ &= (N(u, u), \varphi_k^*) \\ &= (P_\sigma(u \cdot \nabla u), \varphi_k^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (u \cdot \nabla u, \varphi_k^*) \\
&= \int_{\Omega} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} (\bar{\varphi}_k^*)_i dx \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial(u_j u_i)}{\partial x_j} (\bar{\varphi}_k^*)_i - \frac{\partial u_j}{\partial x_j} u_i (\bar{\varphi}_k^*)_i \right) dx \\
&= \int_{\Omega} \frac{\partial(u_j u_i)}{\partial x_j} (\bar{\varphi}_k^*)_i dx \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial(u_j u_i (\bar{\varphi}_k^*)_i)}{\partial x_j} - u_j u_i \frac{\partial(\bar{\varphi}_k^*)_i}{\partial x_j} \right) dx \\
&= - \int_{\Omega} u_j u_i \frac{\partial(\bar{\varphi}_k^*)_i}{\partial x_j} dx.
\end{aligned}$$

Notemos que para a obtenção do sétimo passo, usamos que u tem divergente zero em Ω , e para a obtenção do último passo usamos o Teorema da Divergência e o fato que u se anula na fronteira de Ω .

Logo,

$$|(N(u, u), \varphi_k^*)| \leq \int_{\Omega} |u_j| |u_i| \left| \frac{\partial(\bar{\varphi}_k^*)_i}{\partial x_j} \right| dx,$$

e assumindo que $\left| \frac{\partial(\bar{\varphi}_k^*)_i}{\partial x_j} \right| \leq \tilde{c}_6$, temos

$$\begin{aligned}
|(N(u, u), \varphi_k^*)| &\leq \int_{\Omega} |u_j| |u_i| \tilde{c}_6 dx \\
&\leq \tilde{c}_6 \int_{\Omega} (|u_j|^2 + |u_i|^2) dx = c_6 |u|_{\mathbf{H}}^2.
\end{aligned}$$

Substituindo esta estimativa para $|(N(u, u), \varphi_k^*)|$ em (2.27) obtemos

$$\frac{dq_k}{dt} + L_{kj} q_j \leq c_6 |u|_{\mathbf{H}}^2. \quad (2.28)$$

Podemos reescrever o sistema (2.28) matricialmente

$$q' \leq -\mathbf{L}q + f(t, x), \quad (2.29)$$

sendo $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)^T$, $f(t, x) = (c_6|u|_{\mathbf{H}}^2, \dots, c_6|u|_{\mathbf{H}}^2)^T$ e $\mathbf{L}$ a matriz com componentes L_{kj} .

A solução de (2.29) é dada por:

$$q(t) \leq e^{-\mathbf{L}t}q(0) + \int_0^t e^{-(t-s)\mathbf{L}}f(s, q(s)) ds. \quad (2.30)$$

Como os autovalores de $-\mathbf{L}$ tem parte real negativa e menor do que $-\gamma$, inferimos, devido a Proposição 1.1.3, que existe uma constante positiva K , tal que,

$$|e^{-\mathbf{L}t}| \leq Ke^{-\gamma t} (t \geq 0), \quad (2.31)$$

$$\text{sendo } |e^{-\mathbf{L}t}| = \sum_j \sum_i |(e^{-\mathbf{L}t})_{ij}|.$$

Logo, de (2.30) e (2.31) segue que

$$|q(t)| \leq e^{-\gamma t}|q(0)| + c_8 \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}|u|_{\mathbf{H}}^2 ds, \quad (2.32)$$

$$\text{sendo } |q(t)| = \sqrt{\sum_{k=1}^m q_k^2}, \text{ a norma Euclidiana.}$$

Notemos que dado $u_1 \in \mathfrak{M}_n$ temos $u_1 = \sum_j (u, \varphi_j^*) \varphi_j = \sum_j q_j \varphi_j$, e então, pelo Lema 2.4.12, a norma q é equivalente a norma de $|u_1|_{\mathbf{H}}$. Deste modo, podemos substituir $q(t)$ por $|u_1|_{\mathbf{H}}$ na equação (2.32), ob-

tendo

$$|u_1(t)|_{\mathbf{H}} \leq c_7 |u_1(0)|_{\mathbf{H}} e^{-\gamma t} + c_8 \int_0^t e^{\gamma(s-t)} |u(s)|_{\mathbf{H}}^2 ds. \quad (2.33)$$

Elevando ao quadrado em ambos os lados de (2.33), usando a desigualdade de números reais, $2ab \leq a^2 + b^2$, e a desigualdade de Hölder, obtemos que

$$\begin{aligned} |u_1(t)|_{\mathbf{H}}^2 &\leq \left(c_7 |u_1(0)|_{\mathbf{H}} e^{-\gamma t} + c_8 \int_0^t e^{\gamma(s-t)} |u(s)|_{\mathbf{H}}^2 ds \right)^2 \\ &\leq 2c_7^2 |u_1(0)|_{\mathbf{H}}^2 e^{-2\gamma t} + \\ &\quad 2c_8^2 \left[\int_0^t e^{\gamma(s-t)} |u(s)|_{\mathbf{H}}^2 ds \right] \left[\int_0^t e^{\gamma(s-t)} |u(s)|_{\mathbf{H}}^2 ds \right] \\ &\leq 2c_7^2 |u_1(0)|_{\mathbf{H}}^2 e^{-2\gamma t} + \\ &\quad 2c_8^2 \left[\int_0^t e^{\gamma(s-t)} ds \right] \left[\int_0^t e^{\gamma(s-t)} |u(s)|_{\mathbf{H}}^4 ds \right]. \end{aligned}$$

Mas como $|u_1(0)|_{\mathbf{H}} = |P_n(u(0))|_{\mathbf{H}} \leq c|u(0)|_{\mathbf{H}}$ e $\left| \int_0^t e^{\gamma(s-t)} ds \right| \leq \text{const.}$ quando $t \rightarrow \infty$, existem constantes c_9 e c_{10} tais que:

$$|u_1|_{\mathbf{H}}^2 \leq c_9 e^{-2\gamma t} |u(0)|_{\mathbf{H}}^2 + c_{10} \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} |u(s)|_{\mathbf{H}}^4 ds.$$

Substituindo esta estimativa para $|u_1|_{\mathbf{H}}$ em (2.24), multiplicando pelo fator $e^{c_5 t}$ e em seguida integrando de 0 à t , obtemos

$$|u(t)|_{\mathbf{H}}^2 \leq c_{13} e^{-\gamma t} |u(0)|_{\mathbf{H}}^2 + c_{12} e^{-c_5 t} \int_0^t \int_0^\tau e^{c_5 \tau - \gamma(\tau-s)} |u(s)|_{\mathbf{H}}^4 ds d\tau. \quad (2.34)$$

Agora vamos estimar a última parcela da inequação integral (2.34)

acima.

Pelo fato de c_5 crescer com n , podemos assumir $c_5 > 2\gamma$, e então

$$\begin{aligned}
& e^{-c_5 t} \int_0^t \int_0^\tau e^{c_5 \tau - \gamma(\tau-s)} |u(s)|_{\mathbf{H}}^4 ds d\tau = \\
& = e^{-c_5 t} \int_0^t e^{\gamma s} |u(s)|_{\mathbf{H}}^4 \int_s^t e^{(c_5 - \gamma)\tau} d\tau ds \\
& = \int_0^t e^{\gamma s - c_5 t} \frac{e^{(c_5 - \gamma)t} - e^{(c_5 - \gamma)s}}{c_5 - \gamma} |u(s)|_{\mathbf{H}}^4 ds \\
& \leq c \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} |u(s)|_{\mathbf{H}}^4 ds, \text{ pois } (c_5 - 2\gamma > 0).
\end{aligned}$$

Logo,

$$|u(t)|_{\mathbf{H}}^2 \leq c_{13} e^{-\gamma t} |u(0)|_{\mathbf{H}}^2 + c_{14} \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} |u(s)|_{\mathbf{H}}^4 ds. \quad (2.35)$$

Denotando $e^{\gamma t} |u(t)|_{\mathbf{H}}^2$ por $\alpha(t)$ obtemos

$$\alpha(t) \leq c_{13} \alpha(0) + c_{14} \int_0^t e^{-\gamma s} \alpha^2(s) ds,$$

cujas soluções são dominadas pelas soluções de

$$\beta(t) = c_{13} \beta(0) + c_{14} \int_0^t e^{-\gamma s} \beta^2(s) ds. \quad (2.36)$$

Diferenciando (2.36) obtemos

$$\begin{cases} \beta'(t) = c_{14} e^{-\gamma t} \beta^2(t) \\ \beta(0) = c_{13} \alpha(0) \end{cases}$$

cuja solução é

$$\beta(t) = \frac{c_{13} \gamma \alpha(0)}{\gamma - c_{14} \alpha(0)(1 - e^{-\gamma t})}.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} |u(t)|_{\mathbf{H}}^2 &\leq \frac{c_{13}\gamma|u(0)|_{\mathbf{H}}^2 e^{-\gamma t}}{\gamma - c_{14}\alpha(0)(1 - e^{-\gamma t})} \\ &\leq \frac{c_{13}\gamma|u(0)|_{\mathbf{H}}^2 e^{-\gamma t}}{\gamma - c_{14}\alpha(0)}. \end{aligned}$$

Portanto, se $|u(0)|_{\mathbf{H}}^2 < \frac{\gamma}{c_{14}}$, então $|u(t)|_{\mathbf{H}} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$, pelo menos exponencialmente.

■

Observação 2.5.3 Para dar uma idéia da demonstração de que $\{\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_m^*\}$ é uma base Jordan para L^* em $\mathfrak{M}_n^*$, consideremos o fato de que P_n comuta com L (ver [32], pg. 417). Como $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ é uma base de Jordan para L em $\mathfrak{M}_n$, podemos considerar

$$\begin{aligned} L(\varphi_1) &= \varphi_1 \\ L(\varphi_2) &= \varphi_2 + \varphi_1 \\ L(\varphi_3) &= \varphi_3 + \varphi_2 \dots \end{aligned}$$

Quando $\mathfrak{M}_n$ tem dimensão um, temos então $L(\varphi_1) = \varphi_1$ e $LP_n(u) = P_n L(u)$, logo

$$(u, \varphi_1^*)\varphi_1 = (u, \varphi_1^*)L(\varphi_1) = (Lu, \varphi_1^*)\varphi_1 = (u, L\varphi_1^*)\varphi_1, \forall u \in D(L)$$

ou seja, $(u, \varphi_1^* - L^*\varphi_1^*) = 0, \forall u \in D(L)$. Por conseguinte, $L^*\varphi^* = \varphi^*$.

Quando $\mathfrak{M}_n$ tem dimensão dois, temos

$$Pu = \sum_{i=1}^2 (u, \varphi_i^*)\varphi_i = (u, \varphi_1^*)\varphi_1 + (u, \varphi_2^*)\varphi_2.$$

Logo,

$$LPu = (u, \varphi_1^*)L\varphi_1 + (u, \varphi_2^*)L\varphi_2.$$

Por outro lado,

$$PLu = (Lu, \varphi_1^*)\varphi_1 + (Lu, \varphi_2^*)\varphi_2.$$

Segue então que

$$\begin{aligned} (u, L^*\varphi_1^*)\varphi_1 + (u, L^*\varphi_2^*)\varphi_2 &= (Lu, \varphi_1^*)\varphi_1 + (Lu, \varphi_2^*)\varphi_2 \\ &= (u, \varphi_1^*)L\varphi_1 + (u, \varphi_2^*)L\varphi_2 \\ &= (u, \varphi_1^* + \varphi_2^*)\varphi_1 + (u, \varphi_2^*)\varphi_2, \forall u \in D(L). \end{aligned}$$

Logo, $L^*(\varphi_2^*) = \varphi_2^*$ e $L^*(\varphi_1^*) = \varphi_1^* + \varphi_2^*$.

O resultado para dimensão n qualquer pode ser feito por indução.

2.6 Teorema de Instabilidade

Teorema 2.6.1 *Se L tem pelo menos um autovalor com parte real negativa então alguma perturbação crescerá com o tempo, sendo portanto a solução básica instável.*

Demonstração 2.6.2 *Vamos supor, por absurdo, que L tem pelo menos um autovalor com parte real negativa e que a solução básica, U , é estável.*

Seja $u(t)$ uma perturbação. Devido a definição de estabilidade, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, se $|u(0)|_{\mathbf{H}} < \delta$, então $|u(t)|_{\mathbf{H}} < \epsilon$, para todo $t > 0$.

Através da demonstração do Teorema de Estabilidade, sabemos que

u satisfaz

$$\frac{dq_j}{dt} + L_{ij}q_i = f_j, \quad (2.37)$$

sendo $q_k(t) = (u, \varphi_k^*)$, $f_j = -(N(u, u), \varphi_j^*)$, $\{\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_k^*\}$ uma base de Jordan para L^* em $\mathfrak{M}_n^*$ e $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$ uma base de Jordan para L em $\mathfrak{M}_n$. Sabemos também que existe $c_1 > 0$ tal que

$$|f_j(t)| \leq c_1 |u(t)|_{\mathbf{H}}^2. \quad (2.38)$$

Além disso, devido ao item (i) do Lema 2.4.12 sabemos que existem constantes positivas c, c' tais que

$$c|u_1(t)|_{\mathbf{H}}^2 \leq \sum_{j=1}^k |q_j|^2 \leq c'|u_1(t)|_{\mathbf{H}}^2. \quad (2.39)$$

Seja $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k\}$ uma normalização adequada da base de Jordan que estávamos considerando para L em $\mathfrak{M}_n$, de modo que a matriz L_{ij} nessa base (que continuamos a denotar por L_{ij}) possui zeros ou γ 's na superdiagonal, sendo γ um número positivo arbitrário.

Por hipótese, L tem pelo menos um autovalor com parte real negativa. Assumimos, reordenando se necessário, que os autovalores com parte real negativa estão nas l primeiras entradas da diagonal da matriz L_{ij} , $l \leq k$. Assim, se λ é um destes autovalor, então $\text{Re}(\lambda) < -\sigma$, para algum $\sigma > 0$.

Desta forma:

$$\text{Re} \left(\sum_{i,j=1}^l L_{ij}q_i \bar{q}_j \right) \leq (-\sigma + \gamma) \sum_{i=1}^l |q_i|^2, \quad (2.40)$$

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{i,j=l+1}^k L_{ij} \bar{q}_i q_j \right) \geq (-\gamma) \sum_{i=l+1}^k |q_i|^2. \quad (2.41)$$

Denotemos

$$R(t) = \sum_{i=1}^l |q_i|^2, \quad \rho(t) = \sum_{i=l+1}^k |q_i|^2.$$

Derivando $R(t)$ e usando respectivamente (2.37), (2.40), (2.38) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R(t) &= \sum_{j=1}^l \frac{\partial q_j}{\partial t} \bar{q}_j + \overline{\frac{\partial q_j}{\partial t} \bar{q}_j} \\ &= 2\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^l \frac{\partial q_j}{\partial t} \bar{q}_j \right) \\ &= 2\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^l \bar{q}_j \left(-\sum_{i=1}^l L_{ij} q_j + f_j \right) \right) \\ &\geq 2(\sigma - \gamma)R - c_2 |u|_{\mathbf{H}}^2 R^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Estamos assumindo, por absurdo, que $|u(t)|_{\mathbf{H}} < \epsilon$, para algum $\epsilon > 0$ que escolheremos de forma conveniente mais tarde. Assim segue, de (2.42), que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R(t) &\geq 2(\sigma - \gamma)R - c_2 \epsilon |u|_{\mathbf{H}} R^{\frac{1}{2}} \\ &\geq 2(\sigma - \gamma)R - c_2 \frac{\epsilon}{2} (|u(t)|_{\mathbf{H}}^2 + R). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial t} R(t) \geq k_1 R - c_3 \epsilon |u(t)|_{\mathbf{H}}^2, \quad (2.43)$$

sendo $k_1 = 2(\sigma - \gamma) - c_2 \frac{\epsilon}{2}$ e $c_3 = \frac{c_2}{2}$.

Integrando (2.43) de 0 à t obtemos

$$R(t) \geq R(0) + k_1 \int_0^t R(s) ds - c_3 \epsilon \int_0^t |u(s)|_{\mathbf{H}}^2 ds. \quad (2.44)$$

Analogamente temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t) &\leq 2\gamma \rho + c_4 |u(t)|_{\mathbf{H}}^2 \rho^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (2\gamma + c_4 \frac{\epsilon}{2}) \rho + c_4 \frac{\epsilon}{2} |u(t)|_{\mathbf{H}}^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t) \leq k_2 \rho + c_5 \epsilon |u|_{\mathbf{H}}^2, \quad k_2 = (2\gamma + c_4 \frac{\epsilon}{2}), \quad c_5 = \frac{c_4}{2}.$$

Integrando esta última equação de 0 à t segue que

$$\rho(t) \leq \rho(0) + k_2 \int_0^t \rho(s) ds + c_5 \epsilon \int_0^t |u(s)|_{\mathbf{H}}^2 ds. \quad (2.45)$$

Subtraindo (2.45) de (2.44) resulta que

$$\begin{aligned} R(t) - \rho(t) &\geq [R(0) - \rho(0)] + k_1 \int_0^t R(s) ds \\ &\quad - k_2 \int_0^t \rho(s) ds - \epsilon c_6 \int_0^t |u(s)|_{\mathbf{H}}^2 ds. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Por outro lado, como $u_1(t) = \sum_{i=1}^k q_i \psi_i$, temos

$$\begin{aligned}
 |u_1|_{\mathbf{H}}^2 &= \sum_{i,j=1}^k q_i \bar{q}_j (\psi_i, \bar{\psi}_j) \\
 &= \sum_{i=1}^k |q_i|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^l |q_i|^2 + \sum_{i=l+1}^k |q_i|^2 \\
 &= R(t) + \rho(t).
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

De maneira análoga a obtenção da equação (2.35), obtemos que

$$|u(t)|_{\mathbf{H}}^2 \leq e^{-c_4 t} |u(0)|_{\mathbf{H}}^2 + c_7 \int_0^t e^{-c_4(t-s)} |u_1(s)|_{\mathbf{H}}^2 ds. \tag{2.48}$$

Substituindo (2.47) em (2.48), e integrando de 0 a t , inferimos

$$\begin{aligned}
 \int_0^t |u(\tau)|_{\mathbf{H}}^2 d\tau &\leq |u(0)|_{\mathbf{H}}^2 \int_0^t e^{-c_4 \tau} d\tau \\
 &\quad + c_7 \int_0^t \int_0^\tau e^{-c_4(\tau-s)} (R(s) + \rho(s)) ds d\tau,
 \end{aligned}$$

donde, segue que

$$\int_0^t |u(\tau)|_{\mathbf{H}}^2 d\tau \leq c_9 |u(0)|_{\mathbf{H}}^2 + c_{10} \int_0^t (R(s) + \rho(s)) ds. \tag{2.49}$$

Assim, estimando (2.46) através de (2.49) obtemos:

$$\begin{aligned} R(t) - \rho(t) \geq & [R(0) - \rho(0) - \epsilon c_{11}|u(0)|_{\mathbf{H}}^2] + k_1 \int_0^t R(s) ds - \\ & - k_2 \int_0^t \rho(s) ds - \epsilon c_{12} \int_0^t (\rho(s) + R(s)) ds. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Notemos que, usando (2.47), temos

$$\begin{aligned} |u(0)|_{\mathbf{H}}^2 &= |u_1 + u_2|_{\mathbf{H}}^2 \leq 2|u_1|_{\mathbf{H}}^2 + 2|u_2|_{\mathbf{H}}^2 \\ &\leq 2.(R(0) + \rho(0)) + 2|u_2|_{\mathbf{H}}^2 \\ &= c_{13}(R(0) + \rho(0)) + 2|u_2|_{\mathbf{H}}^2. \end{aligned}$$

Deste modo, podemos reescrever a estimativa (2.50) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} R(t) - \rho(t) \geq & [R(0) - \rho(0) - 2\epsilon c_{11}|u_2(0)|_{\mathbf{H}}^2 - 2\epsilon c_{11}c_{13}(R(0) + \rho(0))] + \\ & k_1 \int_0^t R(s) ds - k_2 \int_0^t \rho(s) ds - \epsilon c_{12} \int_0^t (\rho(s) + R(s)) ds. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Escolhendo ϵ, γ , tomados inicialmente, tão pequenos quanto seja necessário para que $2\epsilon c_{11}c_{13}$ e $2\epsilon c_{11}$ sejam menores do que $\frac{1}{2}$ e para que

$$k_1 R - k_2 \rho - \epsilon c_{12}(\rho + R) \geq k_3(R - \rho),$$

para algum $k_3 > 0$ e para todo $R, \rho > 0$, segue que:

$$(R(t) - \rho(t)) \geq \left[\frac{R(0)}{2} - \frac{3\rho(0)}{2} - \frac{|u_2(0)|_{\mathbf{H}}^2}{2} \right] + k_3 \int_0^t (R(s) - \rho(s)) ds. \quad (2.52)$$

Vamos assumir agora que a perturbação $u(t)$, tomada no início da

demonstração, é pequena o suficiente para satisfazer

$$\left[\frac{R(0)}{2} - \frac{3\rho(0)}{2} - \frac{|u_2(0)|_{\mathbf{H}}^2}{2} \right] \geq \frac{R(0)}{4} > 0.$$

Deste modo, segue de (2.52) que

$$(R(t) - \rho(t)) \geq \frac{R(0)}{4} + k_3 \int_0^t (R(s) - \rho(s)) ds,$$

ou seja,

$$(\rho(t) - R(t)) \leq -\frac{R(0)}{4} + k_3 \int_0^t (\rho(s) - R(s)) ds. \quad (2.53)$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall em (2.53) inferimos que

$$(-R(t) + \rho(t)) \leq -\frac{R(0)}{4} e^{k_3 t},$$

ou seja,

$$R(t) \geq \frac{R(0)}{4} e^{k_3 t}. \quad (2.54)$$

Finalmente, devido as desigualdades (2.47) e (2.54), temos

$$c'|u(t)|_{\mathbf{H}}^2 \geq c|u_1(t)|_{\mathbf{H}}^2 \geq R(t) \geq \frac{R(0)}{4} e^{k_3 t}.$$

Isto é uma contradição, pois havíamos considerado $|u(t)|_{\mathbf{H}} \leq \epsilon, \forall t > 0$.

■

2.7 Conclusões

Pelo Teorema de Estabilidade temos que estabilidade linear implica em estabilidade condicional assintótica. Justificamos deste modo as

evidências experimentais que mostram que a Teoria Linear é uma boa aproximação. No entanto, ressaltamos que não temos controle sobre quão pequena deve ser a perturbação inicial para que isso aconteça, uma vez que ela depende da constante c_{14} . Por este motivo, em geral, este resultado não é muito aplicável.

O grande mérito da Teoria Linear é o Teorema de Instabilidade, pois ele garante que instabilidade linear implica em instabilidade para perturbações de tamanho inicial arbitrário e não apenas para perturbações suficientemente pequenas.

Um ponto a destacar na Teoria linear é que fixamos um número de Reynolds, e analisamos se ocorre estabilidade ou instabilidade para ele. Por trás deste fato está o trabalho de encontrar o número de Reynolds que é o limite entre os regimes estáveis e instáveis do escoamento.

Evidências experimentais mostram que escoamentos com baixo número de Reynolds, isto é, escoamentos com viscosidade cinemática alta e ou velocidade característica baixa, são estáveis. Deste modo, é conveniente procurarmos o menor número de Reynolds que garante instabilidade acima dele. Na literatura denotamos este número de Reynolds por $\mathcal{R}_L$.

Lembramos que em nosso desenvolvimento da Teoria Linear consideramos o número de Reynolds igual a um, simplesmente a fim de evitar carregar este fator.

Capítulo 3

O Método da Energia

Seja u um campo de velocidade satisfazendo o sistema de equações para os campos de perturbação. Definimos sua energia cinética por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2(x, t) \, dx.$$

Se garantirmos que a energia cinética de u tende a zero quando t tende para infinito, então estamos garantindo que u tende a zero, na norma de $L^2(\Omega)^n$. Deste modo, a fim de estudar a estabilidade de um escoamento básico, podemos estudar o comportamento da energia cinética das perturbações.

O Método da Energia é um método que permite-nos estudar justamente a evolução da energia cinética da perturbação no tempo. Ele consiste, resumidamente, em obter estimativas para soluções de equações diferenciais parciais, no nosso caso, as soluções do sistema para as perturbações (2.12). Este método não descarta o termo não-linear durante sua análise, e por este motivo é também conhecido como um Método

não-linear.

O interessante é que este método complementa os resultados apresentados no capítulo anterior, pois ao contrário do Método linear que nos traz condições suficientes para a ocorrência de instabilidade, este nos traz condições suficientes para a ocorrência de estabilidade de um escoamento básico, com relação a perturbações de tamanho inicial arbitrário. Além disso, ele não é usado exclusivamente para a análise de estabilidade, ele também é útil, por exemplo, para provar unicidade e existência de soluções.

Os primeiros registros da aplicação do Método da Energia são de Osbourne Reynolds em 1895, William McF. Orr em 1907 e ainda no final do século IXX, pelo matemático russo A. M. Lyapunov.

Apresentaremos resultados devidos a James B. Serrin de 1959 para domínios limitados e posteriormente, uma reformulação devida à Stephen H. Davis e Christian V. Kerczek de 1973, que pode ser considerada também para domínios não-limitados.

A primeira seção, a seguir, é dedicada a obtenção de uma estimativa para a taxa de variação com o tempo da energia cinética da perturbação. Ela será fundamental para a obtenção de resultados posteriores

3.1 Identidade fundamental para a energia

Nesta seção vamos apresentar uma identidade para a taxa de variação da energia de uma perturbação no tempo. Ela é devida a Reynolds e Orr. Lembremos que estamos considerando Ω um conjunto aberto, conexo, limitado de um lado da fronteira e com fronteira de classe C^2 , $(U, P) \in \mathbf{V} \cap H^2(\Omega)^n \times H^1(\Omega)$ um escoamento básico estacionário e $(u(t), p'(t)) \in \mathbf{V} \cap H^2(\Omega)^n \times H^1(\Omega)$, um campo de per-

turbações.

Teorema 3.1.1 (*Identidade fundamental para a energia*) *Seja $m=(U, P)$ um escoamento básico e (u, p') um campo de perturbações, então*

$$\frac{d}{dt}E(t) = - \int_{\Omega} u \cdot D \cdot u \, dx - \nu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla u \, dx,$$

sendo que $D := \frac{1}{2}(\nabla U + \nabla U^T)$ e denomina-se tensor taxa de deformação associado ao escoamento básico m .

Demonstração 3.1.2 *Mostraremos primeiro que derivando a energia cinética de u , com relação a t , obtemos*

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega(t)} \left[u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} U_i - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \right] dx. \quad (3.1)$$

Denotaremos $U^ = U + u$ e $P^* = P + p'$.*

As equações que modelam os escoamentos m e $m^ := (U^*, P^*)$, usando a convenção da soma, são, respectivamente,*

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} \right) + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2}; \\ \frac{\partial U_i^*}{\partial t} + U_j^* \frac{\partial U_i^*}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P^*}{\partial x_i} \right) + \nu \frac{\partial^2 U_i^*}{\partial x_j^2}. \end{aligned}$$

Subtraindo estas equações e denotando $p := (P - P^)/\rho$, temos*

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + U_j^* \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}. \quad (3.2)$$

Multiplicando (3.2) por u_i , escrevendo em forma de divergência e

usando que U, U^* e u tem divergente zero, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-u_i u_j U_i - \frac{1}{2} u_i^2 U_j^* - u_j p + \nu u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] + \\ &\quad + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j U_i - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Deste modo, integrando (3.3) sobre $\Omega(t)$, usando o Teorema da Divergência, e o fato de u se anular sobre a fronteira, segue que

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} |u|^2 \right) dx = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j U_i - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \right] dx. \quad (3.4)$$

Por outro lado, utilizando o Teorema do Transporte de Reynolds, e o fato de u se anular em $\partial\Omega$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \frac{1}{2} |u|^2 dx &= \int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} |u|^2 \right) dx + \int_{\partial\Omega(t)} \frac{1}{2} |u|^2 e_n ds \\ &= \int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} |u|^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Portanto, (3.1) segue de (3.4) e (3.5) e a identidade fundamental segue de (3.1) aplicando o Teorema da Divergência no primeiro termo.

■

Observação 3.1.3 *Através da identidade fundamental podemos observar que o segundo termo do segundo membro contribui para o decaimento da energia da perturbação, pois é sempre negativo.*

3.2 O Método da Energia segundo Serrin [35]

Teorema 3.2.1 *Seja $\Omega(t)$ uma região ocupada por um fluido viscoso incompressível e contido em uma esfera de diâmetro L . Seja $U(x, t)$ uma solução do sistema de equações de Navier-Stokes em $\Omega(t)$ que satisfaz a condição de contorno $U = U_B(x, t)$ sobre $\partial\Omega(t)$ e U_M uma cota superior para $|U|$ em $\Omega(t)$, para todo t . Supomos que existe uma outra solução $U^*(x, t)$ que satisfaz à mesma condição de contorno citada, mas U e U^* satisfazem condições iniciais distintas. Então, a energia cinética, E , de $u = U^* - U$ satisfaz:*

$$E(t) \leq E_0 e^{(U_M^2 - 3\pi^2 \nu^2 / L^2)t / \nu},$$

sendo $E_0 = E(0)$.

Demonstração 3.2.2 *Inicialmente observemos que $u = 0$ sobre $\partial\Omega(t)$ e que vale (3.1), ou seja,*

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega(t)} \left[u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} U_i - \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \right] dx.$$

Notemos que, para todo A_{ij} , temos

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + 2A_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + A_{ij}^2 \geq 0. \quad (3.6)$$

Em particular, escolhendo $A_{ij} = \frac{-U_i u_j}{\nu}$, obtemos

$$U_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \leq \frac{1}{2\nu} U_i^2 u_j^2 + \frac{1}{2} \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2. \quad (3.7)$$

Usando (3.7) como uma estimativa para (3.1), resulta que

$$\frac{dE}{dt} \leq \frac{1}{2\nu} \int_{\Omega} [U_i^2 u_j^2 - \nu^2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2] dx \leq \frac{1}{\nu} [U_M^2 E - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nu^2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2] dx. \quad (3.8)$$

Por outro lado, escolhendo $A_{ij} = h_j u_i$ em (3.6), sendo h_j escolhida de maneira adequada posteriormente, obtemos que

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 \geq -2h_j u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - h_j^2 u_i^2 = -\frac{\partial}{\partial x_j} (h_j u_i^2) - h_j^2 u_i^2 + u_i^2 \frac{\partial h_j}{\partial x_j}. \quad (3.9)$$

Integrando (3.9) sobre $\Omega(t)$, usando o Teorema da Divergência e notando que $u_i = 0$ sobre $\partial\Omega$, temos

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dx \geq \int_{\Omega} (\operatorname{div} h - |h|^2) u_i^2 dx.$$

Deste modo, se existir $h(x, t)$ tal que $(\operatorname{div} h - |h|^2) \geq 3\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$ em $\Omega(t)$, então

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dx \geq \frac{2.3\pi^2}{L^2} E(t), \quad (3.10)$$

e consequentemente estimando (3.8), através de (3.10), obtemos:

$$\frac{dE}{dt} \leq \frac{1}{\nu} (U_M^2 - 3\frac{\pi^2 \nu^2}{L^2}) E,$$

donde, ao multiplicarmos pelo fator integrante $e^{-(U_M^2 - \frac{3\pi^2 \nu^2}{L^2}) \frac{t}{\nu}}$, segue a conclusão do teorema.

Mostremos agora que existe a função h , isto é, vamos mostrar que

$$h(r) = \frac{\pi}{L} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi r}{L} \right) e_r, \quad r < \frac{L}{2},$$

satisfaz as condições exigidas acima.

Note que h está em coordenadas esféricas e possui apenas a coordenada radial.

Se $r < \frac{L}{2}$, então $h(r)$ é diferenciável e

$$\operatorname{div} h - |h|^2 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{x_0} \operatorname{tg} x_0\right) \geq 3 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2,$$

sendo $x_0 = \frac{\pi r}{L}$.

■

Deste teorema seguem dois resultados muito importantes em Estabilidade Hidrodinâmica. O primeiro, nos oferece condições suficientes para a ocorrência de estabilidade através do método da Energia, independentemente da geometria do domínio e do tamanho inicial da perturbação, sendo por estes motivos denominado um Critério Universal de Estabilidade. Ele apresenta um número de Reynolds crítico $\mathcal{R}_E$ (Reynolds da Energia), tal que todo o fluido ocupando Ω é estável quando o número de Reynolds $\mathcal{R}$ é menor do que $\mathcal{R}_E$.

O segundo resultado é a respeito da unicidade da solução básica estacionária, sempre que o fluido ocupa uma região Ω limitada e o escoamento satisfaz certas restrições.

Corolário 3.2.3 *Se o número de Reynolds $\frac{U_M L}{\nu}$ de um escoamento básico, satisfazendo as hipóteses do teorema acima, for menor do que $\pi\sqrt{3}$, então $E(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, e o escoamento básico é estável.*

Demonstração 3.2.4 *Basta notar que se $\frac{U_M L}{\nu} < \pi\sqrt{3}$, então $(U_M^2 - 3\pi^2\nu^2/L^2) < 0$, donde segue que, $E(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.*

■

Observação 3.2.5 *Estando dentro das hipóteses do Teorema 3.1.1, garantimos estabilidade da solução básica sempre que $\mathcal{R} := \frac{U_M L}{\nu} < \pi\sqrt{3}$. Por este motivo podemos definir $\pi\sqrt{3}$ como um número de Reynolds crítico. No entanto, esta estimativa para a ocorrência de estabilidade não é necessariamente ótima, ou seja, é possível do escoamento manter-se estável para $\mathcal{R} \geq \mathcal{R}_E$, pois poderíamos ter escolhido uma função h , durante a demonstração do teorema acima, que permitisse uma estimativa melhor na equação (3.10). Em seguida veremos reformulações do Método da Energia que permitem outras estimativas.*

Corolário 3.2.6 *Seja Ω uma região fixa ocupada por um fluido, de modo que, Ω está contida dentro de uma esfera de diâmetro L . Sejam U e U^* duas soluções estacionárias das equações de Navier-Stokes em Ω , ambas com a mesma velocidade $U_B(x)$ sobre a fronteira de Ω . Seja U_M uma cota superior para U em Ω . Então, se $\mathcal{R} = \frac{U_M L}{\nu} < \pi\sqrt{3}$, os dois escoamentos são idênticos, isto é, $U = U^*$.*

Demonstração 3.2.7 *Seja $u = U^* - U$. Vamos supor, por absurdo, que $u \neq 0$. Deste modo, $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 = c \neq 0$, pois u não depende de t . Logo, $E_0 = E(t) \neq 0, \forall t \geq 0$.*

Pelo Teorema 3.1.1 temos $E(t) \leq E_0 \cdot e^{(U_M^2 - 3\pi^2 \nu^2 / L^2) \frac{t}{\nu}}, \forall t \geq 0$ e devido ao fato de $E_0 = E(t) \neq 0, \forall t$, segue que

$$1 \leq e^{(U_M^2 - 3\pi^2 \nu^2 / L^2) \frac{t}{\nu}}, \forall t \geq 0.$$

Esta última desigualdade caracteriza um absurdo, pois se $\mathcal{R} < \pi\sqrt{3}$ temos $(U_M^2 - 3\pi^2 \nu^2 / L^2) < 0$, e então não conseguimos manter o segundo membro maior do que 1 para valores suficientemente grandes de t . Logo $u = 0$ e o resultado segue.

■

3.3 Reformulação do Método da Energia segundo Davis e Kerczek [7]

Sejam $m = (U, P)$ uma solução básica estacionária e $u \in \mathbf{V}$ uma perturbação para o sistema de Navier-Stokes, então vale a igualdade fundamental da energia:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx = - \int_{\Omega} u \cdot D \cdot u dx - \nu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla u dx,$$

sendo que $D := \frac{1}{2}(\nabla U + \nabla U^T)$ e denomina-se tensor taxa de deformação associado ao escoamento básico m .

Definimos em $\mathbf{V}$ o seguinte funcional:

$$G(u, U) = \frac{\int_{\Omega} u \cdot D \cdot u dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla u dx}{\int_{\Omega} |u|^2 dx}. \quad (3.11)$$

G assume seu valor mínimo em $\mathbf{V}$, isto é, existe

$$\lambda = \min_{u \in \mathbf{V}} G(u, U). \quad (3.12)$$

A prova desta afirmação é análoga a prova de que

$$\mathcal{G}(u) = \frac{\int_{\Omega} \nabla u : \nabla u dx}{\int_{\Omega} |u|^2 dx}$$

assume seu valor mínimo γ em $H_0^1(\Omega)^n$, cuja idéia de demonstração encontra-se no início da seção 1.8.

Multiplicando e dividindo a igualdade da energia por $\int_{\Omega} |u|^2 dx$,

supondo $\lambda > 0$ e usando (3.12) como uma estimativa superior, obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx \leq -\lambda \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx. \quad (3.13)$$

Multiplicando (3.13) pelo fator integrante $e^{2\lambda t}$, segue que

$$\frac{d}{dt} \left(e^{2\lambda t} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx \right) \leq 0,$$

donde inferimos que $e^{2\lambda t} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx$ é não crescente, ou seja,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(x, 0)|^2 dx e^{-2\lambda t}.$$

Provamos então o seguinte teorema:

Teorema 3.3.1 *Se o mínimo λ do funcional G é positivo, então o escoamento básico m é incondicionalmente assintoticamente estável e*

$$E(t) \leq E_0 e^{-2\lambda t}$$

é válida para todas as soluções do sistema das perturbações.

Observação 3.3.2 *Se o escoamento básico não é estacionário, então o valor mínimo do funcional G depende de t . Deste modo, inferimos*

$$E(t) \leq E_0 e^{-\int_0^t \lambda(s) ds}.$$

Logo, nesse caso, obtemos estabilidade assintótica para o escoamento básico se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t -\lambda(s) ds = -\infty.$$

3.3.1 Problema de autovalor associado ao Método da Energia

A princípio, sabemos apenas que $\lambda = \min_{u \in \mathbf{V}} G(u, U)$, mas nesta subseção vamos caracterizá-lo como o primeiro autovalor de um funcional linear. Desta forma reduziremos o estudo do Método da Energia ao estudo de um problema de autovalor, analogamente ao que ocorre na Teoria Linear.

Seja u_0 a função em que G assume seu valor mínimo λ , isto é,

$$\lambda = \min_{u \in \mathbf{V}} G(u, U) = G(u_0, U).$$

Então para todo t real e para toda $g \in \mathbf{V}$, temos

$$G(u_0 + tg, U) \geq \lambda.$$

Deste modo, $\varphi(t) := G(u_0 + tg, U)$ tem um mínimo em $t = 0$ e consequentemente,

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=0} = 0. \quad (3.14)$$

Logo, como

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \left(\nu \int_{\Omega} \nabla u_0 : \nabla u_0 \, dx + t^2 \nu \int_{\Omega} \nabla g : \nabla g \, dx + 2t\nu \int_{\Omega} \nabla u_0 : \nabla g \, dx \right. \\ & \left. + t^2 \int_{\Omega} g \cdot D \cdot g \, dx + \int_{\Omega} u_0 \cdot D \cdot u_0 \, dx + 2t \int_{\Omega} u_0 \cdot D \cdot g \, dx \right) / \int_{\Omega} (u_0 + tg)^2 \, dx \end{aligned}$$

segue, por (3.14), que

$$\left(\int_{\Omega} u_0^2 \, dx \right) \left(2 \int_{\Omega} \nabla u_0 : \nabla g \, dx + 2 \int_{\Omega} u_0 \cdot D \cdot g \, dx \right)$$

$$-\left(\nu \int_{\Omega} \nabla u_0 : \nabla u_0 \, dx + \int_{\Omega} u_0 \cdot D \cdot u_0 \, dx\right) \left(2 \int_{\Omega} u_0 \cdot g \, dx\right) = 0.$$

Dividindo-se esta equação por $2 \int_{\Omega} u_0^2 \, dx$ obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla u_0 : \nabla g \, dx + \int_{\Omega} u_0 \cdot D \cdot g \, dx = \\ & = \left[\frac{\nu \int_{\Omega} \nabla u_0 : \nabla u_0 \, dx + \int_{\Omega} u_0 \cdot D \cdot u_0 \, dx}{\int_{\Omega} u_0^2 \, dx} \right] \int_{\Omega} u_0 \cdot g \, dx. \end{aligned}$$

Identificando a quantidade entre colchetes com $G(u_0, U) = \lambda$, segue que:

$$\int_{\Omega} \nabla u_0 : \nabla g \, dx + \int_{\Omega} u_0 \cdot D \cdot g \, dx = \lambda \int_{\Omega} u_0 \cdot g \, dx. \quad (3.15)$$

Mas $\nabla u_0 : \nabla g = (\operatorname{div}(\nabla u_0 \cdot g) - \Delta u_0 \cdot g)$, então, substituindo esta expressão em (3.15) e usando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\int_{\Omega} -\Delta u_0 \cdot g \, dx + \int_{\Omega} u_0 \cdot D \cdot g \, dx = \lambda \int_{\Omega} u_0 \cdot g \, dx,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} (-\Delta u_0 + u_0 \cdot D - \lambda u_0) \cdot g \, dx = 0, \quad \forall g \in \mathbf{V}.$$

Como esta última igualdade vale para todo $g \in \mathbf{V}$ temos, pela Proposição 1.2.6, que

$$(-\Delta u_0 + u_0 \cdot D - \lambda u_0) = \nabla p,$$

para algum $p \in H^1(\Omega)$.

Logo λ e u_0 são, respectivamente, autovalor e autofunção do seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta \psi + \psi \cdot D - \nabla p = \lambda \psi \\ \operatorname{div} \psi = 0, \quad \psi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.16)$$

É possível mostrar ainda que os autovalores de (3.16) formam um sequência de números reais tendendo para o infinito e podemos associar λ com o primeiro autovalor.

Portanto, se o primeiro autovalor do problema (3.16) é positivo, então o escoamento básico é estável.

3.3.2 Outro Critério Universal de Estabilidade

Na seção 3.1, já obtemos um Critério Universal de Estabilidade, e agora, como consequência do Teorema 3.3.1, vamos obter outro, através de uma estimativa para λ .

Consideremos um escoamento básico m ocupando uma região Ω limitada e a seguinte desigualdade de Poincaré, provada por L. Payne e H. Weinberger, válida para toda $u \in \mathbf{V}$.

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq \frac{d^2}{\alpha} \int_{\Omega} \nabla u : \nabla u dx, \quad (3.17)$$

sendo $\alpha \simeq 80$, $d = \text{diam } \Omega$.

Seja ψ a autofunção associada a λ , então usando (3.17) e denotando $k = \max_{i,j} |D_{ij}|$, segue que

$$\lambda = \frac{(\int_{\Omega} \psi \cdot D \cdot \psi dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \psi : \nabla \psi dx)}{\int_{\Omega} \psi^2 dx} \geq -k + \frac{\alpha \nu}{d^2},$$

pois

$$\frac{-\int_{\Omega} \psi \cdot D \cdot \psi dx}{\int_{\Omega} \psi^2 dx} \leq \frac{\int_{\Omega} |\psi \cdot D \cdot \psi| dx}{\int_{\Omega} \psi^2 dx}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\int_{\Omega} |\psi_i D_{ij} \psi_j| dx}{\int_{\Omega} \psi^2 dx} \\
&\leq \frac{k \sum_{i,j} \int_{\Omega} |\psi_i| |\psi_j| dx}{\int_{\Omega} \psi^2 dx} \\
&\leq \frac{k \left(\frac{1}{2} \sum_i \int_{\Omega} |\psi_i|^2 dx + \frac{1}{2} \sum_j \int_{\Omega} |\psi_j|^2 dx \right)}{\int_{\Omega} \psi^2 dx} = k.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.3.1, se $\lambda > 0$, então o escoamento básico é estável. Para que isso ocorra basta que $(-k + \frac{\alpha\nu}{d^2}) > 0$, ou seja, $\frac{kd^2}{\nu} < \alpha \simeq 80$. Definimos, deste modo, $\frac{kd^2}{\nu}$ como um número de Reynolds $\mathcal{R}$ para m e α um número de Reynolds crítico $\mathcal{R}_E$.

Em geral, α também não é um número de Reynolds crítico considerado ótimo, pois m pode continuar a ser estável para $\mathcal{R} \geq \alpha$, mas o interessante deste resultado é que ele garante a estabilidade do escoamento básico independente da forma do escoamento básico e da geometria do domínio. Por esta razão também conhecido como Critério Universal de Estabilidade.

Para obtermos critérios de estabilidade melhores é necessário analisar as Equações de Euler-Lagrange associadas a equação (3.12).

Capítulo 4

Relações entre a teoria linear e a não-linear

4.1 Os problemas de autovalor

O objetivo principal deste capítulo é estudar as conexões e diferenças existentes entre as teorias linear e não-linear, vistas nos capítulos anteriores.

Sabemos, através dos capítulos 2 e 3, que ambas as teorias, linear e não-linear, estão associadas, respectivamente, ao estudo do sinal dos autovalores dos seguintes problemas:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu \Delta \psi + U \cdot \nabla \psi + \psi \cdot \nabla U + \nabla p = \sigma \psi \\ \operatorname{div} \psi = 0 \text{ em } \Omega \\ \psi(x) = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} -\nu\Delta\psi + \psi.D + \nabla\varphi = \mu\psi \\ \operatorname{div}\psi = 0 \text{ em } \Omega \\ \psi(x) = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.2)$$

Vimos que se o primeiro autovalor de (4.1) é positivo, então todos são e o escoamento básico é estável condicionalmente assintoticamente, ou seja, é estável linearmente. Se ocorrer de pelo menos um autovalor ser negativo então o escoamento básico é instável à perturbações pequenas e consequentemente é instável, já que, para ser instável basta que o seja para alguma perturbação.

Vimos também que se todos os autovalores de (4.2) são positivos então o escoamento é estável a perturbações de tamanhos arbitrários, ou seja, é estável não-linearmente. Por outro lado a teoria não-linear é completamente silenciosa com relação a ocorrência de instabilidade.

4.1.1 Estabilidade não-linear implica em estabilidade linear

Nesta subseção mostraremos que se o primeiro autovalor do problema (4.2) é positivo, então o primeiro autovalor do problema (4.1) também é. Deste modo, provaremos rigorosamente o seguinte fato que é intuitivo fisicamente: se um escoamento básico é estável para perturbações de tamanho arbitrário, então também será para perturbações pequenas, de modo que a estabilidade não-linear sempre implica na estabilidade linear.

Lema 4.1.1 *Seja μ um autovalor do problema (4.1) e ψ uma auto-*

função associada. Então:

$$Re(\mu) = \frac{\nu \int_{\Omega} \nabla \psi : \nabla \bar{\psi} dx + \int_{\Omega} \psi . D . \bar{\psi} dx}{\int_{\Omega} |\psi|^2 dx}.$$

Demonstração 4.1.2 *Introduziremos os seguintes operadores*

$$L_S \psi = -\nu \Delta \psi + \psi . D \quad e \quad L_A \psi = \psi \Theta + U . \nabla \psi,$$

sendo U o campo de velocidade básico, $D_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i})$ e $\Theta_{i,j} = \frac{1}{2}(U_{i,j} - U_{j,i})$.

Notemos que, devido a simetria de D , temos

$$\psi . D . \bar{\varphi} = \bar{\varphi} . D . \psi. \quad (4.3)$$

Fazendo uso da igualdade $\Delta a . b = \nabla . [\nabla a . b] - \nabla a . \nabla b$, e Teorema da Divergência conseguimos

$$\int_{\Omega} \Delta \psi . \bar{\varphi} dx = \int_{\Omega} \Delta \bar{\varphi} . \psi dx. \quad (4.4)$$

De posse de (4.3) e (4.4) inferimos que L_S é um operador simétrico

$$\int_{\Omega} L_S \psi . \bar{\varphi} dx = \int_{\Omega} \psi . L_S \bar{\varphi} dx, \quad \forall \psi, \varphi \in V.$$

Analogamente obtemos que L_A é anti-simétrico

$$\int_{\Omega} L_A \psi . \bar{\varphi} dx = - \int_{\Omega} \psi . L_A \bar{\varphi} dx, \quad \forall \psi, \varphi \in V.$$

Usando os operadores L_S e L_A , podemos reescrever o problema de

autovalor (4.1) da seguinte maneira

$$\begin{cases} L_S(\psi) + L_A(\psi) + \nabla p = \mu\psi \\ \operatorname{div} \psi = 0 \text{ em } \Omega \\ \psi(x) = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.5)$$

Multiplicando a primeira equação de (4.5) por $\bar{\psi}$, integrando sobre Ω , e usando que ∇p é ortogonal a $\bar{\psi}$, obtemos

$$\int_{\Omega} L_S(\psi) \cdot \bar{\psi} \, dx + \int_{\Omega} L_A(\psi) \cdot \bar{\psi} \, dx = \mu \int_{\Omega} |\psi|^2 \, dx.$$

Consequentemente

$$\mu = \frac{\int_{\Omega} L_S(\psi) \cdot \bar{\psi} \, dx + \int_{\Omega} L_A(\psi) \cdot \bar{\psi} \, dx}{\int_{\Omega} |\psi|^2 \, dx}.$$

Mostremos agora que $\int_{\Omega} L_S(\psi) \cdot \bar{\psi} \, dx$ é um número real e $\int_{\Omega} L_A(\psi) \cdot \bar{\psi} \, dx$ é um número imaginário puro, pois se assim for, teremos mostrado que

$$\operatorname{Re}(\mu) = \frac{\int_{\Omega} L_S(\psi) \cdot \bar{\psi} \, dx}{\int_{\Omega} |\psi|^2 \, dx} = \frac{\nu \int_{\Omega} \nabla \psi : \nabla \bar{\psi} \, dx + \int_{\Omega} \psi \cdot D \cdot \bar{\psi} \, dx}{\int_{\Omega} |\psi|^2 \, dx},$$

como queríamos.

Para mostrar que $\int_{\Omega} L_S(\psi) \cdot \bar{\psi} \, dx$ é real, notemos que, devido a simetria de L_S , temos

$$\overline{\int_{\Omega} L_S(\psi) \cdot \bar{\psi} \, dx} = \int_{\Omega} L_S(\psi) \cdot \bar{\psi} \, dx.$$

E por fim, devido a anti-simetria de L_A , temos

$$\overline{\int_{\Omega} L_A(\psi) \cdot \bar{\psi} \, dx} = - \int_{\Omega} L_A(\psi) \cdot \bar{\psi} \, dx,$$

donde $\int_{\Omega} L_A(\psi) \cdot \bar{\psi} \, dx$ é um número imaginário puro.

■

Lema 4.1.3 *Os autovalores do problema (4.2) são reais.*

Demonstração 4.1.4 *Usando L_S podemos reescrever o problema (4.2) da seguinte forma*

$$\begin{cases} L_S(\psi) + \nabla \varphi = \sigma \psi \\ \operatorname{div} \psi = 0 \text{ em } \Omega \\ \psi(x) = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.6)$$

Multiplicando a primeira equação de (4.6) por $\bar{\psi}$, integrando sobre Ω , e usando que $\nabla \varphi$ é ortogonal a $\bar{\psi}$, obtemos

$$\int_{\Omega} L_S(\psi) \cdot \bar{\psi} \, dx = \sigma \int_{\Omega} |\psi|^2 \, dx.$$

Consequentemente,

$$\sigma = \frac{\int_{\Omega} L_S(\psi) \cdot \bar{\psi} \, dx}{\int_{\Omega} |\psi|^2 \, dx}.$$

Pela demonstração do lema anterior temos que $\int_{\Omega} L_S(\psi) \cdot \bar{\psi} \, dx$ é um número real, donde concluímos que σ é real.

■

Teorema 4.1.5 *Se o primeiro autovalor do problema (4.2) é positivo, então o primeiro autovalor μ_1 do problema de autovalor da teoria linear tem parte real positiva.*

Demonstração 4.1.6 *Do Lema 4.1.1 temos*

$$Re(\mu_1) = \frac{\nu \int_{\Omega} \nabla \psi_1 : \nabla \overline{\psi_1} dx + \int_{\Omega} \psi_1 \cdot D \cdot \overline{\psi_1} dx}{\int_{\Omega} |\psi_1|^2 dx}.$$

Escrevendo $\psi_1 = a + ib$, substituindo acima e observando que as partes complexas se cancelam, obtemos

$$\begin{aligned} Re(\mu_1) &= \frac{\nu \int_{\Omega} \nabla a : \nabla a dx + \int_{\Omega} a \cdot D \cdot a dx}{\int_{\Omega} a^2 dx + \int_{\Omega} b^2 dx} + \\ &\quad + \frac{\nu \int_{\Omega} \nabla b : \nabla b dx + \int_{\Omega} b \cdot D \cdot b dx}{\int_{\Omega} a^2 dx + \int_{\Omega} b^2 dx} \\ &= \frac{\left(\int_{\Omega} a \cdot D \cdot a dx + \nu \int_{\Omega} \nabla a : \nabla a dx \right) / \int_{\Omega} a^2 dx}{\left(\int_{\Omega} a^2 dx + \int_{\Omega} b^2 dx \right) / \int_{\Omega} a^2 dx} + \\ &\quad + \frac{\left(\int_{\Omega} b \cdot D \cdot b dx + \nu \int_{\Omega} \nabla b : \nabla b dx \right) / \int_{\Omega} b^2 dx}{\left(\int_{\Omega} a^2 dx + \int_{\Omega} b^2 dx \right) / \int_{\Omega} b^2 dx} \\ &\geq \lambda \frac{\int_{\Omega} a^2 dx}{\int_{\Omega} a^2 + b^2 dx} + \lambda \frac{\int_{\Omega} b^2 dx}{\int_{\Omega} a^2 + b^2 dx} = \lambda. \end{aligned}$$

Deste modo, se $\lambda > 0$, então $\text{Re}(\mu_1) > 0$.

Notemos que a majoração acima é possível pois λ é o valor mínimo assumido pelo funcional

$$G(u) = \frac{\nu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla u \, dx + \int_{\Omega} u \cdot D \cdot u \, dx}{\int_{\Omega} |u|^2 \, dx}.$$

■

Agora vamos ver que, se o primeiro autovalor da parte simétrica de L é positivo, então o escoamento é estável não-linearmente. Consequentemente teremos que, se o operador L da teoria linear for simétrico então ele ofertará os mesmos limites para estabilidade que a teoria não-linear.

4.1.2 Simetria

Nesta subseção mostraremos que o problema de autovalor da teoria não-linear está relacionado com a parte simétrica do problema de autovalor da teoria linear. A fim de explicitar esta relação, denominaremos os operadores de (4.1) e (4.2) respectivamente por L e L_E , isto é:

$$\begin{aligned} L\psi &= -\nu\Delta\psi + U.\nabla\psi + \psi.\nabla U + \nabla p \text{ e} \\ L_E\psi &= -\nu\Delta\psi + \psi.D + \nabla\varphi, \end{aligned}$$

e usaremos os operadores introduzidos no início da demonstração do Lema 4.1.1:

$$L_S\psi = -\nu\Delta\psi + \psi.D \text{ e } L_A\psi = \psi\Theta + U.\nabla\psi.$$

Uma simples observação aos problemas de autovalores acima, permite-nos escrever $L = L_A + L_S + \nabla p$ e $L_E = L_S + \nabla \varphi$. Logo, podemos concluir que, o problema de autovalor da teoria não-linear, a menos da parcela ∇p , é a parte simétrica do problema de autovalor da teoria linear. Consequentemente, os resultados obtidos pelas duas teorias coincidem quando a parte não simétrica de L é nula. Podemos também afirmar nesta situação que, se ocorre estabilidade pelo método linear, então o método da energia também implicará estabilidade.

Agora vamos ver, dentro de um contexto mais geral que, se o primeiro autovalor da parte simétrica de L é positivo, então o escoamento é estável não-linearmente.

4.2 Formulação Abstrata

4.2.1 Situação Geral

Seja H um espaço de Hilbert com um produto interno $(\cdot, \cdot)$ e a norma associada $|\cdot|$. Consideraremos o problema de autovalor abaixo:

$$u_t + Lu + Nu = 0, \quad u(0) = u_0, \quad (4.7)$$

sendo L um operador linear possivelmente não-limitado, N um operador não-linear com $N(0) = 0$, de modo que, (4.7) admite a solução nula. Assumiremos também que:

- (i) L é um operador fechado, densamente definido, e tal que para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, $(L - \lambda I)^{-1}$ é compacto, isto é, L é um operador com resolvente compacto.

- (ii) A forma bilinear associada com L é definida (e limitada) sobre um espaço de Hilbert H_* imerso compactamente em H . Denotaremos a norma de H_* por $|\cdot|_*$.
- (iii) O operador não-linear N satisfaz

$$(N(u), u) \geq 0, \forall u \in D(N),$$

sendo que, $D(N)$ denota o domínio de N .

As afirmações do item (i) constituem as hipóteses do Teorema 1.1.23. Esta proposição garante que o espectro de L consiste inteiramente de um conjunto enumerável de autovalores $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, com multiplicidades finitas e tais autovalores apenas podem se acumular no infinito. Logo podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4.2.1 *O espectro de L consiste inteiramente de um conjunto enumerável de autovalores $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com multiplicidades finitas e tais autovalores podem apenas se acumular no infinito.*

Em geral, o operador L não é simétrico, donde seus autovalores não são reais, mas devido ao fato deles formarem um conjunto enumerável, podemos ordená-los do seguinte modo

$$Re(\sigma_1) \leq Re(\sigma_2) \leq Re(\sigma_3) \leq \cdots Re(\sigma_n) \leq \cdots$$

Inseridos neste contexto, vamos apresentar definições abstratas de estabilidade linear e não-linear para a solução nula de (4.7).

Definição 4.2.2 *A solução nula de (4.7) é dita ser linearmente estável se $Re(\sigma_1) > 0$.*

Definição 4.2.3 *A solução nula de (4.7) é dita ser não-linearmente estável se*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0, \text{ tal que } |u_0| < \delta \Rightarrow |u(t)| < \epsilon.$$

Além disso, ela é dita ser assintoticamente não-linearmente estável, se existe $\gamma \in (0, \infty]$, tal que

$$|u_0| < \gamma \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = 0.$$

E por fim, ela é dita ser incondicionalmente não-linearmente estável se $\gamma = \infty$.

Devido ao fato de L não ser necessariamente um operador simétrico, vamos supor que L pode ser decomposto na soma de operadores L_1 e L_2 , tais que,

- (i) $L = L_1 + L_2$.
- (ii) L_1 é simétrico, com resolvente compacto.
- (iii) L_2 é anti-simétrico e limitado em H_* .

Portanto, como o operador L_1 tem resolvente compacto, vale um teorema análogo ao Teorema 4.2.1 para L_1 , mas desta vez sabemos que os autovalores, que denotaremos por λ_n , são reais, pois L_1 é um operador simétrico. Podemos enumerá-los então da seguinte maneira

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \lambda_n \leq \cdots$$

Consideremos agora a forma bilinear, $L_1[\varphi, \varphi] = (L_1\varphi, \varphi), \forall \varphi \in H_*$, associada à L_1 . Vale para $L_1[\varphi, \varphi]$ o seguinte resultado, análogo ao

Teorema 1.3.1, do Capítulo 1.

Lema 4.2.4 *O funcional $\frac{L_1[\varphi, \varphi]}{|\varphi|^2}$ assume seu valor mínimo em H_* em uma autofunção $\tilde{\varphi}$ normalizada associada ao autovalor λ_1 , e*

$$\lambda_1 = L_1[\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}] = \min_{\varphi \in H_*} \frac{L_1[\varphi, \varphi]}{|\varphi|^2}.$$

Teorema 4.2.5 *Se $\lambda_1 > 0$, então a solução nula de (4.7) é incondicionalmente não linearmente estável.*

Demonstração 4.2.6 *Multipliquemos ambos os lados de (4.7) por u , através do produto interno de H*

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 + (Lu, u) + (Nu, u) = 0. \quad (4.8)$$

Notemos que $(L_2u, u) = 0$, pois L_2 é anti-simétrico. Então, como $L = L_1 + L_2$, $(L_2u, u) = 0$ e $(Nu, u) \geq 0$, segue de (4.8), que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 + \frac{(L_1u, u)}{|u|^2} |u|^2 \leq 0, \text{ em } H_*. \quad (4.9)$$

Pelo Lema 4.2.4 temos que $\lambda_1 \leq \frac{(L_1u, u)}{|u|^2}$. Substituindo esta estimativa em (4.9) obtemos

$$\left(\frac{1}{2} \frac{d}{dt} + \lambda_1\right) |u|^2 \leq 0.$$

Consequentemente

$$|u(t)| \leq |u_0| \cdot e^{-\lambda_1 t},$$

donde o resultado segue, já que estamos supondo $\lambda_1 > 0$.

■

4.2.2 Operador Simétrico

Teorema 4.2.7 *Se $L_2 = 0$, então a solução nula de (4.7) é incondicionalmente não-linearmente estável, se ela for estável pelo método linear, isto é, estabilidade linear implica em estabilidade não-linear.*

4.2.3 Operador Simetrizável

Iniciemos esta subseção com algumas definições.

Definição 4.2.8 *Dizemos que um operador linear satisfaz o **princípio da troca de estabilidade** se o seu primeiro autovalor satisfaz a seguinte propriedade*

$$Re(\sigma_1) = 0 \Rightarrow Im(\sigma_1) = 0.$$

Definição 4.2.9 *Dizemos que um operador linear satisfaz o **princípio da troca de estabilidade forte** se todos os seus autovalores são reais.*

Observação 4.2.10 *O princípio da troca de estabilidade forte é um caso particular do princípio da troca de estabilidade.*

Consideremos o problema de autovalor (4.7). O operador linear L , a princípio não é simétrico com relação ao produto interno de H , $(\cdot, \cdot)$, mas caso valha o princípio da estabilidade forte, vamos supor que L torna-se simétrico com relação a um novo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tal que a norma associada a ele $(\|\cdot\|)$ é equivalente a norma $|\cdot|$. Logo,

$$\langle L\phi, \psi \rangle = \langle \phi, L\psi \rangle, \forall \phi, \psi \in D(L).$$

Vamos assumir também que a forma bilinear $L'[\phi, \psi]$ associada à L , com relação ao novo produto interno, admite a seguinte decomposição

$$L'[\phi, \psi] = I(\phi, \psi) + D(\phi, \psi),$$

sendo que, I, D são formas bilineares limitadas e simétricas em H_* e

$$I(\phi, \phi) \leq c_1 \|\phi\| \|\phi\|_*, \quad (4.10)$$

$$D(\phi, \phi) \geq c \|\phi\|_*^2. \quad (4.11)$$

Tendo em vista que L é simétrico com relação à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e que estamos assumindo que seus autovalores são todos reais, vale o seguinte resultado, análogo ao Lema 4.2.4:

Lema 4.2.11 *Seja $\bar{\phi}$ uma autofunção normalizada de L associada ao autovalor σ_1 . Então*

$$\sigma_1 = L'[\bar{\phi}, \bar{\phi}] = \min_{\phi \in H_*} \frac{L'[\phi, \phi]}{\|\phi\|^2}.$$

Lema 4.2.12 *Se (4.10) e (4.11) são válidas, então existe $\bar{\psi} \in H_*$, tal que:*

$$\max_{\psi \in H_*} \left\{ -\frac{I[\psi, \psi]}{D[\psi, \psi]} \right\} = -\frac{I[\bar{\psi}, \bar{\psi}]}{D[\bar{\psi}, \bar{\psi}]} =: \frac{1}{\mathcal{R}_E}.$$

Demonstração 4.2.13 *Do Lema anterior e das equações (4.10) e (4.11) obtemos que $\left\{ -\frac{I[\psi, \psi]}{D[\psi, \psi]}, \psi \in H_* \right\}$ é limitado, então existe $\varsigma \in \mathbb{R}$, tal que,*

$$\sup_{\psi \in H_*} \left\{ -\frac{I[\psi, \psi]}{D[\psi, \psi]} \right\} = \varsigma < \infty.$$

Deste modo, é suficiente mostrarmos que existe $\bar{\psi} \in H_*$, tal que

$$-\frac{I[\bar{\psi}, \bar{\psi}]}{D[\bar{\psi}, \bar{\psi}]} = \varsigma. \quad (4.12)$$

No entanto, notemos que

$$-\frac{I[\frac{\psi}{\sqrt{D(\psi, \psi)}}, \frac{\psi}{\sqrt{D(\psi, \psi)}}]}{D[\frac{\psi}{\sqrt{D(\psi, \psi)}}, \frac{\psi}{\sqrt{D(\psi, \psi)}}]} = -\frac{I[\psi, \psi]}{D[\psi, \psi]},$$

e que

$$D(\frac{\psi}{\sqrt{D(\psi, \psi)}}, \frac{\psi}{\sqrt{D(\psi, \psi)}}) = 1.$$

Logo, basta encontrarmos $\bar{\psi} \in H_*$ tal que $D(\bar{\psi}, \bar{\psi}) = 1$ e (4.12) é válida.

Consideremos $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H_*$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -I(\psi_n, \psi_n) = \varsigma < \infty, \quad D(\psi_n, \psi_n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pela equação (4.11), temos que $|\psi|_* \leq \frac{1}{c}D(\psi_n, \phi_n) = \frac{1}{c}, \forall n \in \mathbb{N}$, e então, através da compacidade da imersão H_* em H existe uma subsequência, que continuamos a denotar por $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que

$$\psi_n \rightarrow \bar{\psi} \text{ fraco em } H_*, \quad (4.13)$$

$$\psi_n \rightarrow \bar{\psi} \text{ forte em } H. \quad (4.14)$$

Mostremos agora que $\lim_{n \rightarrow \infty} -I(\psi_n, \psi_n) = -I(\bar{\psi}, \bar{\psi})$, e $D(\bar{\psi}, \bar{\psi}) = 1$, donde segue o lema.

Pela bilinearidade e simetria de I temos

$$|I(\psi_n, \psi_n) - I(\bar{\psi}, \bar{\psi})| = |I(\psi_n - \bar{\psi}, \psi_n - \bar{\psi}) + 2I(\bar{\psi}, \psi_n - \bar{\psi})|$$

$$\leq |I(\psi_n - \bar{\psi}, \psi_n - \bar{\psi})| + |2I(\bar{\psi}, \psi_n - \bar{\psi})|. \quad (4.15)$$

As duas parcelas (4.15) tendem a zero quando n tende para infinito. De fato, usando (4.10), (4.13) e (4.14) obtemos, para n suficientemente grande, que

$$|I(\psi_n - \bar{\psi}, \psi_n - \bar{\psi})| \leq c_1 |\psi_n - \bar{\psi}| \cdot |\psi_n - \bar{\psi}|_* < \varepsilon. \quad (4.16)$$

A segunda parcela tem $\bar{\psi}$ fixo, logo $2I(\bar{\psi}, \psi_n - \bar{\psi})$ é um funcional linear sobre H_* . Consequentemente pelo Teorema de Riesz, existe $\bar{\bar{\psi}} \in H_*$, tal que

$$I(\bar{\psi}, \psi_n - \bar{\psi}) = (\bar{\bar{\psi}}, \psi_n - \bar{\psi})_*, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.17)$$

Deste modo, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e (4.10) em (4.17) obtemos, para n suficientemente grande, que

$$|2I(\bar{\psi}, \psi_n - \bar{\psi})| \leq |\bar{\bar{\psi}}|_* \cdot |\psi_n - \bar{\psi}|_* \forall n \in \mathbb{N} < \varepsilon. \quad (4.18)$$

Logo, por (4.15), (4.16) e (4.18) concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -I(\psi_n, \psi_n) = -I(\bar{\psi}, \bar{\psi}).$$

Além disso, é claro que $D(\bar{\psi}, \bar{\psi}) = 1$.

■

Lema 4.2.14 *O primeiro autovalor σ_1 de L e $\mathcal{R}_E$ são tais que:*

$$\sigma_1 > 0 \text{ se, e somente se } \mathcal{R}_E^{-1} < 1.$$

Demonstração 4.2.15 ($\Rightarrow$) *Por hipótese $\sigma_1 > 0$. Queremos provar*

que $\mathcal{R}_E^{-1} < 1$.

Temos que $L'(\phi, \psi) = I(\phi, \psi) + D(\psi, \psi)$, logo, usando o Lema 4.2.11 e denotando por $\tilde{\psi}$ a autofunção associada a σ_1 , obtemos

$$\begin{aligned}
 D(\psi, \psi) \left\{ -\frac{I(\psi, \psi)}{D(\psi, \psi)} - 1 \right\} &= -I(\psi, \psi) - D(\psi, \psi) \\
 &= -L'(\psi, \psi) \\
 &< -L'(\tilde{\psi}, \tilde{\psi}) \cdot \|\psi\|^2 \\
 &= -\sigma_1 \|\psi\|^2, \quad \forall \psi \in H_*, \psi \neq 0.
 \end{aligned}$$

Consequentemente

$$D(\psi, \psi) \left\{ -\frac{I(\psi, \psi)}{D(\psi, \psi)} - 1 \right\} < 0, \quad \forall \psi \in H_*. \quad (4.19)$$

A equação (4.19) vale para toda $\psi \in H_*$, em particular, vale para a função maximizante $\bar{\psi}$, do Lema 4.2.12. Logo, como $D(\bar{\psi}, \bar{\psi}) = 1$, obtemos

$$\frac{1}{\mathcal{R}_E} - 1 = -\frac{I(\bar{\psi}, \bar{\psi})}{D(\bar{\psi}, \bar{\psi})} - 1 < 0,$$

donde, segue que $\mathcal{R}_E^{-1} < 1$.

($\Leftarrow$) Através dos Lemas 4.4 e 4.5 temos, respectivamente, que

$$-\sigma_1 = -L'[\tilde{\psi}, \tilde{\psi}] = \left\{ -\frac{I(\tilde{\psi}, \tilde{\psi})}{D(\tilde{\psi}, \tilde{\psi})} - 1 \right\} D(\tilde{\psi}, \tilde{\psi}), \quad (4.20)$$

$$-\frac{I(\tilde{\psi}, \tilde{\psi})}{D(\tilde{\psi}, \tilde{\psi})} \leq \frac{1}{\mathcal{R}_E}, \quad (4.21)$$

sendo $\tilde{\psi}$ a autofunção minimizante do Lema 4.2.11.

Deste modo, de (4.20) e (4.21), segue que

$$-\sigma_1 \leq \left(\frac{1}{\mathcal{R}_E} - 1 \right) D(\tilde{\psi}, \tilde{\psi}). \quad (4.22)$$

Como $\tilde{\psi}$ é autofunção, segue, pela equação (4.11), que $D(\tilde{\psi}, \tilde{\psi}) > 0$. Por hipótese temos $\mathcal{R}_E > 1$. Majorando (4.22) através destas estimativas inferimos que $-\sigma_1 < 0$, ou seja $\sigma_1 > 0$, como queríamos demonstrar. ■

Durante a análise anterior, usamos que $(N(u), u) \geq 0, \forall u \in D(N)$, no entanto, não temos necessariamente que o mesmo ocorre com $< N(u), u >$. Assumiremos, de agora em diante, que, ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists c = c(\epsilon) \text{ tal que} \\ | < N(u), u > | \leq \epsilon \cdot D(u, u) + c \|u\|^\alpha, \\ \forall u \in D(N) \text{ e para algum } \alpha > 2, \end{array} \right. \quad (4.23)$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} | < N(u), u > | \leq k \|u\|^\beta D(u, u), \\ \forall u \in D(N) \text{ e certos } k, \beta > 0. \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Teorema 4.2.16 *Suponhamos válido o princípio de estabilidade forte, (4.10), (4.11), (4.23) ou (4.24). Se a solução nula de (4.7) é estável linearmente, então também é estável assintoticamente não-linearmente. Em particular, existem constantes $A, \gamma, \delta > 0$ tais que*

$$\|u_0\|^2 < \gamma \Rightarrow \|u(t)\|^2 < A \|u_0\|^2 \exp(-\delta t), \forall t > 0.$$

Demonstração 4.2.17 *Provaremos o Teorema sob a hipótese (4.23).*

Multiplicando (4.7) por u , usando o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \langle Lu, u \rangle + \langle N(u), u \rangle = 0. \quad (4.25)$$

Através do Lema 4.2.12 obtemos a seguinte majoração inferior para $\langle Lu, u \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle Lu, u \rangle = L'[u, u] &= I(u, u) + D(u, u) \\ &= \left(\frac{I(u, u)}{D(u, u)} + 1 \right) D(u, u) \\ &\geq \left(-\frac{1}{\mathcal{R}_E} + 1 \right) D(u, u). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Logo, estimando (4.25) através de (4.23) e (4.26), temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \left(-\frac{1}{\mathcal{R}_E} + 1 - \epsilon \right) D(u, u) \leq c \|u\|^\alpha.$$

Por hipótese $\sigma_1 > 0$ e então pelo Lema 4.2.14, segue que

$$\left(-\frac{1}{\mathcal{R}_E} + 1 \right) > 0.$$

Assim, existe $k' > 0$, tal que, $k' \leq \left(-\frac{1}{\mathcal{R}_E} + 1 - \epsilon \right)$ e então

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + k' D(u, u) \leq c \|u\|^\alpha.$$

Por (4.11) e pela imersão compacta entre H_ e H , inferimos que $D(u, u) \geq c|u|^2$. Assim, pelo fato de as normas $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ serem equivalentes, existe uma constante k^* , tal que*

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + k^* \|u\|^2 \leq c \|u\|^\alpha. \quad (4.27)$$

Colocando $z := \|u\|^2$, podemos reescrever (4.27) da seguinte maneira

$$\frac{dz}{dt} \leq -\delta z + \gamma_1 z^n, \quad (4.28)$$

sendo $\delta, \gamma_1 > 0$ e $n > 1$.

Multiplicando (4.28) pelo fator integrante $\exp(\delta t)$ e integrando de 0 à t , obtemos:

$$z(t) \cdot \exp(\delta t) \leq z(0) + \gamma_1 \int_0^t \exp(\delta s) z^n ds. \quad (4.29)$$

Aplicando a desigualdade de Bihari em (4.29) segue que

$$w(t) \leq z(0) \left[1 - \frac{\gamma_1}{\delta z(0)^{1-n}} \left(+1 - \exp(\delta(1-n)t) \right) \right]^{\frac{1}{1-n}}. \quad (4.30)$$

Deste modo, se

$$\|u_0\|^2 = z_0 < \left(\frac{\gamma_1}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-n}} =: \gamma,$$

então

$$\|u(t)\|^2 \leq (\exp(\delta(1-n)t) \|u_0\|^2 \exp(-\delta t)) \leq \|u_0\|^2 \exp(-\delta t).$$

■

Corolário 4.2.18 *Supomos que o operador L é simétrico com relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e que todas as hipóteses do Teorema 4.2.16 são válidas. Supomos ainda que μ é uma constante positiva e A é um*

operador anti-simétrico. Então, se $\sigma_1 > 0$, a solução nula de

$$\begin{cases} u_t + Lu + \mu Au + Nu = 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (4.31)$$

é assintoticamente não-linearmente estável.

Demonstração 4.2.19 Basta notarmos que ao multiplicar (4.31) por u recaímos na equação (4.25), pois $(Au, u) = 0$ devido ao fato de A ser um operador anti-simétrico.

Observação 4.2.20 Vimos então que os resultados obtidos pela teoria linear e não-linear coincidem quando o operador L é simétrico ou é simetrizável.

Capítulo 5

Aplicações

5.1 Escoamento de Couette

Neste capítulo vamos analisar a estabilidade de uma solução estacionária para o Escoamento de Couette Circular, $\mathcal{F}$, através dos métodos linear e não-linear. Este escoamento é obtido confinando-se um fluido viscoso entre dois cilindros infinitos C_1 e C_2 , co-axiais, com raios r_1 e r_2 , ($r_2 > r_1$) e em movimento em torno do eixo comum com velocidades angulares ω_1 e ω_2 .

5.1.1 Solução Estacionária

Vamos procurar uma solução estacionária, campos de velocidade e pressão, para este escoamento que dependam apenas da distância r , contada a partir do eixo comum aos cilindros, e para isto vamos trabalhar com o sistema de coordenadas cilíndricas.

Consideraremos que W está sob uma força conservativa $f = \nabla U$.

Denotemos por $W(r) = u(r)e_r + v(r)e_\varphi + w(r)e_z$ o campo de velocidades e $\pi = \pi(r)$, o campo de pressão. Deste modo, o par (W, π) deve satisfazer o Sistema de Equações de Navier Stokes, em coordenadas cilíndricas, com as seguintes condições de fronteira para W : $W(r_1) = r_1\omega_1e_\varphi$ e $W(r_2) = r_2\omega_2e_\varphi$.

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{du}{dr} - \frac{v^2}{r} = \frac{\partial}{\partial r}(\pi - U) + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) - \frac{u}{r^2} \right] \\ u \frac{dv}{dr} + \frac{uv}{r} = \nu \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) - \frac{v}{r^2} \right] \\ u \frac{dw}{dr} = \nu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) - \frac{\partial}{\partial z}(\pi - U) \\ \frac{d}{dr}(ru) = 0 \\ W(r_1) = r_1\omega_1e_\varphi; W(r_2) = r_2\omega_2e_\varphi. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

A partir da quarta equação de (5.1) obtemos que ru é uma constante em $[r_1, r_2]$, e então temos necessariamente que $u = 0$ nesse intervalo. A substituição desta informação no sistema (5.1) permite a seguinte simplificação do mesmo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v^2}{r} = \frac{\partial}{\partial r}(\pi - U) \\ \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) = 0 \\ \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = 0 \\ \frac{d}{dr}(ru) = 0 \\ W(r_1) = r_1\omega_1e_\varphi; W(r_2) = r_2\omega_2e_\varphi. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Notemos que integrando a primeira equação de (5.2) com relação a r obtemos a seguinte expressão para a pressão π

$$\pi = U + \int \frac{v^2}{r} dr. \quad (5.3)$$

Da terceira equação de (5.2) obtemos que $\frac{d}{dr}(r \frac{dw}{dr}) = 0$, donde inferimos que

$$r \frac{dw}{dr} = k', k' \text{ constante.} \quad (5.4)$$

Integrando (5.4) obtemos que $w(r) = k' \log r + c$ e então usando as condições de fronteira da quinta equação de (5.2), obtemos o seguinte sistema homogêneo

$$\begin{cases} k' \log r_1 + c = 0 \\ k' \log r_2 + c = 0, \end{cases}$$

cuja única solução é a trivial. Logo $w = 0$ em $[r_1, r_2]$.

Finalmente, da segunda equação de (5.2), segue que v é uma solução da seguinte equação de Euler

$$\frac{d}{dr}(r \frac{dv}{dr}) = \frac{v}{r}. \quad (5.5)$$

A solução geral para (5.5) é $v(r) = Ar + \frac{B}{r}$, com $A, B \in \mathbb{R}$, a determinar. Logo, $W(r) = (Ar + \frac{B}{r})e_\varphi$ e como W deve satisfazer as condições de fronteira de (5.2)₅, determinamos unicamente as constantes A e B :

$$A = \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \text{e} \quad B = -\frac{r_1^2 r_2^2 (\omega_2 - \omega_1)}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Concluimos então que W é a única solução radial estacionária do escoamento de Couette. Por conveniência vamos chamar (W, π) de escoamento de Couette ao invés de escoamento básico para o escoamento

de Couette.

5.1.2 Estabilidade Linear do Escoamento de Couette

Vamos provar o seguinte teorema devido a J. L. Synge, de 1938, que consta em ([10]):

Teorema 5.1.1 *Se o movimento dos cilindros que delimitam o fluido é tal que*

$$\omega_2 r_2^2 > \omega_1 r_1^2,$$

então o escoamento de Couette é condicionalmente assintoticamente estável com relação a perturbações que independem de φ .

Observação 5.1.2 *Justifica-se experimentalmente a escolha da restrição para as perturbações.*

Demonstração 5.1.3 *Vamos mostrar que a parte real do primeiro autovalor do problema (4.1) é positiva e então o resultado segue pelo Teorema 2.5.1.*

Sejam (ψ, π) campos de perturbação para o escoamento de Couette, em coordenadas cilíndricas. Por hipótese os campos de perturbação independem de φ , ou seja,

$$\psi(r, z) = \psi_1(r, z)e_r + \eta(r, z)e_\varphi + \psi_2(r, z)e_z \text{ e } \pi = \pi(r, z). \quad (5.6)$$

Então ψ e π satisfazem o problema (4.1), em coordenadas cilíndricas

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu \square \psi_1 - 2\eta \left[A + \frac{B}{r^2} \right] = -\frac{\partial \pi}{\partial r} + \sigma \psi_1 \\ -\nu \square \eta + 2A\psi = \sigma \eta \\ -\nu \triangle \psi_2 = \sigma \psi_2 - \frac{\partial \pi}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi_1) + \frac{\partial}{\partial z} (\psi_2) = 0 \\ \psi_1(r_1) = \psi_1(r_2) = \psi_2(r_1) = \psi_2(r_2) = \eta(r_1) = \eta(r_2) = 0, \end{array} \right. \quad (5.7)$$

sendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \square = \triangle - \frac{1}{r^2} \\ \triangle = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) + \frac{d^2}{dz^2}. \end{array} \right.$$

A partir da quarta equação de (5.7) segue que existe uma função ψ , tal que

$$\psi_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad e \quad \psi_2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi). \quad (5.8)$$

Aplicando $-\frac{\partial}{\partial z}$ em ambos os lados da primeira equação de (5.7), $\frac{\partial}{\partial r}$ em ambos os lados da terceira equação de (5.7), somando-as e substituindo as informações de (5.8) obtemos

$$-\nu \square^2 \psi + 2 \left(A + \frac{B}{r^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial z} = \sigma \square \psi. \quad (5.9)$$

Assim, através de (5.8) e (5.9), podemos reescrever o sistema (5.7) da seguinte maneira

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu \square^2 \psi + 2 \left(A + \frac{B}{r^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial z} = \sigma \square \psi \\ -\nu \square \eta - 2A \frac{\partial \psi}{\partial z} = \sigma \eta \\ \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \eta = 0, \quad \text{em } r = r_1, r_2. \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Agora vamos introduzir as seguintes quantidades adimensionais

$$\begin{cases} \xi = \frac{r}{r_1} \geq 1, & \chi = \frac{z}{r_1} \\ \alpha = \frac{r_2}{r_1} > 1, & \beta = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad R = \frac{\omega_1 r_1^2}{\nu} \\ a = \frac{\alpha^2 \beta - 1}{\alpha^2 - 1}, & b = -\frac{\alpha^2(\beta - 1)}{\alpha^2 - 1}. \end{cases}$$

Substituindo elas em (5.10) obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\boxplus^2 \psi + 2R \left(a + \frac{b}{\xi^2} \right) r_1 \frac{\partial \eta}{\partial \chi} = \frac{\sigma}{\nu} \boxplus \psi r_1^4 \\ -r_1 \boxplus \eta - 2Ra \frac{\partial \psi}{\partial \chi} = \frac{\sigma}{\nu} \eta r_1^3 \\ \boxplus = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} - \frac{1}{\xi^2}. \end{cases} \quad (5.11)$$

Estamos supondo que a perturbação é periódica na direção z , visto que o domínio não é limitado nesta direção. Vamos introduzir esta informação no problema (5.11) colocando

$$\psi(\xi, \chi) = r_1 f(\xi) e^{i\lambda \chi}, \quad \eta(\xi, \chi) = i g(\xi) e^{i\lambda \chi} \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \quad (5.12)$$

Substituindo (5.12) no sistema (5.11) obtemos o seguinte problema de autovalor para f e g :

$$\begin{cases} (L - \lambda^2)(L - \lambda^2 + \frac{r_1^4}{\nu} \sigma) f = -2\lambda R(a + \frac{b}{\xi^2}) g \\ (L - \lambda^2 + \frac{r_1^2}{\nu} \sigma) g = -2\lambda R a f \\ f = \frac{df}{d\xi} = g = 0 \text{ em } \xi = 1, \alpha \\ L = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} - \frac{1}{\xi^2}. \end{cases} \quad (5.13)$$

Multiplicando a primeira equação de (5.13) por $\bar{\xi f}$, integrando de 1

a α e integrando por partes em algumas parcelas obtemos

$$\begin{aligned}
& -\frac{r_1^4}{\nu}\sigma(J_1^2 + J_0^2 + \lambda^2 K_0^2) + I_2^2 + 3(I_1^2 - I_0^2) + 2\lambda^2(J_1^2 + J_0^2) + \lambda^4 k_0 \\
& = 2\lambda R \int_1^\alpha \left(a + \frac{b}{\xi^2}\right) \xi \bar{f} g d\xi,
\end{aligned} \tag{5.14}$$

sendo que,

$$\begin{cases} I_2^2 = \int_1^\alpha \xi |f''|^2 d\xi, & I_1^2 = \int_1^\alpha \xi^{-1} |f'|^2 d\xi, & I_0^2 = \int_1^\alpha \xi^{-3} |f|^2 d\xi, \\ J_1^2 = \int_1^\alpha \xi |f'|^2 d\xi, & J_0^2 = \int_1^\alpha \xi^{-1} |f|^2 d\xi, & K_0^2 = \int_1^\alpha \xi |f|^2 d\xi. \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação de (5.13) por $(a + \frac{b}{\xi^2})\xi\bar{g}$, integrando de 1 a α e integrando por partes em algumas parcelas obtemos

$$\begin{aligned}
& -\frac{r_1^2}{\nu}\sigma \int_1^\alpha \left(1 + \frac{b}{a\xi^2}\right) \xi |g|^2 d\xi + \int_1^\alpha \left(1 + \frac{b}{a\xi^2}\right) [\xi |g'|^2 + (\xi^{-1} + \lambda^2 \xi) |g|^2] d\xi - \\
& -\frac{2b}{a} \int_1^\alpha \xi^{-3} |g|^2 d\xi = 2\lambda R \int_1^\alpha \left(a + \frac{b}{\xi^2}\right) \xi f \bar{g} d\xi.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Notemos que somando (5.14), (5.15), $\overline{(5.14)}$ e $\overline{(5.15)}$ conseguimos

$$-Re(\sigma)P + L + M + N = 0, \tag{5.16}$$

sendo,

$$\begin{cases} P = \frac{r_1^4}{\nu}(J_1^2 + J_0^2 + \lambda^2 K_0^2) + \frac{r_1^2}{\nu} \int_1^\alpha \left(1 + \frac{b}{a\xi^2}\right) \xi |g|^2 d\xi \\ L = I_2^2 + 3(I_1^2 - I_0^2) + 2\lambda^2(J_1^2 + J_0^2) + \lambda^4 K_0^2 \\ M = \int_1^\alpha \left(1 + \frac{b}{a\xi^2}\right) (\xi |g'|^2 + \xi^{-1} |g|^2) d\xi - \frac{2b}{a} \int_1^\alpha \xi^{-3} |g|^2 d\xi \\ N = \lambda^2 \int_1^\alpha \left(1 + \frac{b}{a\xi^2}\right) \xi |g|^2 d\xi. \end{cases}$$

Agora, com o intuito de encontrar o sinal de $Re(\sigma)$, vamos estimar os sinais de P , L , M e N .

Pela hipótese do Teorema obtemos que $\alpha^2\beta > 1$, e então como $\alpha > 1$ e $\xi \in [1, \alpha]$ temos:

$$1 + \frac{b}{a\xi^2} = \frac{\alpha^2\beta(\xi^2 - 1) + \alpha^2 - \xi^2}{\xi^2(\alpha^2\beta - 1)} > 0.$$

De posse desta estimativa, inferimos que $P > 0$ e $N > 0$.

Devido ao fato de $\xi \in [1, \alpha]$, temos que

$$\int_1^\alpha \xi^{-1} |f' - \frac{f}{\xi}|^2 d\xi \geq 0,$$

e desenvolvendo esta desigualdade resulta que:

$$\int_1^\alpha \xi^{-1} |f'|^2 d\xi - \int_1^\alpha \xi^{-2} (f' \bar{f} + f \bar{f}') d\xi + \int_1^\alpha \xi^{-3} |f|^2 d\xi \geq 0. \quad (5.17)$$

Usando integração por partes na segunda parcela de (5.17) temos:

$$- \int_1^\alpha \xi^{-2} (f' \bar{f} + f \bar{f}') d\xi = -2 \int_1^\alpha \xi^{-3} |f|^2 d\xi.$$

Assim, podemos reescrever (5.17) da seguinte forma:

$$I_1^2 - 2I_0^2 + I_0^2 \geq 0. \quad (5.18)$$

Como consequência de (5.18), obtemos que $I_1^2 \geq I_0^2$, donde segue que $L > 0$.

Já provamos acima que $1 + \frac{b}{a\xi^2} > 0$ e sabemos que $\xi \in [1, \alpha]$, logo

$$\int_1^\alpha (\xi + \frac{b}{a\xi}) |g' - \frac{g}{\xi}|^2 d\xi \geq 0. \quad (5.19)$$

Desenvolvendo a estimativa (5.19) temos:

$$\begin{aligned} \int_1^\alpha (1 + \frac{b}{a\xi^2}) \xi |g'|^2 - \int_1^\alpha (1 + \frac{b}{a\xi^2}) (g\bar{g}' + \bar{g}g') d\xi + \\ + \int_1^\alpha (1 + \frac{b}{a\xi^2}) \xi^{-1} |g|^2 d\xi \geq 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Usando integração por partes na segunda parcela de (5.20), obtemos

$$\int_1^\alpha (1 + \frac{b}{a\xi^2}) (g\bar{g}' + \bar{g}g') d\xi = \frac{2b}{a} \int_1^\alpha \xi^{-3} |g|^2 d\xi.$$

Deste modo, podemos identificar (5.20) com a equação M , e então concluímos que $M \geq 0$.

Logo, como $P, L, N > 0$ e $M \geq 0$, para $-Re(\sigma)P + L + M + N = 0$ ser verdadeiro, devemos ter obrigatoriamente que $Re(\sigma) > 0$.

■

5.1.3 Estabilidade não-Linear do Escoamento de Couette

Nesta seção vamos apresentar um resultado devido a James Serrin, que consta na monografia ([10]) e que nos oferece condições suficientes para a ocorrência de estabilidade incondicional e assintótica do escoamento de Couette.

Lema 5.1.4 *Seja $f \in V$. Então*

$$(1/\log(r_2/r_1))^2 \int_\Omega \frac{f^2}{r^2} dx \leq \int_\Omega \nabla f : \nabla f dx.$$

Demonstração 5.1.5 Como f se anula em r_1 , temos que

$$\int_{r_1}^r \frac{\partial f}{\partial r} dr = f(r, \theta, z).$$

Logo, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$|f(r, \theta, z)| \leq \left(\int_{r_1}^{r_2} \left| \frac{\partial f}{\partial r} \right|^2 r dr \right)^{\frac{1}{2}} \left(\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \right)^{\frac{1}{2}},$$

e então,

$$\frac{|f(r, \theta, z)|^2 r}{r^2} \leq \left(\int_{r_1}^{r_2} \left| \frac{\partial f}{\partial r} \right|^2 r dr \right) \left(\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \right) \frac{1}{r}.$$

Finalmente, integrando em r, θ e z e majorando $\left| \frac{\partial f}{\partial r} \right|$ por $|\nabla f|$, obtemos o resultado:

$$\int_{\Omega} \frac{|f(r, \theta, z)|^2 r}{r^2} dr d\theta dz \leq \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial f}{\partial r} \right|^2 r dr d\theta dz \right) \left(\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \right)^2.$$

■

Teorema 5.1.6 Se $\left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{\nu} \right| < (r_2^2 - r_1^2) \left\{ \frac{1}{r_1 r_2 \log(r_2/r_1)} \right\}^2$, então o escoamento de Couette é incondicionalmente assintoticamente estável.

Demonstração 5.1.7 Vamos mostrar que o valor mínimo, λ , do funcional G é positivo. Denotemos a função em que G assume seu valor mínimo por $\psi_1 = w e_r + v e_\varphi + u e_z \in V$, então

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} \psi_1 \cdot D \cdot \psi_1 dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \psi_1 : \nabla \psi_1 dx}{\int_{\Omega} |\psi_1|^2 dx}. \quad (5.21)$$

Notemos que o sinal de λ depende apenas do sinal do numerador de

(5.21), pois o denominador é positivo. Isto é,

$$\text{senal}(\lambda) = \nu \int_{\Omega} \nabla \psi_1 : \nabla \psi_1 \, dx + \int_{\Omega} \psi_1 \cdot D \cdot \psi_1 \, dx. \quad (5.22)$$

Trabalharemos agora com os termos de (5.22), a fim de utilizar a hipótese do teorema e concluir a positividade de λ .

$$\text{Notemos que, em coordenadas cilíndricas, } D = -\frac{B}{r^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde obtemos

$$\int_{\Omega} \psi_1 \cdot D \cdot \psi_1 \, dx = -2B \int_{\Omega} \frac{wv}{r^2} \, dx. \quad (5.23)$$

Utilizando a desigualdade $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, $a, b \in \mathbb{R}$, em $\frac{wv}{r^2}$ no lado direito de (5.23), inferimos:

$$\begin{aligned} 2B \int_{\Omega} \frac{wv}{r^2} \, dx &\leq |B| \int_{\Omega} \frac{(w^2 + v^2)}{r^2} \, dx \\ &\leq |B| \int_{\Omega} \frac{(w^2 + v^2 + u^2)}{r^2} \, dx \\ &= |B| \int_{\Omega} \frac{\psi_1^2}{r^2} \, dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\Omega} \psi_1 \cdot D \cdot \psi_1 \, dx \geq |B| \int_{\Omega} \frac{\psi_1^2}{r^2} \, dx. \quad (5.24)$$

Pelo Lema 5.1.4 temos que

$$\int_{\Omega} \nabla \psi_1 : \nabla \psi_1 \, dx \geq (1/\log(r_2/r_1))^2 \int_{\Omega} \frac{\psi_1^2}{r^2} \, dx. \quad (5.25)$$

Substituindo as estimativas (5.24) e (5.25) em (5.22) inferimos que

$$\text{senal}(\lambda) \geq \left\{ \frac{\nu}{\log^2(r_2/r_1)} - |B| \right\} \int_{\Omega} \frac{\psi_1^2}{r^2} dx.$$

Como $|B| = \frac{r_1^2 r_2^2 |\omega_2 - \omega_1|}{r_2^2 - r_1^2}$, e por hipótese

$$\left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{\nu} \right| < (r_2^2 - r_1^2) \left\{ \frac{1}{r_1 r_2 \log(r_2/r_1)} \right\}^2,$$

temos que $|B| < \frac{\nu}{\log^2(r_2/r_1)}$, donde $\text{senal}(\lambda) > 0$ e o resultado segue.

■

Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos sucintamente os fundamentos da Teoria Linear de Estabilidade Hidrodinâmica, enfatizando o Teorema de Sattinger, embora o primeiro resultado tenha sido obtido por G. Prodi em 1962, citado no trabalho de Sattinger. Prodi assumiu que o campo básico U possui derivadas parciais de segunda ordem em L^2 e mostrou a estabilidade assintótica condicional com relação à norma de $H^1(\Omega)$. Sattinger, assumindo que U e as autofunções de L , o operador linear não simétrico associado ao problema linearizado para o campo de perturbações, e seu adjunto L^* têm derivadas parciais de primeira ordem limitadas em Ω , provou a estabilidade assintótica condicional com relação à norma L^2 . A análise linear é realizada para um número de Reynolds fixo e baseia-se essencialmente em determinar o espectro do operador L . A análise não-linear é o assunto do restante da dissertação e teve seu desenvolvimento mais acelerado a partir do trabalho de James Serrin em 1959, que representa marco importante no denominado Método da Energia. O método da energia tem esse nome porque considera-se uma equação fundamental para a energia das perturbações. Esta equação é obtida sem restringir a magnitude das perturbações. Serrin também mostrou que existe um problema de autovalor bastante similar ao problema de autovalor associado à teoria linear que no entanto possibilita que se determine a região de estabilidade absoluta do escoamento. Por outro lado, como destaca Serrin, o método da energia estabelece a estabilidade com relação a perturbações arbitrárias, e não apenas perturbações que satisfazem o problema hidrodinâmico. Galdi e Rionero em sua monografia ([12]) consideram o método da energia como um caso particular do método dos funcionais de Lyapunov para a análise da es-

tabilidade não linear de escoamentos de fluidos. Depois do trabalho de Serrin, surgiram várias contribuições importantes de D. D. Joseph, que resolveram vários problemas empregando funcionais de energia generalizadas obtidos heurísticamente. Posteriormente ([10], [37], [11], [13]), Galdi, Rionero, Padula, Mulone e Straughan em vários trabalhos exploraram a relação entre as teorias linear e não linear, alguns dos quais abordamos neste trabalho. Essencialmente mostrou-se que se o operador linear não-limitado associado ao problema linear for simetrizável, então as duas teorias completam-se perfeitamente, ou seja, o número de Reynolds previsto pela teoria linear, $\mathcal{R}_L$, e o número de Reynolds previsto pela método da energia, $\mathcal{R}_E$ (de estabilidade incondicional), coincidem. Quando isso não ocorre tem-se $\mathcal{R}_E < \mathcal{R}_L$. A grosso modo pode-se dizer que ainda hoje os pesquisadores procuram em algum problema em aberto descobrir um novo ‘funcional generalizado’ de modo a obter um número de Reynolds $\mathcal{R}_G$ de estabilidade condicional tal que

$$\mathcal{R}_E < \mathcal{R}_G < \mathcal{R}_L$$

com $\mathcal{R}_G$ mais próximo de $\mathcal{R}_L$ do que no último resultado publicado na literatura (por exemplo, [18], [19], [29]). Finalmente, destacamos que em [14] encontra-se um estudo abrangente e detalhado de condições suficientes para a estabilidade de escoamentos, incorporando também as contribuições de Adelina Georgescu(1942-2010), não abordadas nesta dissertação.

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, R. A., *Sobolev Spaces*, New York: Academic Press, 1975.
- [2] AUBIN, J. P., *Applied Functional Analysis*, New York-Chichester-Weinheim-Brisbane-Singapore-Toronto: John Wiley & Sons.Inc., 1999.
- [3] BRAUER, F., NOHEL, J. A., *The qualitative theory of ordinary differential equations*, New York: Dover publications, 1989.
- [4] BRÉZIS, H., *Análisis funcional Teoria y aplicaciones*, Madrid: Alianza Editorial, 1984.
- [5] CHANDRASEKHAR, S., *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Oxford University Press, 1961.
- [6] CHORIN, A. J., MARSDEN, J. E., *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer, 1990.
- [7] DAVIS, S. H., VON KERCZEK, C., A reformulation of energy stability theory, *Arch. Rational Mech. Anal.* 52 (1973), 112-117.
- [8] DRAZIN, P. G., REID, W. H., *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press, 2004.

- [9] DUNFORD N., SCHWARTZ J. T., *Linear operators, Part II*, New York-London: Interscience publishers, 1963.
- [10] GALDI, G. P., *Introduzione alla teoria della stabilità in fluidodinamica*, 5a. Scuola estiva di Fisica Matematica, Ravello, 1980.
- [11] GALDI, G. P., PADULA, M., A new approach to energy theory in the stability of fluid motion, *Arch. for Rat. Mech. and Anal.* 110 (1990), 187-286.
- [12] GALDI, G. P., RIONERO, S., *Weighted Energy Methods in Fluid Dynamics and Elasticity*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics 1134, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1985.
- [13] GALDI, G. P., STRAUGHAN, B., Exchange of stabilities, symmetry and nonlinear stability, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 89 (1985), 211-228.
- [14] GEORGESCU, A., PALESE, L., *Stability criteria for fluid flows*, World Scientific Publishing, 2010.
- [15] GIRAULT, V., RAVIART, P. -A., *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations*, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1979.
- [16] IÓRIO, R. J., IÓRIO, V. M., *Equações Diferenciais Parciais: uma introdução*, IMPA, 1988.
- [17] JOSEPH, D. D., *Stability of Fluid Motions*. Springer, 1976.
- [18] KAISER, R., TILGNER, A., VON WAHL, W., A generalized energy functional for plane couette flow, *SIAM J. Math. Anal.* 37 (2005), 438-454.

- [19] KAISER, R., MULONE, G., A note on nonlinear stability of plane parallel shear flows, *J. Math. Anal. Appl.* 302 (2005), 543-556.
- [20] KATO, T., *Perturbation theory for linear operators*, Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1976.
- [21] KESAVAN, S., *Topics in Functional analysis and application*, New York- Chichester-Brisbane- Toronto- Singapore: John Wiley & Sons.Inc., 1989.
- [22] KREYSZIG, E., *Introductory functional analysis with aplications*, United States of America: John Wiley & Sons.Inc., 1978.
- [23] LADYZHENSKAYA, O. A., *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, 2nd. revised and enlarged, Gordon and Breach, New York, 1969.
- [24] LEBEDEV, L. P., VOROVICH I. I., *Functional analysis in mechanics*, Colombia: Springer, 1946.
- [25] McOwen, R. C., *Partial differential equations: methods and applications*, Pearson Education, 2003.
- [26] MEISE, R., VOGT, D., *Introduction to a Functional Analysis* Oxford, 1997.
- [27] MEDEIROS, L. A., MILLA MIRANDA, M., *Espaços de Sobolev*, Rio de Janeiro: UFRJ. IM, 2008.
- [28] MILMAN, V., *An introduction to functional analysis*, World, 1999.
- [29] NERLI, A., CAMARRI, S., SALVETTI, M. V., A conditional stability criterion based on generalized energies, *J. Fluid M ech.* (2007), vol. 581, 277-286.

- [30] PAYNE, L. E., WEINBERGER, H. F., *New bounds for solutions of second order elliptic partial differential equations*, Pacific J. Math. 8(1958), 551-573.
- [31] QUARTERONI, A., VALLI, A., *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer, 1997.
- [32] RIESZ, F., NAGY, B., *Functional Analysis*, London-Glasgow: Blackie & Son Limited, 1956
- [33] ROBINSON, J. C., *Infinite-Dimensional Dynamical Systems* United States of America: Cambridge University Press, 2001.
- [34] SATTINGER, D. H., The mathematical problem of hydrodynamic stability, *J. of Math. and Mech.* 18 (1970), 797 -817.
- [35] SERRIN, J., On the stability of viscous fluid motions, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 3 (1959), 1-13.
- [36] STRAUGHAN, B., *The Energy Method, Stability, and Non linear Convection*, 2nd edn. Springer, 2004.
- [37] STRAUGHAN, B., Conditional stability and symmetry in hydrodynamics and mathematical biology, *Portugaliae Mathematica*, 41 (1982), 251-260.
- [38] TARTAR, L., *An introduction to Navier-Stokes equation and oceanography*, Springer, 2006.
- [39] TEMAN, R., *Navier-Stokes equations. Theory and Numerical analysis*, Elsevier Sciences Publishers, 1985.
- [40] VRABIE, I. I., *Differential equations. An introduction to basic concepts, results and applications*, World Scientific, 2004.

[41] YOSIDA, K., *Functional Analysis*, Springer, 1980.