Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Existência Global e Propriedades Assintóticas para a Equação Semilinear da Onda em $\mathbb{R}^n$

Alisson Rafael Aguiar Barbosa

Orientador: Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão

Florianópolis

Março de 2008

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Existência Global e Propriedades Assintóticas para a Equação Semilinear da Onda em $\mathbb{R}^n$

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais.

Alisson Rafael Aguiar Barbosa

Florianópolis
Março de 2008

Existência Global e Propriedades Assintóticas para a Equação Semilinear da Onda em $\mathbb{R}^n$

por

Alisson Rafael Aguiar Barbosa

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre" em Matemática , Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Clovis Caézar Gonsaga
Coordenador da Pós-Graduação em Matemática

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Ademir Fernando Pazoto (UFRJ)

Prof. Dr. Jardel Morais Pereira (UFSC)

Prof. Dr. Joel Santos Souza (UFSC)

Florianópolis, Março de 2008.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me confortou nas horas de dificuldades. À Carolina que sempre me apoiou e esteve presente em muitos momentos importantes da minha vida e de forma especial a minha família.

Meus agradecimentos sinceros ao professor Dr. Ruy Coimbra Charão que não somente orientou este trabalho, mas se mostrou um grande profissional e uma pessoa de boa índole.

Aos professores do Programa de Mestrado do Departamento de Matemática da UFSC, com os quais tive a oportunidade de convívio.

Também não poderia esquecer dos amigos que fiz aqui ao longo desses dois anos de curso, pois foram muitos os momentos felizes que compartilhamos juntos.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro durante o período de 03/2007 e 03/2008.

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência global e unicidade de soluções da equação da onda, linear e semilinear, no $\mathbb{R}^n$ bem como averiguamos suas propriedades assintóticas. Mostramos novas identidades de energia consideradas por Todorova-Yordanov em [26], as quais são baseadas em um novo tipo de multiplicador associado a uma função relacionada com o comportamento assintótico da solução fundamental para a equação da onda. Importante dizer também que essas identidades produzem estimativas que têm várias aplicações como, por exemplo, mostrar que a energia local, fora de uma bola com raio dependendo do tempo, decai exponencialmente.

Abstract

In this work we study the global existence and uniqueness of solutions for the linear and semilinear wave equation in $\mathbb{R}^n$. We also study their asymptotic properties. We present new identities of energy considered by Todorova-Yordanov in [26] which are based in a new type of multipliers associated to a function related to the asymptotic behavior of the fundamental solution to the wave equation . It is also important to say that these identities produce estimates that have many applications as, for example, to show that the local energy, outside a ball with radius depending on the time, decays exponentially.

Sumário

Introdução

No presente trabalho estudamos a existência global e unicidade de soluções do problema de Cauchy associado à equação semi-linear da onda em $\mathbb{R}^n$, bem como averiguamos suas propriedades assintóticas. Nosso problema é dado abaixo:

$$u_{tt} - \triangle u + u_t = |u|^p, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \tag{1}$$

$$u_{|t=0} = \epsilon u_0, \qquad u_{t|t=0} = \epsilon u_1 \tag{2}$$

com $1 \leq p < \frac{n}{n-2}$, se $n \geq 3$, $1 \leq p < \infty$, se $n = 1$ ou 2, $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, com

$$u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n), \quad u_1 \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

$$suppu_i \subset B(K) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < K\}, \quad i = 0, 1.$$

Neste estudo, destacamos o Teorema 9 que apresenta a existência e unicidade global de solução desse problema e o Teorema 10 que analisa o comportamento da solução para tempos grandes.

No primeiro capítulo, deste trabalho, relacionamos alguns resultados sobre Espaços de Sobolev e semigrupos lineares de classe C^0. Mais especificamente, tratamos nesse capítulo de resultados importantes, como a proposição que estabelece a diferenciabilidade de um semigrupo, bem como os teoremas de Hille-Yosida e Lumer-Phillips que tratam da caracterização de um semi-grupo de classe C^0. No segundo capítulo, usamos os resultados de semigrupos, desenvolvidos na primeira parte do trabalho, para mostrar a existência e a unicidade global de soluções do problema linear associado:

$$u_{tt} - \triangle u + u_t = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \tag{3}$$

$$u_{|t=0} = \epsilon u_0, \qquad u_{t|t=0} = \epsilon u_1. \tag{4}$$

Basicamente, reescrevemos o problema (3)–(4) como um problema de primeira ordem, a saber:

$$\begin{cases} \dfrac{dU(t)}{dt} + AU(t) = 0 \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{5}$$

sendo A um operador linear. Em seguida, usando o Teorema de Lummer-Phillips, mostramos que o operador A é gerador de um semigrupo $S(t)_{t\geq 0}$ de classe C^0. Assim, a solução do problema linear (5) é dada por $U(t) = S(t)U_0$.

Da mesma forma, reescrevemos o problema semilinear (1)-(2) do seguinte modo:

$$\begin{cases} \dfrac{dU(t)}{dt} + AU(t) = F(U) \\ U(0) = U_0 \end{cases} . \tag{6}$$

Agora, sendo A gerador de um semigrupo de classe C^0 e uma vez que tenhamos provado que F é uma aplicação Lipischitz-contínua sobre conjuntos limitados, no espaço de Hilbert considerado, obtem-se a existência de uma única solução local para (6).

Por fim, no terceiro capítulo, demonstramos a existência global de soluções e o comportamento assintótico da energia. Mostramos que a energia total decai com taxa polinomial e caracterizamos uma região em que a energia (local) decai com taxa exponencial. Mais especificamente, provamos que o funcional de energia

$$W(t) = \|e^{\varphi(t,\cdot)}Du(t,\cdot)\|_{\mathbb{L}^2} + (1+t)^{n/4+1/2}\|Du(t,\cdot)\|_{\mathbb{L}^2}$$

é limitado para qualquer intervalo de tempo no qual a solução esteja definida. Aqui a função $\varphi(t,x)$ é uma função relacionada com o comportamento assintótico da solução fundamental para a equação da onda.

Em geral, como neste trabalho, os resultados de existência global e comportamento assintótico para problemas semilineares em domínios não limitados são obtidos apenas para dados iniciais pequenos ([6], [16], [15], [14]). O resultado de comportamento assintótico aqui mostrado, resulta de um novo método considerado por Todorova-Yordanov em [26]. Esse método tem se mostrado eficiente e tem sido usado por outros autores como em [15], [14], [16]. Inclusive esse método tem sido efetivo para outras equações como no caso de Charão-Ikehata [6] que o aplicaram para o sistema de ondas elásticas.

Capítulo 1

Resultados Básicos

1.1 Espaços de Sobolev

Nesta seção apresentaremos alguns resultados da teoria de Análise Funcional e dos Espaços de Sobolev que são necessários neste trabalho, como o teorema de Lax-Milgram e um teorema de regularidade elíptica.

Definição 1. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$. O Espaço de Sobolev $\mathbb{W}^{m,p}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega); D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

sendo D^α a derivada no sentido distribucional.

O espaço $\mathbb{W}^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{\mathbb{W}^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

A notação $\mathbb{H}^m(\Omega)$ é usada para representar o espaço $\mathbb{W}^{m,p}(\Omega)$, quando $p = 2$. Este espaço $\mathbb{H}^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(f, g)_{\mathbb{H}^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \tag{1.2}$$

Naturalmente, se denota $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Definição 2. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. O espaço $\mathbb{W}_0^{m,p}(\Omega)$ é definido como o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $\mathbb{W}^{m,p}(\Omega)$. Analogamente, $\mathbb{H}_0^m(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $\mathbb{H}^m(\Omega)$.*

Resultados da teoria dos espaços de Sobolev podem ser encontrados em [21], [1] ou [18].

Teorema 1 (Lax-Milgram)**.** *Seja H espaço de Hilbert e $a(u,v)$ forma bilinear contínua e coerciva sobre H. Seja $f \in H'$. Então, existe único $u \in H$ tal que $a(u,v) = (f,v)$, $\forall v \in H$.*

A demonstração pode ser encontrada em Brezis [5], pg. 84.

Observação 1. *Uma forma bilinear $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to R$ é contínua se existe $c > 0$ de modo que*

$$|a(u,v)| \leq c\|u\|\|v\| \ \ \forall u,v \in H$$

tal forma bilinear é dita **coerciva** *se existe $\alpha > 0$ tal que $a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2$, $\forall u \in H$.*

Teorema 2 (Regularidade Elíptica)**.** *Sejam L um operador diferencial elíptico de ordem $2m$, $m \in \mathbb{N}$, definido em um aberto regular $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $u \in D'(\Omega)$, sendo $D'(\Omega)$ o espaço das distribuições sobre Ω. Seja u solução de $Lu = f$, no sentido distribucional, com $f \in L^2(\Omega)$. Então, $u \in \mathbb{H}^{2m}(\Omega)$.*

Esse teorema é bem conhecido e sua demonstração pode ser vista na referência [2].

Nota 1. *Os resultados apresentados acima são utilizados, juntamente com os resultados da teoria de semi-grupos, para mostrarmos que o problema* **(3.1)-(2.2)** *possui uma única solução global. A seguir, relacionaremos alguns tópicos da teoria de semigrupos.*

1.2 Semigrupos de Operadores Lineares

Nesta seção, apresentamos a definição de semigrupo de classe $\mathcal{C}_0$ e alguns teoremas importantes que são utilizados no Capitulo2. Começaremos com a definição de operador linear limitado.

Definição 3. *Sejam X e Y espaços de Banach. Um operador linear é uma aplicação linear $A : D(A) \subset X \to Y$, com $D(A)$ o domínio de A. Diz-se que o operador linear é limitado se existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

$$\|Au\|_Y \leq C \|u\|_X, \quad \forall u \in D(A).$$

Neste caso, se o domínio de A é denso em X então A pode ser estendido a todo X(como é demonstrado em [19] pg 100).

Representa-se por $B(X,Y)$ a família $A : X \to Y$ dos operadores lineares limitados de X em Y. A função real $\|.\|$ definida por

$$\|A\|_{B(X,Y)} = \sup_{\{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}} \|Ax\|_Y < \infty,$$

é uma norma sobre $B(X,Y)$. Sabemos da teoria de ánalise funcional que $B(X,Y)$ é um espaço de Banach e $B(X)$ representa os operadores lineares limitados de X em X.

Definição 4. *Seja X um espaço de Banach e $B(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X. Uma família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um Semigrupo de operadores lineares e limitados de X se:*

a. $S(0) = I$, *com I operador identidade de X;*

b. $S(t+s) = S(t)S(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^+$.

Além disso, diz-se que o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é de Classe C_0 se

c. $\lim\limits_{t \to 0^+} \|[S(t) - I]x\| = 0, \quad \forall x \in X$.

Um exemplo de semigrupo de classe $\mathcal{C}_0$ é a função exponencial $S(t) = e^{tA}$ que pode ser definida quando A for um operador linear limitado. No caso em que A é um operador linear não limitado, com certas propriedades boas, pode-se também definir e^{tA}. Isso é feito pela teoria de semigrupos (Gomes[10], Pazy[24]).

Para iniciarmos o estudo das propriedades dos semigrupos de classe C_0 em um espaço de Banach X, precisaremos do teorema abaixo, bem conhecidos da Análise Funcional.

Teorema 3 (Teorema da Limitação Uniforme)**.** *Sejam X espaço de Banach e Y espaço vetorial normado. Seja $(T_n)_{n\in I}$ família em $B(X,Y)$, com I conjunto de índices qualquer. Supor que para cada $x \in X$, o conjunto $\{T_n x\}_{n\in I}$ é limitado em Y. Então, $\{T_n\}_{n\in I}$ é limitada em $B(X,Y)$, isto é, $\exists M > 0$ tal que $\|T_n\| \leq M$, $\forall n \in I$, com M independente de n.*

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em Groetsch [11], pg.51.

Proposição 1. *Se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0, então $\|S(t)\|$ é uma função limitada em qualquer intervalo limitado $[0,T]$.*

Demonstração. : **Afirmação:** Existem $\delta > 0$ e $M \geq 1$, tais que $\|S(t)\| \leq M$, $\forall t \in [0,\delta]$. Se isso não acontecesse, haveria uma seqüência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $t_n \to 0^+$ tal que $\|S(t_n)\| \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então, pelo teorema 3, $\|S(t_n)x\|$ não seria limitado para algum $x \in X$, o que entraria em contradição com o item c) da definição 4.

Além disso, temos que $M \geq 1$, pois pela condição a) da definição de semigrupo de classe C_0, $\|S(0)\| = 1$.

Seja $t \in [0,T]$. Portanto, para algum inteiro não negativo n e algum $r \in \mathbb{R}$, com $0 \leq r < \delta$ temos que $t = n\delta + r$. Logo

$$\begin{aligned}\|S(t)\| &= \|S(n\delta + r)\| \\ &= \|S(\delta)^n S(r)\| \leq \|S(\delta)^n\|\,\|S(r)\| \leq M^n M = M^{n+1},\end{aligned}$$

o que mostra que $\|S(t)\|$ é uma função limitada em $[0,T]$. □

Corolário 1. *Todo semigrupo de classe C_0 é fortemente contínuo em $\mathbb{R}^+$, ou seja, se $t \in \mathbb{R}^+$ então $\lim\limits_{s\to t} S(s)x = S(t)x$, $\forall x \in X$.*

Demonstração. :

Consideremos $t \geq 0$. Para cada $x \in X$ e $h > 0$, segue que

$$\begin{aligned}\|S(t+h)x - S(t)x\| &= \|S(t)[S(h)-I]x\| \\ &\leq \|S(t)\| \, \|[S(h)-I]x\| \to 0\end{aligned}$$

quando $h \to 0$, pois $\|S(t)\|$ é limitada e $\lim_{h\to 0} \|[S(h)-I]x\| = 0$, $\forall x \in X$.Também para $x \in X$ e para os valores de h tais que $0 < h < t$, resulta

$$\begin{aligned}\|S(t-h)x - S(t)x\| &= \|S(t-h)[I-S(h)]x\| \\ &\leq \|S(t-h)\| \, \|[I-S(h)]x\| \to 0\end{aligned}$$

quando $h \to 0$.

Portanto, $\lim_{s\to t} S(s)x = S(t)x$, $\forall x \in X$. $\square$

Observação 2. *Sabemos que se A é um operador linear e limitado em X, então*

$$\left\|e^{tA}\right\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} = e^{t\|A\|} \quad t \geq 0. \tag{1.3}$$

No caso da função exponencial, se $w \geq \|A\|$, então $\left\|e^{tA}\right\| \leq e^{tw}$, para todo $t \geq 0$. Existe uma propriedade semelhante a esta para os semigrupos, que será mostrado na próxima proposição.

Vamos precisar do seguinte lema:

Definição 5. *Uma função $p : X \to \mathbb{R}$, X espaço vetorial real é subaditiva se satisfaz*

$p(t+s) \leq p(t) + p(s)$, $\forall t, s \in X$

Lema 1. *Seja p uma função subaditiva em $\mathbb{R}^+$ e limitada superiormente em todo intervalo limitado. Então, $\dfrac{p(t)}{t}$ tem limite quando $t \to \infty$ e*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t} = \inf_{t>0} \frac{p(t)}{t}. \tag{1.4}$$

Demonstração. :

Defina $w_0 = \inf_{t>0} \dfrac{p(t)}{t}$, sendo $-\infty \leq w_0 < \infty$. A demonstração será dividida em dois casos.

Caso 1: $w_0 > -\infty$.

Seja $\epsilon > 0$. Da definição de ínfimo, existe $T > 0$ tal que $\dfrac{p(T)}{T} \leq w_0 + \epsilon$.

Sejam $t > T$, $n \in \mathbb{N}$ e r real com $0 \leq r < T$ tais que $t = nT + r$. Considerando que p é subaditiva, resulta da definição de w_0 que

$$w_0 \leq \frac{p(t)}{t} \leq \frac{np(T) + p(r)}{t} = \frac{nTp(T)}{Tt} + \frac{p(r)}{t} \leq \frac{nT(w_0 + \epsilon)}{t} + \frac{p(r)}{t}.$$

Também do fato que p é limitada superiormente em $[0, T)$, passando limite quando $t \to \infty$ na desigualdade acima, obtemos

$$w_0 \leq \lim_{t\to\infty} \sup \frac{p(t)}{t} \leq w_0 + \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, está provado (1.4) para $w_0 > -\infty$.

Caso 2: $w_0 = -\infty$.

Para cada real w existe $T > 0$ tal que $\dfrac{p(T)}{T} \leq w$. Análogo ao caso anterior, obtém-se $\lim_{t\to\infty} \sup \dfrac{p(t)}{t} \leq w$.

Como w é arbritário, vemos que:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t} = -\infty.$$

Isso conclui a prova do lema. □

Proposição 2. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0. Então*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log \|S(t)\|}{t} = \inf_{t>0} \frac{\log \|S(t)\|}{t} = w_0 \tag{1.5}$$

e para cada $w > w_0$ existe uma constante $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt}, \quad \forall t \geq 0. \tag{1.6}$$

Demonstração. :

A função $\log \|S(t)\|$ é subaditiva. De fato,

$$
\begin{aligned}
\log \|S(t+s)\| &= \log \|S(t)S(s)\| \\
&\leq \log \left(\|S(t)\| \, \|S(s)\|\right) \\
&= \log \|S(t)\| + \log \|S(s)\| .
\end{aligned}
$$

Pela proposição 1, a função $\|S(t)\|$ é limitada superiormente em todo intervalo limitado. Assim, $\log \|S(t)\|$ é uma função limitada superiormente em intervalos limitados e pelo lema 1. Tomando $p(t) = \log \|S(t)\|$, conclui-se que (1.5) é válida.

Da definição de limite e de (1.5), se $w > w_0$, existe t_0 tal que para $t > t_0$ vale a desigualdade

$$
\frac{\log \|S(t)\|}{t} < w. \tag{1.7}
$$

Do fato que $\|S(t)\| \leq M_0$, $\forall t \in [0, t_0]$ e $\|S(0)\| = 1$, concluimos que $M_0 \geq 1$. Agora, considerando $w \geq 0$ em (1.7), obtemos:

$$
\log \|S(t)\| \leq wt + \log M_0, \quad \forall t \geq 0.
$$

Aplicando a exponencial em ambos os lados da desigualdade acima, vemos que:

$$
\|S(t)\| \leq e^{wt} e^{\log M_0} = M_0 e^{wt}, \quad \forall t \geq 0.
$$

No caso em que $M = M_0$, verifica-se (1.6).

De modo análogo, se $w < 0$ em (1.7), chega-se a

$$
\log \|S(t)\| \leq wt - wt_0 + \log M_0, \quad \forall t \geq 0. \tag{1.8}
$$

Da mesma forma que o procedimento anterior

$\|S(t)\| \leq e^{wt} e^{-wt_0} e^{\log M_0} = M_0 e^{-wt_0} e^{wt}, \quad \forall t \geq 0.$

Tomando $M = M_0 e^{-wt_0}$, obtemos (1.6).

Para concluir a prova, podemos observar que $M \geq 1$ em ambos os casos, pois $M_0 \geq 1$. □

Observação 3. *Quando $w_0 < 0$, é possível tomar $w = 0$, assim a proposição 2 nos diz que existe uma constante $M \geq 1$ tal que $\|S(t)\| \leq M$, para todo $t \geq 0$. Neste caso,*

$\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é dito Semigrupo Uniformemente Limitado de classe* C_0*.Também diz-se que* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é Semigrupo de Contrações de classe* C_0*, se para* $w_0 < 0$ *tivermos* $M = 1$*. Isto é,* $\|S(t)\| \leq 1$, $\forall t \geq 0$.

Definição 6. *Seja* X *espaço de Banach e seja* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *semigrupo de classe* C_0*. O operador linear*

$$A : D(A) \subset X \to X,$$

definido por

$$D(A) = \left\{ \ x \in X : \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x \quad existe \ \right\}$$
$$Ax = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x, \, \forall x \in D(A)$$

é chamado Gerador Infinitesimal ou simplesmente Gerador do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$*. A notação* A_h*, com* $h > 0$*, representará o operador linear limitado dado por* $\dfrac{S(h) - I}{h}$*.*

A próxima proposição tratará da diferenciabilidade de um semigrupo associado a seu gerador infinitesimal.

Proposição 3. *Seja* A *o gerador de um semigrupo de classe* C_0*,* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$*. Temos que*

i. *Se* $x \in D(A)$ *e* $t \geq 0$*, então* $S(t)x \in D(A)$ *e a função* $\mathbb{R}^+ \to X$*, dada por* $t \mapsto S(t)x$ *é diferenciável e*

$$\left(\frac{dS(t)x}{dt} \right) = AS(t)x = S(t)Ax, \quad x \in D(A). \tag{1.9}$$

ii. *Se* $x \in D(A)$*, então*

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)x d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau. \tag{1.10}$$

iii. *Se* $x \in X$ *e* $t \in \mathbb{R}$ *com* $t \geq 0$*, então*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)x d\tau = S(t)x.$$

iv. *Para* $x \in X$*, tem-se* $\displaystyle\int_0^t S(\tau)x d\tau \in D(A)$ *e além disso,*

$$S(t)x - x = A \int_0^t S(\tau)x d\tau. \tag{1.11}$$

Demonstração. :

i. Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ semigrupo de classe C_0 e A seu gerador. Para $t > 0$ e $h > 0$, vale a identidade

$$\frac{S(t+h)-S(t)}{h}x = \frac{S(h)-I}{h}S(t)x = A_h S(t)x = S(t)A_h x.$$

Assim, para $x \in D(A)$, o termo $S(t)A_h x$ tem um limite quando $h \to 0$, isto é,

$$S(t)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)x = S(t)A_h x \to S(t)Ax,$$

pela definição de A ser gerador infinitesimal.

Logo, $S(t)x \in D(A)$ e

$$\frac{d^+}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax. \tag{1.12}$$

Também para $0 < h < t$ e $x \in D(A)$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{S(t-h)-S(t)}{-h}x &= S(t-h)A_h x\\ &= S(t-h)(A_h x - Ax) + S(t-h)Ax \to S(t)Ax\end{aligned}$$

quando $h \to 0$.

Isso se justifica pois $A_h x \to Ax$, quando $h \to 0$ e pela proposição 1, $\|S(t)\|$ é limitada para $0 < h < t$. Assim, o termo $S(t-h)(A_h x - Ax) \to 0$ quando $h \to 0$. Além disso, da continuidade forte do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ temos que $S(t-h)Ax \to S(t)Ax$.

Portanto

$$\frac{d^-}{dt}S(t)x = S(t)Ax. \tag{1.13}$$

De (1.12) e (1.13), temos (1.9).

ii. Consideremos $x \in D(A)$ e t, s números positivos. Integrando (1.9) de s a t, obtemos (1.10), ou seja

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)x d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau.$$

iii) Pelo corolário 1, $\lim_{\tau \to t} S(\tau)x = S(t)x$, $\forall x \in X$ e $t \geq 0$. Isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $|\tau - t| < \delta$ resulta $\|S(\tau)x - S(t)x\| < \epsilon$. Conseqüentemente, para $x \in X$ e $0 < |h| \leq \delta$,

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (S(\tau)x - S(t)x) d\tau \right\| \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|S(\tau)x - S(t)x\| \, d\tau < \epsilon.$$

iii. Agora para $x \in X$ e $h > 0$ obtemos

$$A_h \int_0^t S(\tau)xd(\tau) = \frac{S(h) - I}{h} \int_0^t S(\tau)xd\tau = \frac{1}{h} \int_0^t S(h+\tau)xd\tau - \frac{1}{h} \int_0^t S(\tau)xd\tau$$

$$= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)xd\tau - \frac{1}{h} \int_0^h S(\tau)xd\tau.$$

Tomando limite quando $h \to 0$, é conseqüência do item iii) anterior que

$$A \int_0^t S(\tau)xd(\tau) = S(t)x - x.$$

□

Proposição 4. *O gerador de um semigrupo de classe C_0 é um operador fechado com domínio denso em X.*

Demonstração. :

Sejam $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Seja $x \in X$. Para $h > 0$, definimos:

$$x_h = \frac{1}{h} \int_0^h S(t)xdt. \tag{1.14}$$

Da proposição 3 resulta que $x_h \in D(A)$, $\forall h > 0$ e $x_h \to x$ quando $h \to 0$. Isso mostra que $x \in \overline{D(A)}$. Logo, $D(A)$ é denso em X.

Mostraremos que A é fechado.Tomando $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência no domínio de A tal que $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$, quando $n \to \infty$, conclui-se da proposição 3 que

$$S(h)x_n - x_n = \int_0^h S(t)Ax_ndt. \tag{1.15}$$

Para os valores de t tais que $0 \leq t \leq h$, temos da proposição 1 que existe $M > 0$ tal que

$$\|S(t)Ax_n - S(t)y\| \leq \|S(t)\| \, \|Ax_n - y\| \leq M \, \|Ax_n - y\|.$$

Como $Ax_n \to y$ quando $n \to \infty$, concluimos que $S(t)Ax_n \to S(t)y$ uniformemente em $[0, h]$. Assim, passando limite quando $n \to \infty$ em (1.15), segue que

$$S(h)x - x = \int_0^h S(t)ydt.$$

Da proposição 3, obtemos

$$\frac{S(h)x - x}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h S(t)ydt \to y$$

quando $h \to 0$, o que prova que $\lim_{h \to 0} \frac{S(h) - I}{h} x$ existe. Assim, $x \in D(A)$ e $Ax = y$. Portanto, A é um operador fechado. □

1.2.1 Caracterização dos Geradores de Semigrupos de Classe C_0

Nesta subseção, apresentamos os teoremas de Hille-Yosida e Lumer-Phillips, os quais caracterizam geradores de semigrupos de classe C_0. O teorema de Lumer-Phillips é estudado aqui para o caso específico dos semigrupos lineares de contrações de classe C_0.

Definição 7. *Seja A um operador linear em X, sendo X um espaço de Banach. O conjunto $\lambda \in \mathbb{C}$, para os quais o operador linear $\lambda I - A$ é inversível e seu inverso é limitado e tem domínio denso em X, é chamado Conjunto Resolvente de A e é representado por $\rho(A)$. O operador linear $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ é dito Resolvente de A.*

Teorema 4 (Hille-Yosida)**.** *Seja X um espaço de Banach. Para que um operador linear A, definido em $D(A) \subset X$ e com valores em X seja gerador de um semigrupo de classe C_0, é necessário e suficiente que*

i. A seja operador fechado com domínio denso em X;

ii. Exista M e w números reais tais que, para cada real $\lambda > w$, se tenha $\lambda \in \rho(A)$ e para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}.$$

Neste caso, o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *satisfaz a condição* $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$, $t \geq 0$.

Este é um importante teorema na teoria de semigrupos, pois ele nos diz quando um operador A é gerador de um semigrupo de classe C_0. Encontramos sua demonstração em [10].

Corolário 2. *Para que o operador* A *seja gerador de um semigrupo de classe* C_0, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *tal que para* $t \geq 0$ *se tenha* $\|S(t)\| \leq e^{wt}$, *é suficiente que* A *seja fechado, com domínio denso e exista um número real* w, *de modo que se* $\lambda > w$, $\lambda \in \rho(A)$ *e* $\|R(\lambda, A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda - w}$.

Demonstração. :

Como $\|R(\lambda, A)^n\| \leq \|R(\lambda, A)\|^n \leq \dfrac{1}{(\lambda - w)^n}$, então o operador A satisfaz as condições do Teorema 4 com $M = 1$. □

Corolário 3. *Para que um operador* A *seja gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe* C_0, *é necessário e suficiente que* A *seja fechado, seu domínio denso em* X, $(0, \infty) \subset \rho(A)$ *e para todo* $\lambda > 0$, $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1$.

Este corolário caracteriza gerador de semigrupos de contrações de classe C_0 e sua demonstração é um caso particular do corolário anterior, tomando $w = 0$.

Nota 2. *Para facilitar a linguagem, usaremos a expressão* $A \in G(M, w)$ *para indicar que* A *é gerador de um semigrupo de operadores lineares limitados de classe* C_0, *ao qual chamaremos de* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, *que satisfaz a condição* $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$, $t \geq 0$.

Uma outra caracterização dos geradores de semigrupos de contrações lineares de classe C_0 é devida a Lumer e Phillips, cujo o enunciado segue abaixo.

Seja X um espaço de Banach e X' o dual de X. Para cada $x \in X$, define-se o conjunto dualidade $J(x) \subseteq X'$ por

$$J(x) = \{x' \in X' |\, (x, x') = \|x\|^2 = \|x'\|^2\}.$$

Pelo teorema de Hahn-Banach (Brezis [5], pg. 03), $J(x) \neq \phi$, $\forall x \in X$.

Uma aplicação **dualidade** é uma aplicação $j : X \to X'$ em que $j(x) \in J(x), \forall x \in X$. Da definição de j resulta que $\|j(x)\| = \|x\|$.

Definição 8. *Um operador linear* $A : D(A) \subset X \to X$ *é* **dissipativo** *relativamente a uma aplicação dualidade* j*, se*

$$\mathbb{R}e\,(Ax, j(x)) \leq 0, \quad \forall x \in D(A). \tag{1.16}$$

Teorema 5 (Lumer-Phillips)**.** *Seja* X *um espaço de Banach e* $A : D(A) \subset X \to X$ *um operador linear. Se* $A \in G(1,0)$*, então*

(i) A *é dissipativo relativamente a qualquer aplicação dualidade;*

(ii) $R(\lambda - A) = X$, $\forall \lambda > 0$.

Reciprocamente, se

(iii) $D(A)$ *é denso em* X*;*

(iv) A *é dissipativo relativamente a alguma aplicação dualidade;*

(v) $R(\lambda_0 - A) = X$ *para algum* $\lambda_0 > 0$ *então* $A \in G(1,0)$.

O teorema de Lumer-Phillips estabelece quais são as condições para que um operador seja gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações. Este resultado será de grande importância na prova da existência e unicidade se soluções do problema (3.1)-(3.2). Sua prova pode ser encontrada em [10] ou [24].

Capítulo 2

A Equação da Onda em $\mathbb{R}^n$

Neste capítulo, estudamos a existência e unicidade de soluções para o seguinte problema de Cauchy associado com a equação da onda em $\mathbb{R}^n$ com um termo dissipativo

$$u_{tt} - \triangle u + u_t = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1., \tag{2.2}$$

sendo que

$$u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n) \quad e \quad u_1 \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n).$$

Nosso objetivo é, após estudar o problema linear, resolver o problema semilinear associado que aparece em (3.1)-(3.2). Uma vez resolvido o problema de existência e unicidade para o problema linear, pode-se usar o método do ponto fixo para se obter existência de solução para o problema semilinear.

2.1 Resultados e Definições Preliminares

Nesta seção, consideramos H como sendo um espaço de Hilbert real. Aqui apresentaremos alguns resultados e definições necessárias nas próximas seções.

Definição 9. *Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear não limitado. Diz-se que A é* **monótono** *se*

$$(Av, v) \geq 0, \quad \forall v \in D(A).$$

Assim, devido ao teorema da representação de Riesz, a definição de A operador monótono equivale à definição de $-A$ dissipativo (definição 8). Então, o problema de Cauchy dado por

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au, \quad t > 0 \\ u(0) = u_0, \quad u_0 \in D(A) \end{cases} \tag{2.3}$$

pode ser estudado a partir de agora, substituindo-se A por $-A$.

Ou seja, será considerado o seguinte problema de valor inicial para um operador monótono A

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0, \quad u_0 \in D(A). \end{cases} \tag{2.4}$$

Definição 10. *O operador A é dito* **maximal monótono** *se A é monótono e ainda $R(I + A) = H$. Isto é, $\forall f \in H, \exists u \in D(A)$ tal que $(I + A)u = f$.*

Proposição 5. *Seja A um operador maximal monótono e H um espaço de Hilbert. Então,*

(a) $D(A)$ é denso em H;

(b) A é um operador fechado.

Demonstração. (a) Vamos usar um corolário do teorema de Hahn-Banach (Brezis [5], pg. 07) para mostrar que $D(A)$ é denso em H. Para isso, vamos tomar $f \in H$ em que $(f, v) = 0$, $\forall v \in D(A)$. Como A é maximal monótono, $\exists v_0 \in D(A)$ tal que $v_0 + Av_0 = f$.

Assim,

$$0 = (f, v_0) = (v_0 + Av_0, v_0) = \|v_0\|^2 + (Av_0, v_0) \geq \|v_0\|^2$$

pois A é operador monótono. Logo, $v_0 = 0$, o que implica $f = 0$.

Pelo corolário do teorema de Hahn-Banach, $D(A)$ é denso em H.

(b) Para provar essa condição, faremos o seguinte: **Afirmação:** para todo $f \in H$, existe **único** $u \in D(A)$ tal que $u + Au = f$. A existência é conseqüência do fato que A é maximal monótono.

Agora, considerando $\overline{u}$ outra solução de $u + Au = f$, obtemos que

$$(u - \overline{u}) + A(u - \overline{u}) = 0.$$

Conseqüentemente,

$$A(u - \overline{u}) = -(u - \overline{u}).$$

Como A é operador monótono, segue que

$$(A(u - \overline{u}), u - \overline{u}) = (-(u - \overline{u}), (u - \overline{u})) = -\|u - \overline{u}\|^2 \geq 0.$$

Isso implica que

$$\|u - \overline{u}\|^2 = 0.$$

Assim, $u = \overline{u}$. Isto prova a afirmação. Portanto, $I + A$ é bijetivo, ou seja, existe $(I + A)^{-1}$.

Mostraremos que $(I + A)^{-1}$ é contínuo (limitado).

De fato, como A é monótono, tem-se que

$$(u + Au, u) = (u, u) + (Au, u) \geq \|u\|^2, \quad \forall u \in D(A).$$

Isto é,

$$((I + A)u, u) \geq \|u\|^2, \quad \forall u \in D(A).$$

Do fato que $I + A$ é bijetivo segue que

$$\big(v, (I + A)^{-1}v\big) \geq \left\|(I + A)^{-1}v\right\|^2, \quad \forall v \in H.$$

A partir da desigualdade de Schwarz, conclui-se que

$$\left\|(I + A)^{-1}v\right\| \leq \|v\|, \forall v \in H.$$

Isso mostra que $(I + A)^{-1}$ é operador limitado (contínuo).

Provaremos agora que A é um operador fechado. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seqüência no domínio de A tal que $u_n \to u$ e $Au_n \to f$. Vamos mostrar que $u \in D(A)$ e $Au = f$. Claro que

$$u_n + Au_n \to u + f.$$

Agora, sendo $(I + A)u_n = u_n + Au_n$, como $(I + A)^{-1}$ é contínuo, temos

$$u_n = (I + A)^{-1}(u_n + Au_n) \to (I + A)^{-1}(u + f).$$

Conseqüentemente, $u = (I + A)^{-1}(u + f)$, o que implica que $u \in D(A)$ e $u + Au = u + f$. Assim, provamos que $u \in D(A)$ e $Au = f$. Logo, A é operador fechado. □

Consideramos agora o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(u(t)), \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

em que A gera um semigrupo de classe C_0, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sobre X, $f : \mathbb{R}^+ \to X$ é uma função contínua, X é um espaço de Banach e $u_0 \in X$. Definimos agora o que é uma solução forte de (2.5).

Definição 11. *Dizemos que uma função $u : \mathbb{R}^+ \to X$ é uma Solução Forte do problema de valor inicial (2.5), se u for contínua para todo $t \geq 0$ e continuamente diferenciável para $t > 0$. Além disso, para todo $t > 0$, $u(t) \in D(A)$ e satisfaz (2.5).*

Observação 4. *Seja $u = u(t)$ com $t > 0$ uma solução forte de (2.5) e $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ o semigrupo de classe C_0 gerado por A. A função $g(s) = S(t - s)u(s)$ é diferenciável para $0 \leq s \leq t$ e por (2.5), tem-se*

$$\begin{aligned} \frac{dg(s)}{ds} &= AS(t - s)u(s) + S(t - s)\frac{du(s)}{ds} \\ &= AS(t - s)u(s) + S(t - s)\left(-Au(s) + f(u(s))\right) \\ &= AS(t - s)u(s) - AS(t - s)u(s) + S(t - s)f(u(s)) \\ &= S(t - s)f(u(s)). \end{aligned}$$

Como f é uma função contínua, podemos integrar de 0 a t. Assim,

$$\int_0^t \frac{dg(s)}{ds} ds = \int_0^t S(t - s)f(u(s))ds.$$

Agora, usando a definição de $g(s)$, concluimos que

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t - s)f(u(s))ds. \tag{2.6}$$

Essa é uma condição necessária para que u seja solução forte do problema de valor inicial (2.5). Se $u = u(t)$ é apenas uma função contínua que satisfaz (2.6) então diz que u é uma solução fraca (ou generalizada) de (2.5).

2.2 Existência e Unicidade do Problema Linear

Finalmente mostramos a existência e unicidade do problema (2.1) – (2.2). Para isso, utilizaremos os resultados apresentados até então sobre semigrupos.

2.2.1 Existência

Para estudarmos a existência é necessária a proposição abaixo:

Proposição 6. *Sejam $A \in G(1,0)$ e $B \in B(X)$. Então $A + B \in G(1, \|B\|)$.*

Essa proposição fala sobre perturbações de um operador linear A por um operador linear B, isto é bem conhecido e por esse motivo não apresentaremos, aqui, sua demonstração. Essa prova pode, por exemplo, ser encontrada em (**[26], pg 87**). Outros resultados da teoria de perturbações de operadores podem ser também vistas em (**Yosida, [29]**).

Se $v = u_t$ em (2.1)(2.2), obtemos que

$$\begin{cases} u_t - v &= 0 \quad em \quad \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \\ v_t - \triangle u + v &= 0 \quad em \quad \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.7}$$

Agora, denotando

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\triangle & I \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

podemos escrever o sistema (2.7) como

$$\frac{d}{dt}U + AU = 0. \tag{2.9}$$

O operador A em (2.8) é definido como

$$A : D(A) \subset H \to H, \tag{2.10}$$

com $H = H^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ e $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$.

Mostraremos, aqui, que o operador A gera um semigrupo de classe C_0. Para isso notamos que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\triangle & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\triangle + I & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Assim, podemos escrever $A = A' + B$ com

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\triangle + I & I \end{pmatrix} \; e \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Notamos que $D(A) = D(A')$.

Bastará provar que $A' \in G(1,0)$, $B \in B(H)$ e usar a Proposição 6 para concluir que $A \in G(1, \|B\|)$. Logo, feito isso, o problema (2.9) com dado inicial $U_0 \in D(A)$ terá como solução

$$U(t) = S(t)U_0, \tag{2.13}$$

sendo $S(t)$ o semigrupo de classe C_0 gerado por A..

Para provarmos que $A' \in G(1,0)$, mostraremos que A' é maximal e monótono e a conclusão seguirá do Teorema 5(**Lumer-Philips**).

A' é monotono:

Precisamos definir o seguinte produto interno em $H = H^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{L}^2(R^n)$. Sejam

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \in H$$

então

$$\langle U, V \rangle = (\nabla u_1, \nabla u_2) + (u_1, u_2) + (v_1, v_2),$$

em que os produtos internos do lado direito da igualdade acima, são os produtos internos usuais de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

Temos que para $U \in D(A')$, $\langle A'U, U \rangle \geq 0$.

De fato,

$$\langle A'U, U\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -v \\ -\triangle u + u + v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$= -(\nabla v, \nabla u) - (v,u) + (-\triangle u + u + v, v)$$
$$= -(\nabla v, \nabla u) - (v,u) - (\triangle u, v) + (v,v) + (u,v)$$
$$= -(\nabla v, \nabla u) - (v,u) + (\nabla u, \nabla v) + (v,v) + (u,v) = (v,v) = \|v\|^2 \geq 0.$$

A' é maximal:

Com efeito, provaremos que, dado $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H$, existe $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A')$ tal que

$$(A' + I)\, U = F,$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} -v \\ -\triangle u + v + u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Isso nos leva ao sistema

$$\begin{cases} -v + u &= f \\ -\triangle u + 2v + u &= g. \end{cases}$$

Assim, isolando v na primeira equação e substituindo-o na segunda, vemos que

$$-\triangle u + 3u = g + 2f. \tag{2.14}$$

Portanto, para mostrar que A' é maximal, basta verificar que existe $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ que satisfaça (2.14). Para essa tarefa, usaremos o teorema de **Lax-Milgram**.

Como $H^1 = H^1(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hillbert, definimos

$$\begin{aligned} a(\cdot,\cdot) :& H^1 \times H^1 \to \mathbb{R} \\ & (u,v) \to (\nabla u, \nabla v) + 3(u,v). \end{aligned}$$

É claro que $a(\cdot,\cdot)$ é bilinear. Vemos que $a(\cdot,\cdot)$ é contínua, pois

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= |\,(\nabla u, \nabla v) + 3(u,v)| \\
&\leq |\,(\nabla u, \nabla v)\,| + 3|(u,v)| \\
&\leq \|\nabla u\|\|\nabla v\| + 3\|u\|\|v\| \\
&\leq 4\|u\|_H\|v\|_{H^1}, \ \ \forall u, v \in H^1.
\end{aligned}$$

Mostramos agora que $a(\cdot,\cdot)$ é coerciva. De fato,

$$a(u,u) = (\nabla u, \nabla u) + 3(u,u) = \|\nabla u\|^2 + 3\|u\|^2 \geq \|\nabla u\|^2 + \|u\|^2 = \|u\|^2_{H^1}, \ \ \forall u \in H^1.$$

Definimos ainda o funcional

$$\begin{aligned}
L : &H^1 \to R \\
&v \to (g + 2f, v).
\end{aligned}$$

Verifica-se facílmente que L é um funcional linear. Constatamos também que L é contínuo.

Efetivamente,

$$|L(v)| = |(g+2f, v)| \leq \|g+2f\|\|v\| \leq \|g+2f\|\|v\|_{H^1}, \ \ \forall v \in H^1.$$

Logo, pelo Teorema 1 (Lax-Milgram), existe único $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$a(u,v) = L(v) = (g+2f, v),$$

para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Isto é,

$$(\nabla u, \nabla v) + 3(u,v) = (g+2f, v), \quad \forall v \in H^1_0(\mathbb{R}^n).$$

Em partícular, temos

$$(\nabla u, \nabla\theta) + 3(u,\theta) = (g+2f,\theta), \quad \forall\theta \in D(\mathbb{R}^n)$$

sendo $D(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções testes.

Isso mostra que

$-\Delta u + 3u = g + 2f$

no sentido de $D'(\mathbb{R}^n)$.

Também para $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$, aplicando o teorema da Regularidade Elíptica para o operador elíptico $3I - \Delta$ sobre $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$, resulta que $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Mas, como $u, f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, vemos que $v = u - f \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Portanto existe um único

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A') = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$$

tal que

$$(A' + I)\,U = F.$$

Assim, concluimos que A' é maximal e monótono. Logo, segue do Teorema de **Lumer-Phillips** que $A' \in G(1,0)$. Portanto A' gera um semi-grupo de classe C^0.

Motremos agora que $B \in B(H)$.Temos que

$$\begin{aligned}
\|B(U)\|_H &= \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_H \\
&= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -u \end{pmatrix} \right\|_H = \|u\|_{\mathbb{L}^2} \\
&\leq \|u\|_{H^1} \leq \|u\|_{H^1} + \|v\|_{\mathbb{L}^2} \\
&= \|U\|_H.
\end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 6, $A = A' + B$ é gerador de um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C^0. Agora , para $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in D(A)$ temos que $U(t) = S(t)U_0$ é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + AU = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{2.15}$$

De fato, da Proposição 3 se deduz que

a) $U(t) = S(t)U_0 \in D(-A) = D(A)$;

b) $\dfrac{dU(t)}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(S(t)U_0\right) = -AS(t)U_0 = -AU(t), t \geq 0;$

c) $U(0) = S(0)U_0 = U_0$, pois $S(0) = I$.

De b) e c) resulta que a função U é diferenciável em $t \geq 0$ e satisfaz o problema de valor inicial (2.15).

Uma vez que para $U_0 \in D(A)$, obtemos da Proposição 3 que $U(t) = S(t)U_0 \in D(A)$ e do fato que $S(t)$ é contínua resulta que, $U \in C\left([0,\infty); D(A)\right)$. Também segue da proposição 3 que

$U'(t) = -AU(t) = -AS(t)U_0 = -S(t)AU_0 \in H.$

Como $S(t)AU_0$ é função contínua, concluimos que

$$U \in C^1\left([0,\infty); H\right).$$

Logo, $U \in C^1\left([0,\infty); H\right) \cap C\left([0,\infty); D(A)\right)$ dado que $U(t) = S(t)U_0$ é a solução é de (2.15) se $U_0 \in D(A)$. Isto é:

$$U \in C^1\left([0,\infty); H\right) \cap C\left([0,\infty); D(A)\right). \tag{2.16}$$

Interpretemos (2.16). Do fato que $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ é solução de (2.15) se obtem em particular que $v = u_t$.

Assim

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in C^1\left([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)\right) \cap C\left([0,\infty); H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)\right).$$

Isso prova que

$u \in C^1\left([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^n)\right);$

$u_t \in C^1\left([0,\infty); \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)\right)$, ou seja, $u \in C^2\left([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^n)\right);$

$u \in C\left([0,\infty); H^2(\mathbb{R}^n)\right);$

$u_t \in C\left([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^n)\right)$, ou seja, $u \in C^1\left([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^n)\right).$

Concluimos então disso para $(u_0, u_1) \in H^2 \times H^1$, a solução de (2.1)-(2.2) satisfaz

$$u \in C\left([0,\infty); H^2(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^1\left([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^2\left([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^n)\right). \tag{2.17}$$

Além disso, a Proposição 3 implica que, se $(u_0, u_1) \in H^1 \times \mathbb{L}^2$, o problema (2.1)-(2.2) possui uma solução fraca na classe

$$u \in C([0,\infty), \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)) \cap C([0,\infty), H^1(\mathbb{R}^n)).$$

2.2.2 Unicidade:

Provamos a unicidade utilizando a proposição dada abaixo.

Proposição 7. *Sejam $\{S_1(t)\}_{t\geq 0}$ e $\{S_2(t)\}_{t\geq 0}$ semigrupos de classe C_0 que possuem o mesmo gerador infinitesimal A. Então $\{S_1(t)\}_{t\geq 0} = \{S_2(t)\}_{t\geq 0}$.*

Demonstração. :

Definamos a função $W(s) = S_1(s)S_2(t-s)$. Sabemos da Proposição 3 que

$$\begin{aligned} W'(s) &= AS_1(s)S_2(t-s) + S_1(s)(-AS_2(t-s)) \\ &= AS_1(s)S_2(t-s) - AS_1(s)S_2(t-s) = 0. \end{aligned}$$

Logo $W(s)$ é uma função constante em s. Mas,

$$W(0) = S_2(t)$$

e

$$W(t) = S_1(t).$$

Portanto, $S_1(t) = S_2(t)$. □

Suponhamos agora que $V = V(t)$ seja outra solução do problema de valor inicial (2.15). Então devemos ter

$$\frac{d}{dt}V(t) = AV(t) \quad e \quad V(0) = U(0).$$

Logo nossa solução é da forma

$$V(t) = T(t)U_0,$$

sendo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo gerado por A. Portanto segue da Proposição 7 que $\{S(t)\}_{t\geq 0} = T(t)_{t\geq 0}$, ou seja, U=V.

Consequentemente concluimos que existe uma única função $u = u(x,t)$ que satisfaz o problema de valor inicial (2.1)-(2.2).

Além disso, para dados iniciais $(u_o, u_1) \in H^2 \times H^1$ a solução do problema linear, está na classe

$$u \in C\left([0,\infty); H^2(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^1\left([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^2\left([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^n)\right).$$

2.3 Problema Semilinear - Existência Local e Unicidade

Nesta seção, mostraremos a existência e unicidade da solução local, usando o método do ponto fixo, para a equação semilinear associada com o problema linear (2.1)–(2.2). A existência global será apresentada no próximo capítulo.

O problema semilinear associado com (2.1)–(2.2) é:

$$u_{tt} - \triangle u + u_t = |u|^p, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \tag{2.18}$$

$$u_{|t=0} = u_0, \qquad u_{t|t=0} = u_1. \tag{2.19}$$

Aqui p satisfaz $1 < p < \frac{n}{n-2}$ se $n \geq 3$, $1 < p < \infty$ se $n = 1, 2$. Da mesma maneira que na seção anterior, tomando $v = u_t$, podemos reescrever o problema de valor inicial (2.18)-(2.19) na forma

$$\begin{cases} \dfrac{dU(t)}{dt} + A'U \ = F(U), & U \in D(A') = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n) \subset H = H^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n). \\ U(0) = U_0 & U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{2.20}$$

em que A' é o operador dado em (2.12) e

$$
\begin{aligned}
F :& H \to H \\
& U \to F(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ |u|^p + u \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

para $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H.$

Aqui, $H = H^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$, como na seção anterior.

Mostramos agora que F está bem definida para o expoente $\mathbf{p}$ com $1 < \mathbf{p} \leq \dfrac{n}{n-2}$.

De fato, seja $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H$. Devemos mostrar que $|u|^p + u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

Temos que $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, assim para provar que $|u|^p \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Consideremos dois casos:

Caso 1 $n > 2$:

Sabemos da teoria dos Espaços de Sobolev que

$$
H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n) \tag{2.21}
$$

se $2 \leq p \leq \dfrac{2n}{n-2}$.

Agora para $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e usando a imersão (2.21), observamos que para $1 \leq p \leq \dfrac{n}{n-2}$ vale

$$
\|u^p\|^2_{\mathbb{L}^2} = \int |u|^{2p} dx = \|u\|^{2p}_{\mathbb{L}^{2p}} \leq C\|u\|^{2p}_{\mathbb{H}^1} < +\infty
$$

Portanto, podemos concluir que $|u|^p \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

Caso 2 n=1,2:

Para este último caso, observamos que, se $n = 1$ então a teoria de Sobolev diz que (Kensavan[18], Brezis[5])

$$
H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \forall p \geq 1. \tag{2.22}
$$

Agora, se $n = 2$ tem-se que

$$H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow\subset \mathbb{L}^q(\mathbb{R}^n) \quad \forall p \geq 2. \tag{2.23}$$

Logo, basta proceder, de modo análogo, como no caso 1 e teremos $|u|^p \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Conclusão:

$$u \in H^1 \rightarrow |u|^p \in \mathbb{L}^2.$$

Portanto, concluimos, observando o fato óbvio que $0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, que F aplica H em H, com $H = H^2 \times \mathbb{L}^2$.

Para mostrar que o problema de valor inicial (2.20) possui uma única solução local, precisaremos de alguns resultados que apresentaremos abaixo.

2.3.1 Problema Semilinear Abstrato

Consideraremos o seguinte problema abstrato de valor inicial: (2.24)

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = F(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.24}$$

em um espaço normado X, em que F é uma aplicação de X em X, $u_0 \in X$ um valor inicialdado dado e A é u o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações.

Vamos apresentar agora dois teoremas que discutem a existência e unicidade de soluções para o problema (2.24). O primeiro diz que se F é globalmente Lipschitz contínua, o problema (2.24) possui solução(Fraca) definida para $t \geq 0$. Já o segundo teorema garante, caso F seja Lipschitz contínua sobre conjuntos limitados, que (2.24) possui única solução em um intervalo da forma $[0, T_m]$, com $T_m > 0$ convenientemente. Esses teoremas aparecem na Dissertação de Mestrado Menoncini[22].

Teorema 6 (Ponto Fixo de Banach). *Seja (X, d) espaço métrico completo e $P : X \rightarrow X$ uma aplicação tal que*

$$d(P(u), P(v)) \leq kd(u, v)\ , \qquad \forall u, v \in X,$$

para algum k fixado tal que $0 < k < 1$.

Então P tem único ponto fixo, isto é, existe único $u \in X$ tal que $Pu = u$.

Este teorema de ponto fixo é bem conhecido e por isso sua demonstração aqui não se faz necessária.

Proposição 8 (Desigualdade de Gronwall). *Sejam $g(t) \geq 0$ e $h(t) \geq 0$ funções reais tais que*

$$g(t) \leq C + \int_0^t g(s)h(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.25}$$

com $C \geq 0$ uma constante e $h(t)$ satisfaz $\displaystyle\int_0^T h(t)dt < \infty$.

Então,

$$g(t) \leq Cexp\left[\int_0^T h(t)dt\right], \quad 0 \leq t \leq T.$$

Observação 5. *Para a desigualdade de Gronwall devemos tomar g, h tais que*

$$\int_0^t g(s)h(s)ds < \infty.$$

Demonstração. Consideramos a função real

$$\phi(t) = C + \int_0^t g(s)h(s)ds, \text{ com } t \in [0,T].$$

Então, usando (2.25) temos

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = g(t)h(t) \leq \phi(t)h(t),$$

ou seja,

$$\frac{d\phi(t)}{dt} - \phi(t)h(t) \leq 0, \quad t \in [0,T].$$

Notando que

$$exp\left[-\int_0^t h(s)ds\right]\left(\frac{d\phi(t)}{dt} - \phi(t)h(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\phi(t)exp\left[-\int_0^t h(s)ds\right]\right) \leq 0$$

e integrando essa desigualdade de 0 até t, obtemos

$$\int_0^t \frac{d}{dr}\left(\phi(r)exp\left[-\int_0^r h(s)ds\right]\right)dr = \phi(t)exp\left[-\int_0^t h(s)ds\right] - \phi(0) \leq 0.$$

Logo,

$$\phi(t)exp\left[-\int_0^t h(s)ds\right] \leq \phi(0) = C$$

e portanto

$$\phi(t) \leq Cexp\left[\int_0^t h(s)ds\right] \leq Cexp\left[\int_0^T h(t)dt\right], \quad t \in [0,T].$$

□

Definição 12. *Seja* (X,d) *um espaço métrico. Uma aplicação* $F : X \to X$ *é dita globalmente Lipschitz contínua se existe uma constante positiva* L *tal que*

$$d(F(v), F(u)) \leq Ld(v,u), \quad \forall u, v \in X.$$

Teorema 7. *Seja um* X *espaço de Banach. Seja* A *gerador de um semigrupo de contrações. Seja* F *globalmente Lipschitz contínua sobre* X *e seja* $u_0 \in X$*. Então, existe uma única solução global fraca* $u = u(t)$ *de (2.24) no sentido que* $u \in C([0,\infty), X)$ *e*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds, \tag{2.26}$$

para todo $t \geq 0$*, sendo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *o semigrupo de constrações gerado pelo operador* A*.*

Além disso, existe a dependência contínua de u *em relação a* u_0*, isto é,* $\|v(t) - u(t)\| \leq e^{Lt}\|v_0 - u_0\|$ *para todo* $t \geq 0$*, com* v *a solução da equação (2.26) com*

valor inicial v_0*.*

Demonstração. Provaremos primeiro a unicidade de soluções. Sejam u e v soluções de (2.26). Como F é globalmente Lipschitz e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contrações, vemos que

$$\|u(t) - v(t)\| \leq L\int_0^t \|u(s) - v(s)\| ds.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall com $C = 0$, $h(t) = L$ e $g(t) = \|u(t) - v(t)\|$, concluimos que $u = v$.

Para provarmos a existência de soluções, consideramos o espaço

$$E = \{u \in C\left([0,\infty), X\right); \sup_{t\geq 0} e^{-kt} \left\| u(t) \right\| < \infty\},$$

com $k > 0$ constante a ser escolhida convenientemente.

Pode-se provar de uma maneira standard que o espaço E com a norma

$$\left\| u \right\|_E = \sup_{t\geq 0} e^{-kt} \left\| u(t) \right\|$$

é um espaço de Banach.

Agora definimos a aplicação $\phi : E \to C\left([0,\infty), X\right)$ dada por

$$\phi(u)(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds, \quad u \in E \quad e \quad t \geq 0.$$

Sendo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ semigrupo de contrações, facilmente vê-se que $\phi(u) \in C\left([0,\infty), X\right)$, para todo $u \in E$. Assim, ϕ está bem definida. Mostraremos que $\phi(u) \in E$, para cada $u \in E$.

De fato, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é semigrupo de contrações, conseqüentemente

$$\left\| \phi(u)(t) \right\| \leq \left\| u_0 \right\| + \int_0^t \left\| F(u(s)) \right\| ds.$$

Uma vez que F é Lipschitz contínua com constante $L > 0$,

$$\left\| F(u(s)) \right\| \leq L \left\| u(s) \right\| + \left\| F(0) \right\|.$$

Portanto,

$$\left\| \phi(u)(t) \right\| \leq \left\| u_0 \right\| + t \left\| F(0) \right\| + L \left\| u \right\|_E \int_0^t e^{ks} ds = \left\| u_0 \right\| + t \left\| F(0) \right\| + L \frac{e^{kt} - 1}{k} \left\| u \right\|_E.$$

Assim, para $u \in E$ resulta que $\phi(u) \in E$ e

$$\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|\phi(u)\| \, \|\phi(u)\|_E \leq \|u_0\| + \frac{1}{ke}\,\|F(0)\| + \frac{L}{k}\,\|u\|_E\,,$$

pois $te^{-kt} \leq \dfrac{1}{ke}$, $\forall t \geq 0$.

Agora vamos mostrar que ϕ é contração sobre E se $k > L$.

Da definição de ϕ, do fato que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é semigrupo de contrações e F é Lipschitz, temos

$$\begin{aligned} \|\phi(u)(t) - \phi(v)(t)\| &\leq L\int_0^t \|u(s) - v(s)\|\, ds \\ &\leq L\,\|u - v\|_E \int_0^t e^{ks} ds = L\frac{e^{kt} - 1}{k}\,\|u - v\|_E \\ &\leq \frac{Le^{kt}}{k}\,\|u - v\|_E, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\phi(u) - \phi(v)\|_E \leq \frac{L}{k}\,\|u - v\|_E\,.$$

Assim, escolhendo algum $k > L$, pelo teorema do ponto fixo de Banach, existe única função $u \in E$ tal que $\phi(u) = u$. Conseqüentemente, u é solução da equação integral (2.26) e $u \in C\left([0, \infty), X\right)$. Isto é, u é solução fraca do problema (2.24).

Para finalizar a prova, mostraremos agora a dependência contínua. Sejam u e v soluções de (2.26) associadas aos valores iniciais u_0 e v_0 respectivamente. Então obtemos

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u_0 - v_0\| + L\int_0^t \|u(s) - v(s)\|\, ds.$$

Da desigualdade de Gronwall, verificamos que

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u_0 - v_0\|\, e^{Lt},$$

o que conclui a prova do teorema. □

Definição 13. *Seja X espaço normado. Uma aplicação $F : X \to X$ é dita Lipschitz contínua sobre conjuntos limitados se, para cada constante positiva M, existir uma constante positiva L_M de modo que*

$$\|F(v) - F(u)\| \leq L_M \|v - u\|$$

para todo $u, v \in X$ tal que $\|u\| \leq M$ e $\|v\| \leq M$.

Para a aplicação F definida acima, isto é, F uma aplicação Lipschitz contínua sobre conjuntos limitados, é válido o resultado abaixo.

Teorema 8. *Para cada $u_0 \in X$, existe $0 < T < \infty$ e uma única solução fraca u de (2.24) definida em $[0, T]$. Isto é, $u \in C([0, T], X)$ e (2.26) é válida para todo $t \in [0, T]$.*

Demonstração. :

Seja $E = C([0, T], X)$ com a norma usual e $T > 0$ a ser escolhido convenientemente. Vamos definir o conjunto

$$K = \{u \in E; \|u(t)\| \leq \|u_0\| + 1 \text{ para todo } t \in [0, T]\}.$$

Assim, K é um subconjunto fechado do espaço de Banach E. Agora, para $u \in K$, podemos facilmente concluir que $\phi(u) \in E$ sendo $\phi(u)$ dada por

$$\phi(u)(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds, \quad t \in [0, T]$$

com $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ o semigrupo de contrações gerado pelo operador A dado no problema (2.24).

Também da definição 13 temos que

$$\|\phi(v) - \phi(u)\|_E \leq LT \|v - u\|_E, \tag{2.27}$$

para todo $u, v \in K$, em que $L = L_M$ com $M = \|u_0\| + 1$. De fato, sendo $u, v \in K$, segue que

$$\|\phi(v) - \phi(u)\|_E = \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds - \int_0^t S(t-s)F(v(s))ds \right\|$$

$$\leq \sup_{0\leq t\leq T} \int_0^t \|F(u(s)) - F(v(s))\| \, ds$$

$$\leq \sup_{0\leq t\leq T} \int_0^t L_M \|u(s) - v(s)\| \, ds$$

$$\leq \int_0^T L_M \|u(s) - v(s)\| \, ds \leq TL_M \|u - v\|_E,$$ aqui usamos o fato que F é localmente Lipschitz com $M = \|u_0\| + 1$. Também usamos que $\|u\|_E = \sup_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_X$.

Provaremos que $\phi(K) \subseteq K$ se $T\Big(\|F(0)\| + L\left(\|u_0\| + 1\right) \Big) \leq 1$.Com efeito,

$$\|\phi(u)(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|F(u(s))\| \, ds, \quad t \in [0, T].$$

Usando o fato de que se $u \in K$, a desigualdade abaixo é válida

$$\|F(u(s)) - F(0)\| \leq L \|u(s)\| \leq L\left(\|u_0\| + 1\right),$$

para $s \in [0, T]$, $L = L_M$ e $M = \|u_0\| + 1$.

Então obtemos

$$\|\phi(u)(t)\| \leq \|u_0\| + T\Big(\|F(0)\| + L\left(\|u_0\| + 1\right) \Big), \quad t \in [0, T].$$

Assim, tomando T suficientemente pequeno tal que

$$T\Big(\|F(0)\| + L\left(\|u_0\| + 1\right) \Big) < 1 \tag{2.28}$$

constatamos que $\phi(u) \in K$. Assim, com a condição (2.28) sobre T, ϕ atua de K em K. A condição (2.28) sobre T implica que $TL < 1$. Então a estimativa (2.27) diz que $\phi : K \to K$ é contração.

Portanto, ϕ tem um único ponto fixo $u \in K$. Esse u é uma solução local fraca do problema (2.24).

A unicidade de u segue da definição 13 e da desigualdade de Gronwall, como na demonstração do Teorema 7. Logo o Teorema 8 está demonstrado. □

2.3.2 Existência Local e Unicidade

Mostraremos agora a existência e unicidade local de solução do problema (2.18)– (2.19).

Observação 6. *Seja* $F(s) = |s|^p + s$, $s \in \mathbb{R}$. *Então*

$$F(s) - F(r) = |s|^p - |r|^p + s - r.$$

Agora, se $g(s) = |s|^p$ *então* $g'(s) = p|s|^{p-2}s$. *Portanto, pelo* **Teorema do Valor Médio**

$$g(s) - g(r) = p|\xi|^{p-2}\xi(|s| - |r|)$$

para algum ξ *entre* r *e* s. *Assim*

$$|g(s) - g(r)| \leq p|\xi|^{p-1}(|s - r|) \leq p(|s| + |r|)^{p-1}|s - r| \leq C_p(|s|^{p-1} + |r|^{p-1})|r - s|,$$

com C_p *uma constante positiva que depende de* p. *Logo,*

$$|F(s) - F(r)| \leq \left[C_p(|s|^{p-1} + |r|^{p-1}) + 1\right] |r - s|.$$

Agora sejam

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \in H.$$

Então, pela Observação 6 temos

$$\begin{aligned} \|F(U) - F(V)\|_H &= \||u_1|^p + u_1 - |u_2|^p - u_2\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \| \left[C(|u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1}) + 1\right] (u_1 - u_2)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

sendo $C > 0$ uma constante. Assim, para $U, V \in B(0, R)$, temos que

$$\begin{aligned} \|F(U) - F(V)\|_H &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} (|u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1})^2 |u_1 - u_2|^2 dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} (|u_1|^{2(p-1)} + |u_2|^{2(p-1)})|u_1 - u_2|^2 dx \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} (|u_1|^{2(p-1)} + |u_2|^{2(p-1)})^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |u_1 - u_2|^{2p} dx\right]^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

com a ultima desigualdade devido a desigualdade de Hölder e o fato que $p > 1$.

Logo,

$$\|F(U) - F(V)\|_H^2 \leq C \left[\int_{\mathbb{R}^n} (|u_1|^{2p} + |u_2|^{2p}) dx\right]^{\frac{p-1}{p}} \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{L}^{2p}}^2. \tag{2.29}$$

Usando (2.29) e as imersões de Sobolev (2.22),(2.22) e (2.23) resulta

$$\|F(U) - F(V)\|_H^2 \leq C \left[\|u_1\|_{H^1}^{2p} + \|u_2\|_{H^1}^{2p}\right]^{\frac{p-1}{p}} \|u_1 - u_2\|_{H^1}^2. \tag{2.30}$$

Assim, se $\|U\|_H$, $\|V\|_H \leq R$ tem-se de (2.30)

$$\|F(U) - F(V)\|_H^2 \leq C \left[2R^{2p}\right]^{\frac{p-1}{p}} \|U - V\|_H^2 \tag{2.31}$$

e concluimos que

$$\|F(U) - F(V)\|_H \leq L_R \|U - V\|_H$$

com $L_R = C^{\frac{1}{2}} \left[2R^{2p}\right]^{\frac{p-1}{2p}}$.

Potanto, F é localmente Lipschtz contínua sobre conjuntos limitados com $M = R$. Como H pode ser visto como um espaço métrico com a métrica induzida pela sua norma, e na seção anterior provamos que $A \in G(1, 0)$, estamos nas hipóteses do Teorema 8. Assim, para algum $T > 0$ apropriado, existe uma única função

$$U = U(t) \in C([0, T), H = H^1 \times \mathbb{L}^2), \tag{2.32}$$

solução fraca de (2.20) com dado inicial $U_0 \in H$.

Interpretamos (2.32). Lembrando que se pode escrever $U = (u, v)$ segue que u e v, as componentes de U, satisfazem $v = \dfrac{\partial u}{\partial t} = u_t$ devido que U é solução de (2.20).

Assim, (2.32) diz que

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in C\left([0, T); H^1 \times \mathbb{L}^2\right).$$

Isto mostra que

$u \in C\left([0, T); H^1\right)$;

$u_t \in C\left([0, T); \mathbb{L}^2\right)$, ou seja, $u \in C^1\left([0, T); \mathbb{L}^2\right)$.

Logo, concluimos que

$$u \in C\left([0, T); H^1\right) \cap C^1\left([0, T); \mathbb{L}^2\right) \tag{2.33}$$

é solução loca fraca de (2.18)-(2.19) com dados iniciais $(u_0, u_1) \in H^1 \times L^2$.

Constatamos, pois, que o problema de valor inicial (2.18)-(2.19) possui uma única solução fraca $u = u(x, t)$ com u satisfazendo (2.33). Isto é, existe única função u

solução do problema de valor inicial

$$u_{tt} - \triangle u + u_t = |u|^p, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$$
$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1.$$

com dados iniciais em $H^1 \times L^2$ e p um número real tal que $1 \leq p \leq \dfrac{n}{n-2}$ se $n \geq 3$, e $1 \leq p < \infty$ se $n = 1, 2$.

Ou seja, existe uma única função $u = u(x,t)$ definida, para algum $T > 0$, em $[0,T)$ e que satisfaz (2.33) e é solução do do problema acima.

Capítulo 3

Existência Global e Comportamento Assintótico

Neste capítulo, analisamos o **Problema de Cauchy** associado com a equação semilinear da onda em $\mathbb{R}^n$ sob efeito de uma dissipação friccional, a saber

$$u_{tt} - \triangle u + u_t = |u|^p, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

$$u_{|t=0} = \epsilon u_0, \qquad u_{t|t=0} = \epsilon u_1 \tag{3.2}$$

com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n), \quad u_1 \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n), \tag{3.3}$$

$$suppu_i \subset B(K) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < K\}, \quad i = 0, 1, \tag{3.4}$$

e p um número real tal que

$$1 + \frac{2}{n} < p \leq \frac{n}{n-2}$$

se $n \geq 3$, e

$$1 + \frac{2}{n} < p < \infty$$

se $n = 1, 2$.

O resultado principal que mostramos neste capítulo, está enunciado nos dois teoremas que aparecem na próxima seção. Eles mostram a existência global e o comportamento assintótico, no tempo, da solução do problema (3.1)-(3.2) com dados iniciais pequenos. Em geral, os resultados de existência global e comportamento assintótico para problemas semilineares são obtidos apenas para dados iniciais pequenos ([6], [16],

[15], [14]). O resultado de comportamento assintótico aqui mostrado, resulta de um novo método considerado por Todorova-Yordanov em [26]. Esse método tem se mostrado eficiente e tem sido usado por outros autores como em [15], [14], [16]. Inclusive esse método tem sido efetivo para outras equações como no caso de Charão-Ikehata [6] que o aplicaram para um sistema de ondas elásticas.

Sobre comportamento assintótico de semigrupos, é importante ainda citar o trabalho de Ball[3].

Com respeito a existência de solução local do problema semilinear (3.1)-(3.2) tem-se o seguinte resultado.

Proposição 9. *Suponhamos que os dados iniciais satisfazem (3.3)–(3.4) e que* $p \in [1, \frac{n}{n-2}]$*, se* $n \geq 3$ *e* $p \in [1, \infty)$*, se* $n = 1, 2$*. Então o problema de valor inicial (3.1)–(3.2) possui uma única solução fraca* u *tal que*

$$u \in C\left([0,T); H^1(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^1\left([0,T); L^2(\mathbb{R}^n)\right)$$

e

$$suppu(t, \cdot) \subset B(t + K), \tag{3.5}$$

com $T > 0$ *dependendo da norma* $\|Du(0)\|_{\mathbb{L}^2}$*. Além disso, a solução pode ser estendida continuamente além do intervalo* $[0,T)$ *se* $\sup\limits_{[0,T)} \|Du(t)\|_{\mathbb{L}^2} < \infty$.

A demonstração da existência local já foi feita no final do Capítulo 2. A prova da propriedade de velocidade finita de propagação para a equação semilinear da onda é bem conhecida. O fato que a solução pode ser estendida com base na limitação da norma da energia sobre intervalos limitados de existência segue de resultados análogos para equações diferenciais ordinárias. A existência local para o problema (3.1)–(3.2) não depende de ϵ.

3.1 Resultados Principais

Os principais resultados deste trabalho estão enunciados nos teoremas a seguir.

Teorema 9. *Seja* $1 + \dfrac{2}{n} < p \leq \dfrac{n}{n-2}$, *se* $n \geq 3$, $1 + \frac{2}{n} < p < \infty$, *se* $n = 1, 2$. *Então, existe* $\epsilon_0 > 0$ *tal que o problema (3.1)-(3.2) admite uma única solução global na classe*

$$u \in C(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^n)), \quad u_t \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)),$$

para cada $0 < \epsilon < \epsilon_0$.

Assim, esse é um teorema de existência global para dados iniciais pequenos.

Teorema 10. *Seja p como no Teorema 9. Então o comportamento assintótico da energia local, fora da bola*

$$B(t^{\frac{1}{2}+\delta}) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < t^{\frac{1}{2}+\delta}\}, \quad \delta > 0,$$

para a solução global de (3.1)-(3.2), tem decaimento exponencial e é dado por

$$\|Du(t,\cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n \setminus B(t^{\frac{1}{2}+\delta}))} \leq C(e^{-t^{2\delta/4}}), \;\; t > 0, \tag{3.6}$$

Além disso, a energia total decai a uma taxa polinomial, isto é

$$\|Du(t,\cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(t^{-n/4-1/2}), \;\; t > 0, \tag{3.7}$$

com $C > 0$ *dependendo dos dados iniciais e* $\delta > 0$ *um número arbitrário.*

Observação 7. *Aqui* $D = (\frac{\partial}{\partial t}, \nabla_x)$. *Assim,*

$$\|Du\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \int_\Omega [|u_t|^2 + |\nabla u|^2] dx.$$

Observação 8. *Quando o expoente p satisfaz* $1 < p < 1 + \dfrac{2}{n}$, *é possível mostrar que o problema (3.1)-(3.2) não possui solução global. O número* $p_c(n) = 1 + \dfrac{2}{n}$ *é chamado o exponte crítico do problema(3.1)-(3.2), isto é,*

1. *Se* $p > p_c(n)$, *as soluções de (3.1), para os dados iniciais(3.2), são globais*

2. *Se* $1 < p < p_c(n)$, *as soluções de (3.1), para dados iniciais (3.2) positivos, divergem para tempos grandes (Todorova-Yordanov [26]).*

O caso de expoente crítico é também de importância no estudo de problemas semilineares, mas não será tratado aqui. A esse respeito citamos os trabalhos de Fujita [8] e Todorova-Yordanov[26].

A demonstração desses resultados dependem de diversas estimativas que são obtidas no decorrer deste capítulo.

3.2 Novas Identidades de Energia

Mostramos nesta seção novas identidades de energia consideradas por Todorova-Yordanov [26]. Essas identidades são baseadas em um novo tipo de multiplicador associado a uma função relacionada com o comportamento assintótico da solução fundamental para a equação da onda. Importante dizer também que essas identidades produzem estimativas que têm várias aplicações, como por exemplo mostrar que a energia local, fora de uma bola com raio dependendo do tempo, decai exponencialmente.

O multiplicador utilizado é dado por $e^{\varphi(t,x)}u_t$, onde $u = u(x,t)$ é a solução do problema em questão. A função peso $\varphi(t,x)$ é tomada de tal modo que se comporta como $\frac{|x|^2}{4t}$, para $|x|^2/t$ grande. A escolha dessa função peso está relacionada com a solução fundamental $S_2(t,x)$ de $\partial_{tt} - \triangle + \partial_t$, a qual é dada por

$$S_2(t,x) = \begin{cases} C_n e^{-\frac{t}{2}} \left(\square - \frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1} H(t)H(t^2-|x|^2) I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{t^2-|x|^2}\right), \\ \text{se n é par} \\ C_n e^{-\frac{t}{2}} \left(\square - \frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1\frac{1}{2}} H(t)H(t^2-|x|^2) \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{t^2-|x|^2}\right), \\ \text{se n é ímpar,} \end{cases} \tag{3.8}$$

em que $\square = \partial_t^2 - \triangle_x$ C_n é uma constante que depende de n. Aqui, I_0 é a função modificada de Bessel de ordem zero e

$$I_0(r/2) = \frac{e^{r/2}}{\sqrt{\pi r}(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{r}))},$$

quando $r = \sqrt{t^2 - |x|^2} \to \infty$. A função $H = H(t)$ é a função de Heaviside, dada por

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

A expressão do semigrupo dada em (3.8) é bem conhecida, pelo menos para $n = 1, 2 \quad e \quad 3$. Essa fórmula pode ser encontrada em (Kanwal [17] Capítulo 10.)

Proposição 10. *Se u é uma função regular, então são válidas as seguintes expressões:*

a.

$$e^{2\varphi} u_t(u_{tt} - \triangle u + u_t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2\varphi}}{2}(|u_t|^2 + |\nabla u|^2)\right) - div(e^{2\varphi} u_t \nabla u) - \frac{e^{2\varphi}}{\varphi_t}|\varphi_t \nabla u - u_t \nabla \varphi|^2.$$

b.

$$e^{2\varphi}u_t(u_{tt} - \triangle u + u_t - |u|^p) = \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2\varphi}}{2}(|u_t|^2 + |\nabla u|^2) - \frac{e^{2\varphi}}{p+1}|u|^{p+1}\right) - div(e^{2\varphi}u_t\nabla u)$$
$$- \frac{e^{2\varphi}}{\varphi_t}|\varphi_t\nabla u - u_t\nabla\varphi|^2 + \frac{2\varphi_t}{p+1}e^{2\varphi}|u|^{p+1},$$

sendo $\varphi = \varphi(t,x)$ uma função satisfazendo a seguinte equação diferencial;

$$\varphi_t = \varphi_t^2 - |\nabla\varphi|^2. \tag{3.9}$$

Demonstração. :

Para (a) temos

$$\begin{aligned} e^{2\varphi}u_t(u_{tt} - \triangle u + u_t) &= e^{2\varphi}u_t((\partial_t^2 - \triangle_x)u + u_t) \\ &= e^{2\varphi}u_t u_{tt} - e^{2\varphi}u_t\triangle_x u + e^{2\varphi}|u_t|^2. \end{aligned}$$

Desenvolvemos cada um dos termos à direita da igualdade acima. Assim, temos:

i.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2\varphi}}{2}|u_t|^2\right) &= 2\frac{e^{2\varphi}}{2}u_t u_{tt} + |u_t|^2\varphi_t\frac{e^{2\varphi}}{2} \\ &= e^{2\varphi}u_t u_{tt} + |u_t|^2\varphi_t e^{2\varphi} \end{aligned}$$

por conseguinte,

$$e^{2\varphi}u_t u_{tt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2\varphi}}{2}|u_t|^2\right) - |u_t|^2\varphi_t e^{2\varphi}$$

ii. Aqui utilizamos

$$div(f.F) = f.divF + \langle\nabla f, F\rangle \tag{3.10}$$

sendo F um campo de vetores e f uma função escalar, regulares.

Tomando $f = e^{2\varphi}u_t$ e $F = \nabla u$ e usando (**3.10**), temos

$$\begin{aligned} div(e^{2\varphi}u_t\nabla u) &= e^{2\varphi}u_t div\nabla u + \nabla(e^{2\varphi}u_t)\cdot\nabla u \\ &= e^{2\varphi}u_t\triangle u + e^{2\varphi}\nabla u_t\cdot\nabla u \\ &+ 2e^{2\varphi}u_t\nabla\varphi\cdot\nabla u. \end{aligned}$$

Então

$$e^{2\varphi}u_t\triangle u = div(e^{2\varphi}u_t\nabla u) - e^{2\varphi}\nabla u_t\nabla u - 2e^{2\varphi}u_t\nabla\varphi\nabla u.$$

Observamos que

$$\begin{aligned} e^{2\varphi}\nabla u_t\nabla_x u &= e^{2\varphi}\frac{d}{dt}\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(e^{2\varphi}\frac{|\nabla u|^2}{2}\right) - e^{2\varphi}|\nabla u|^2\varphi_t. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} e^{2\varphi}u_t\triangle u &= div(e^{2\varphi}u_t\nabla u) \\ &- \frac{d}{dt}\left(e^{2\varphi}\frac{|\nabla_x u|^2}{2}\right) + e^{2\varphi}|\nabla_x u|^2\varphi_t - 2e^{2\varphi}u_t\nabla_x\varphi\nabla_x u. \end{aligned}$$

Agora, com **(i) e (ii)**, obtemos

$$\begin{aligned} e^{2\varphi}u_t(u_{tt} - \triangle u + u_t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2\varphi}}{2}|u_t|^2\right) - |u_t|^2\varphi_t e^{2\varphi} \\ &- div(e^{2\varphi}u_t\nabla_x u) + \frac{d}{dt}\left(e^{2\varphi}\frac{|\nabla_x u|^2}{2}\right) \\ &- e^{2\varphi}|\nabla_x u|^2\varphi_t + 2e^{2\varphi}u_t\nabla\varphi\cdot\nabla u + e^{2\varphi}|u_t|^2 \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2\varphi}}{2}(|u_t| + |\nabla u|^2)\right) - div(e^{2\varphi}u_t\nabla_x u) \\ &- \frac{e^{2\varphi}}{\varphi_t}\left(|\nabla_x u|^2\varphi_t^2 - 2u_t\varphi_t(\nabla u)\cdot(\nabla\varphi) - \varphi_t|u_t|^2\right) - |u_t|^2\varphi_t e^{2\varphi}. \end{aligned}$$

Então, lembrando que φ deve satisfazer a equação(**3.9**), obtemos que

$$
\begin{aligned}
&-\frac{e^{2\varphi}}{\varphi_t}\left(|\nabla_x u|^2\varphi_t^2 - 2u_t\varphi_t(\nabla u)\cdot(\nabla\varphi) - \varphi_t|u_t|^2\right) - |u_t|^2\varphi_t e^{2\varphi} = \\
&-\frac{e^{2\varphi}}{\varphi_t}\left(|\nabla u|^2\varphi_t^2 - 2u_t\varphi_t(\nabla u)\cdot(\nabla\varphi) + |u_t|^2|\nabla\varphi|^2\right) + \varphi_t|u_t|^2 e^{2\varphi} - |u_t|^2\varphi_t e^{2\varphi} = \\
&= -\frac{e^{2\varphi}}{\varphi_t}|\varphi_t\nabla_x u - u_t\nabla_x\varphi|.
\end{aligned}
$$

A demonstração do item (a) está concluída.

Para provar (b), basta ver que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(e^{2\varphi}|u|^{p+1}\right) &= 2\varphi e^{2\varphi}|u|^{p+1} \\
&\quad + (p+1)e^{2\varphi}|u|^p u_t
\end{aligned}
$$

e usar o item **a**. Isso finaliza a demonstração da proposição . □

Vamos, agora, impor que a solução da equação (3.9) satisfaça $\varphi_t < 0$.

Uma solução com essa propriedade é dada por

$$
\varphi(t,x) = \frac{1}{2}(t+K-\sqrt{(t+K)^2-|x|^2}\ ), \quad |x| < t+K \tag{3.11}
$$

com K uma constante positiva.

Verificaremos que (3.11) é solução de (3.9).Temos

$$
\varphi_t(t,x) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{t+K}{\sqrt{(t+K)^2-|x|^2}}\right) \tag{3.12}
$$

e

$$
\nabla_x\varphi(t,x) = \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{(t+K)^2-|x|^2}}. \tag{3.13}
$$

Utilizando (3.12 e 3.13), facilmente concluimos que

$$
\begin{aligned}
\varphi_t^2 - |\nabla_x\varphi|^2 &= \frac{1}{4}\left(1-\frac{t+K}{\sqrt{(t+K)^2-|x|^2}}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{|x|^2}{(t+K)^2-|x|^2}\right) \\
&= \varphi_t.
\end{aligned}
$$

Notamos também que essa solução da equação (3.9) é bem regular em seu suporte e também satisfaz

$$
\varphi(t,x) \geq \frac{|x|^2}{4(t+K)}, \quad se\ \ |x| < t+K. \tag{3.14}
$$

De fato, para ver isso basta observar que

$$0 \leq (t+K-\sqrt{(t+K)^2-|x|^2}\ )^2 = (t+K)^2 - 2(t+K)\sqrt{(t+K)^2-|x|^2} + (t+K)^2 - |x|^2.$$

Ou, equivalentemente,

$$0 \leq 2(t+K) - 2\sqrt{(t+K)^2-|x|^2} - \frac{|x|^2}{t+K}\ .$$

3.2.1 Problema Linear - Região com Decaimento Exponencial

Uma motivação para se provar a primeira parte do Teorema 10 é dado pela próxima proposição, a qual é válida para soluções fracas da equação linear

$$u_{tt} - \triangle u + u_t = 0. \tag{3.15}$$

Proposição 11. *Seja u a solução fraca do problema linear (2.1)–(2.2) obtida no Capítulo 2. Então o comportamento assintótico de u é exponencial sobre a região*

$$\mathbb{R}^n \backslash B(t^{\frac{1}{2}+\delta}),$$

isto é

$$\|Du(t,\cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n \backslash B(t^{\frac{1}{2}+\delta}))} \leq C(e^{-t^{2\delta/4}})$$

com C uma constante positiva dependendo dos dados iniciais em (2.2) e $\delta > 0$ um número arbitrário.

Demonstração. : A prova dessa proposição é baseada na identidade (a) da Proposição 10

Integrando sobre o $\mathbb{R}^n$ a igualdade dada pela proposição (**10**) item **(a)**, temos

$$0 = \frac{d}{dt}\int \frac{e^{2\varphi}}{2}(|u_t|^2 + |\nabla_x|^2)dx \tag{3.16}$$

$$- \int div(e^{2\varphi}u_t\nabla_x u)dx \tag{3.17}$$

$$- \int \frac{e^{2\varphi}}{\varphi_t}\left(|\varphi_t\nabla_x u - u_t\nabla_x\varphi|^2\right)dx. \tag{3.18}$$

Estimamos cada uma das integrais acima.

i.

$$\int div(e^{\varphi}u_t\nabla_x u)dx \stackrel{1}{=} \int_{|x|<t+k} div(e^{2\varphi}u_t\nabla_x u)dx$$
$$\stackrel{2}{=} \int_{|x|=t+K} e^{2\varphi}u_t\nabla_x u\cdot\eta d\Gamma \stackrel{3}{=} 0$$

aqui utilizamos $\Gamma = \partial B(t+K)$ e η é o vetor normal à esfera n-dimensional $B(t+K)$. Seguem abaixo as justificativas de cada uma das passagens acima.

1 É conseqüência de

$$supp(u) \subset B(t+K);$$

2 Baseia-se no teorema da divergência de Gauss

3 Novamente, segue do fato que

$$supp(u) \subset B(t+K)$$

ii. Como $\varphi_t < 0$, temos que $-\varphi_t > 0$. Então

$$-\int \frac{e^{2\varphi}}{\varphi_t}|\varphi_t\nabla_x u - u_t\nabla_x\varphi|^2dx = \int \frac{e^{2\varphi}}{-\varphi_t}|\varphi_t\nabla_x u - u_t\nabla_x\varphi|^2dx \geq 0.$$

Assim, usando (3.16), (3.15), (3.16), (i) e (ii), devemos ter

$$\frac{d}{dt}\int \frac{e^{2\varphi}}{2}(|u_t|^2 + |\nabla_x u|^2)dx \leq 0. \tag{3.19}$$

Agora, integrando de **0** até **t** (3.19), teremos

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\int \frac{e^{2\varphi(t,x)}}{2}(|u_t(t,x)|^2 + |\nabla_x(t,x)|^2)dx = \int \frac{e^{2\varphi(t,x)}}{2}(|u_t(t,x)|^2 + |\nabla_x u(t,x)|^2)dx \tag{3.20}$$

$$-\int \frac{e^{2\varphi(0,x)}}{2}(|u_t(0,x)|^2 + |\nabla_x u(0,x)|^2)dx, \tag{3.21}$$

Portanto, de(3.19), (3.20) e (3.19), chegamos a

$$\int \frac{e^{2\varphi(t,x)}}{2}(|u_t(t,x)|^2+|\nabla u(t,x)|^2)dx \leq \int \frac{e^{2\varphi(o,x)}}{2}(|u_t(0,x)|^2+|\nabla u(0,x)|^2)dx = C. \quad (3.22)$$

Assim, conclui-se de (3.14 e 3.22)

$$\int_{\mathbb{R}^2\backslash B(t^{1/2+\delta})}(|u_t(t,x)|^2+|\nabla_x u(t,x)|^2)dx \leq C(e^{-t^{2\delta/4}}). \quad (3.23)$$

De (3.23) e para $\delta > 0$, obtemos

$$\|Du\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n\backslash B(t^{1/2+\delta}))} = \int_{\mathbb{R}^2\backslash B(t^{1/2+\delta})}(|u_t(t,x)|^2+|\nabla_x u(t,x)|^2)dx \leq C(e^{-t^{\delta/4}}), \quad (3.24)$$

ou seja,

$$\|Du\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n\backslash B(t^{1/2+\delta}))} \leq Ce^{-t^{2\delta/4}}.$$

□

3.3 Problema Semilinear - Estimativas com Pesos

Agora, provamos algumas estimativas a priori para a energia, com pesos, que são usadas nas demonstrações dos Teoremas 9 e 10. Essas estimativas são feitas com base na identidade (b), associada ao problema semilinear, da Proposição 10.

Proposição 12. *Seja $u = u(t,x)$ uma solução fraca do problema de Cauchy (3.1)– (3.2) no intervalo $[0,T)$. Então vale a seguinte estimativa com peso para energia:*

$$(1+t)^{n/4+1/2}\|Du(t,\cdot)\|_{\mathbb{L}^2} \leq C\epsilon + C[\max_{\tau\in[0,t]}(1+\tau)^{\beta}\|e^{\delta\varphi(\tau,\cdot)}u(\tau,\cdot)\|_{\mathbb{L}^{2p}}]^p, \quad (3.25)$$

para todo $t \in [0,T)$. Aqui, $\varphi(t,x)$ é a função dada por (3.11), $\beta > \frac{n}{4p}+\frac{1}{p}$ e $\delta > 0$ é um número fixado arbitrariamente.

Proposição 13. *Seja $u(t,x)$ uma solução fraca do problema de Cauchy (3.1)–(3.2) no intervalo $[0,T)$. Então tem-se a seguinte estimativa:*

$$\|e^{\varphi(t,\cdot)Du(t,\cdot)}\|_{\mathbb{L}^2} \leq C\epsilon + C[\max_{\tau\in[0,t]}(\tau+1)^{\delta}\|e^{\gamma\varphi(\tau,\cdot)}\|_{p+1}]^{p+1/2}, \quad (3.26)$$

para todo $t \in [0,T)$, sendo $\varphi(t,x)$ a função dada por (3.11), $\gamma > \frac{2}{p+1}$ e $\delta > 0$ um número fixado.

Para demonstrarmos as Proposições 12 e 13, precisamos dos seguintes resultados:

Proposição 14. *Seja* $\theta = \theta(q,n) = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$ *tal que* $0 \leq \theta \leq 1$ *e* $0 < \sigma \leq 1$. *Se* $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ *com supp*$(u) \subset B(t+K)$, *para* $t \geq 0$, *então*

$$\|e^{\sigma\varphi(t,\cdot)}u\|_{\mathbb{L}^q} \leq C_k(1+t)^{(1-\theta)/2}\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^{1-\sigma}\|e^{\varphi(t,\cdot)}\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^{\sigma}, \tag{3.27}$$

sendo $\varphi(t,\cdot)$ *a função peso dada por (3.11).*

Observamos que essa proposição é válida mesmo que u não seja solução da equação da onda. Sua demonstração aparece em Todorova-Yordanov [26] e será apresentada aqui neste trabalho devido à sua importância.

Demonstração. :

Será necessário o seguinte lema:

Lema 2. *Seja* $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, *com supp*$(u) \subset B(t+K)$, $t \geq 0$. *Para* $\sigma > 0$, *temos*

$$\frac{\sigma n}{2}(t+K)^{-1}\|e^{\sigma\varphi(t,\cdot)}u\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|\nabla(e^{\sigma\varphi(t,\cdot)}u)\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \|e^{\sigma\varphi(t,\cdot)}\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2, \tag{3.28}$$

em que $\varphi(t,\cdot)$ *é a função peso dada por (3.11).*

Demonstração. :

Para provarmos esse lema, tomamos $f = e^{\sigma\varphi}u$, para $\sigma > 0$. Então

$$u = e^{-\sigma\varphi}f, \tag{3.29}$$

assim, utilizando (3.29), chegamos-a

$$\nabla u = \nabla e^{-\sigma\varphi}f + e^{-\sigma\varphi}\nabla f = -\sigma e^{-\sigma\varphi}f\nabla\varphi + e^{-\sigma\varphi}\nabla f = e^{-\sigma\varphi}\left(\nabla f - \sigma f\nabla\varphi\right).$$

Logo

$$\begin{aligned}\|e^{\sigma\varphi(t,\cdot)}\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2 &= \|\nabla f - \sigma f\nabla\varphi\|_{\mathbb{L}^2}^2 = \langle \nabla f - \sigma f\nabla\varphi, \nabla f - \sigma f\nabla\varphi\rangle \\ &= \int |\nabla f|^2dx + \sigma^2\int f^2|\nabla\varphi|^2 - 2\sigma\int f(\nabla f\cdot\nabla\varphi)dx.\end{aligned}$$

Além disso, sabemos que

$$f\nabla f = \frac{\nabla f^2}{2} \tag{3.30}$$

e usando (3.10) concluímos que

$$\nabla f^2 \nabla \varphi = div(f^2 \nabla \varphi) - f^2 \triangle \varphi. \tag{3.31}$$

Portanto, verificamos de (3.30) e (3.31), que

$$\begin{aligned} -2\sigma \int f(\nabla f \cdot \nabla \varphi) dx &= -2\sigma \int \frac{\nabla f^2}{2} \cdot \nabla \varphi dx \\ &= -\sigma \left(\int div(f^2 \nabla \varphi) dx - \int f^2 \triangle \varphi dx \right) \\ &\overset{(1)}{=} - \left(-\sigma \int f^2 \triangle \varphi dx \right) = \sigma \int f^2 \triangle \varphi dx. \end{aligned}$$

A igualdade em (1) é verificada observando que

$$supp(f) \subset B(t+K), \tag{3.32}$$

o que, do teorema da divergência , resulta em

$$\begin{aligned} \int div(f^2 \nabla_x \varphi) dx &= \int_{B(t+K)} div(f^2 \nabla_x \varphi) dx \\ &= \int_{\Gamma} f^2 \nabla_x \varphi \eta d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

em que $\Gamma = \partial B(t+K)$.

Observação 9. *Notemos que de (3.11), obtemos*

$$\triangle_x \varphi(t,x) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{n}{((t+K)^2 - |x|^2)^{1/2}} + \frac{|x|^2}{((t+K)^2 - |x|^2)^{3/2}} \right\} \geq \frac{n}{2}(t+K)^{-1}. \tag{3.33}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|e^{\sigma\varphi(t,\cdot)} \nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2 &= \int |\nabla f|^2 dx + \sigma^2 \int f^2 |\nabla \varphi|^2 dx - 2\sigma \int f(\nabla f \cdot \nabla \varphi) dx \\ &= \int |\nabla f|^2 dx + \sigma^2 \int f^2 |\nabla \varphi|^2 dx + \sigma \int f^2 \triangle_x \varphi dx \\ &\geq \int |\nabla f|^2 dx + \sigma \int f^2 \triangle_x \varphi dx \\ &\geq \int |\nabla f|^2 dx + \sigma \int f^2 \frac{n}{2}(t+K)^{-1} dx \\ &= \int |\nabla f|^2 dx + \frac{n}{2}(t+K)^{-1} \sigma \int f^2 dx \\ &= \|\nabla f\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \frac{\sigma n}{2}(t+K)^{-1} \|f\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\ &= \|\nabla (e^{\sigma\varphi(t,\cdot)} u)\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \frac{\sigma n}{2}(t+K)^{-1} \|e^{\sigma\varphi(t,\cdot)} u\|_{\mathbb{L}^2}^2 \end{aligned}$$

Essa estimativa conclui a demonstração do Lema 2. □

Voltamos aqui à demonstração da Proposição 14. Pela desigualdade de **Gagliardo-Nirenberg-Sobolev**, tomando $f = e^{\sigma\varphi}u$, temos que

$$\|f\|_{\mathbb{L}^q} \leq C\|f\|_{\mathbb{L}^2}^{1-\theta(q)}\|\nabla f\|_{\mathbb{L}^2}^{\theta(q)}. \tag{3.34}$$

onde $\theta = \theta(q) = \theta(q,n) = n(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$ é tal que $0 \leq \theta \leq 1$. Agora, pelo Lema 2, vemos que

$$\|\nabla f\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|e^{\sigma\varphi(t,\cdot)}\nabla u\|_{\mathbb{L}^2} \tag{3.35}$$

e

$$\|f\|_{\mathbb{L}^2} \leq \left(\frac{2}{\sigma n}\right)^{\frac{1}{2}}(t+K)^{\frac{1}{2}}\|e^{\sigma\varphi(t,\cdot)}\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}. \tag{3.36}$$

Logo, a partir de (3.34), (3.35) e (3.36) chega-se a

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathbb{L}^q} &\leq C(1+t)^{(1-\theta(q))/2}\|e^{\sigma\varphi(t,\cdot)}\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^{1-\theta(q)}\|e^{\sigma\varphi(t,\cdot)}\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^{\theta(q)} \\ &= C(1+t)^{(1-\theta(q))/2}\|e^{\sigma\varphi(t,\cdot)}\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}. \end{aligned}\tag{3.37}$$

Observamos que

$$e^{2\sigma\varphi}|\nabla u|^2 = e^{2\sigma\varphi}|\nabla u|^{2\sigma}|\nabla u|^{2(1-\sigma)}, \tag{3.38}$$

Assim, utilizando (3.38) e interpolação, constatamos que

$$\|e^{\sigma\varphi}\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \|e^{\varphi}\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^{\sigma}\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^{1-\sigma}.$$

Portanto, usando (3.37), concluímos

$$\|f\|_{\mathbb{L}^q} \leq C(1+t)^{(1-\theta(q))/2}\|e^{\varphi}\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^{\sigma}\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^{1-\sigma}.$$

□

Proposição 15. *Seja $m \in [1,2]$. Então,*

$$\|\partial_t^k\nabla_x^\alpha S_2(t) * f\|_{\mathbb{L}^2} \leq C(1+t)^{n/4-n/2m-|\alpha|/2-k}(\|f\|_{\mathbb{L}^m} + \|f\|_{H^{k+|\alpha|-1}}), \tag{3.39}$$

para cada $f \in \mathbb{L}^m(\mathbb{R}^n) \cap H^{k+|\alpha|-1}(\mathbb{R}^n)$.

Para a demonstração da Proposição 15, será preciso o resultado que desenvolvemos agora.

Consideremos a seguinte equação

$$u_{tt} - \Delta u + u_t = 0, \tag{3.40}$$

com condições iniciais bem regulares dadas por

$$\begin{cases} u(x,0) &= \Phi(x) \\ u_t(x,0) &= \Psi(x). \end{cases} \tag{3.41}$$

Assim, se $u = u(t,x)$ é solução de (3.40), é possível escrever $u = u(x,t)$ como

$$u(x,t) = K_1 * \Psi + K_2 * \Phi. \tag{3.42}$$

Seja $R_i(t,\xi)$ a transformada de Fourier de $K_i(t,x)$ $(i = 1,2)$. Aplicando-a em (3.40), teremos

$$\frac{d^2}{dt^2}R_i + \frac{d}{dt}R_i + |\xi|^2 R_i = 0 \tag{3.43}$$

$$\begin{cases} R_i(0,\xi) &= \widehat{\Phi}(\xi) \\ \dfrac{d}{dt}R_i(0,\xi) &= \widehat{\Psi}(\xi). \end{cases} \tag{3.44}$$

Proposição 16. *Se em* (3.44) *tomarmos* $\widehat{\Phi}(\xi) = 0$ *e* $\widehat{\Psi}(\xi) = 1$, *para* $i = 1$ *e* $\widehat{\Phi}(\xi) = 1$, *e* $\widehat{\Psi}(\xi) = 0$ *para* $i = 2$, *então*

i.

$$R_1(t,\xi) = \begin{cases} \dfrac{2e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{1-4|\xi|^2}} \sinh\left(\dfrac{\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}t\right) & , \ |\xi| \leq \frac{1}{2} \\ \dfrac{2e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{4|\xi|^2+1}} \sin\left(\dfrac{\sqrt{4|\xi|^2+1}}{2}t\right) & , \ |\xi| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

ii.

$$R_2(t,\xi) = \begin{cases} 2e^{-\frac{t}{2}} \cosh\left(\dfrac{\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}t\right) & , \ |\xi| \leq \frac{1}{2} \\ 2e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\dfrac{\sqrt{4|\xi|^2+1}}{2}t\right) & , \ |\xi| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

iii.

$$R_3(t,\xi) = R_1(\xi,t) + R_2(\xi,t)$$

Demonstração. : De (3.43), deduzimos que

$$\alpha^2 + \alpha + |\xi|^2 = 0. \tag{3.45}$$

A equação (3.45) tem duas soluções:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2} \tag{3.46}$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2} \tag{3.47}$$

Assim, chegamos aos seguintes casos:

1^o caso:

$$1 - 4|\xi|^2 > 0 \Rightarrow |\xi| \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Ao utilizar (3.46) e (3.47), obteremos

$$R_1(t,\xi) = Ae^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}\right)t} + Be^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}\right)t} \tag{3.48}$$

e

$$\frac{dR_1}{dt}(t,\xi) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}\right) Ae^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}\right)t} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}\right) Be^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}\right)t} \tag{3.49}$$

Impondo que $R_1(0,\xi) = 0$ e $\dfrac{d}{dt}R_1(\xi,0) = 1$, temos de (3.48) e (3.49) que

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-4|\xi|^2}} \quad B = \frac{-1}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}. \tag{3.50}$$

Então,

$$\begin{aligned}
R_1(t,\xi) &= \frac{1}{\sqrt{1-4|\xi|^2}} e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}\right)t} - \frac{1}{1-4|\xi|^2} e^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}\right)t} \\
&= \frac{2e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{1-4|\xi|^2}} \left(\frac{e^{\frac{\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}} - e^{-\frac{\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}}}{2}\right) \\
&= \frac{2e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{1-4|\xi|^2}} \sinh\left(\frac{\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}\right),
\end{aligned}$$

se $1 - 4|\xi| > 0$.

2^o caso :

$$1-4|\xi|^2<0 \Rightarrow |\xi| \in \left(\frac{1}{2},\infty\right).$$

Portanto, de (3.43) chega-se a

$$R_1(t,\xi)=e^{-\frac{t}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2}t\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2}t\right)\right) \tag{3.51}$$

e

$$\frac{d}{dt}R_1(t,\xi)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\left[\left(A\sin\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2}t\right)+B\cos\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2}t\right)\right)\right]$$

$$-\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2}\left[A\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2}t\right)+B\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2}t\right)\right]. \tag{3.52}$$

Com a condição de $R_1(0,\xi)=0$ e $\frac{d}{dt}R_1(0,\xi)=1$, deduzimos, de (3.51) e (3.52), que

$$A=0 \;\; e \;\; B=\frac{2}{\sqrt{4|\xi|^2-1}}.$$

Logo, obtemos

$$R_1(t,\xi)=\frac{2e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{4\xi|^2-1}}\sin\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2}t\right).$$

Neste ponto, usando (3.43) e tomando $R_2(\xi,0)=0$ e $\frac{d}{dt}R_2(\xi,0)=1$, podemos demonstrar, de maneira análoga à que fizemos acima, que

$$R_2(t,\xi)=\begin{cases} 2e^{-\frac{t}{2}}\cosh\left(\frac{\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}t\right) & , \;\; |\xi|\leq\frac{1}{2} \\ 2e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2+1}}{2}t\right) & , \;\; |\xi|>\frac{1}{2} \end{cases}$$

e

$$R_3(t,\xi)=R_1(t,\xi)+R_2(t,\xi)$$

□

Agora, enunciamos o lema que nos ajudará na demonstração da Proposição 15. A demonstração é obtida de (Matsumura, [20], pg 178).

Lema 3. *Seja* $f\in\mathbb{L}^m(\mathbb{R}^n)\bigcap H^{[n/2]+i+|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ *com* $1\leq m\leq 2$. *Então*

i. $\left\|\left(\frac{\partial^i}{\partial t^i}\right)\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right)(K_1*f)\right\|_\infty \leq c\,(1+t)^{-\frac{n}{2m}-i-\frac{|\alpha|}{2}}\left(\|\, f\,\|_{\mathbb{L}^m}+\|\, f\,\|_{[\frac{n}{2}]+i+|\alpha|}\right);$

ii. $\left\|\left(\frac{\partial^i}{\partial t^i}\right)\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right)(K_1*f)\right\|_{\mathbb{L}^2} \leq c\,(1+t)^{\frac{n}{4}-\frac{n}{2m}-i-\frac{|\alpha|}{2}}\left(\|\, f\,\|_{\mathbb{L}^m}+\|\, f\,\|_{i+|\alpha|-1}\right).$

Se $f \in \mathbb{L}^m(\mathbb{R}^n) \bigcap H^{[\frac{n}{2}]+i+|\alpha|+1}(\mathbb{R}^n)$ *e* $1 \leq m \leq 2$.

Temos

iii. $$\left\| \left(\frac{\partial^i}{\partial t^i}\right) \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right) (K_2 * f) \right\|_\infty \leq c\,(1+t)^{-\frac{n}{2m}-i-\frac{|\alpha|}{2}} \left(\| f \|_{\mathbb{L}^m} + \| f \|_{[\frac{n}{2}]+i+|\alpha|+1}\right);$$

iv. $$\left\| \left(\frac{\partial^i}{\partial t^i}\right) \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial^\alpha x}\right) (K_2 * f) \right\|_{\mathbb{L}^2} \leq c\,(1+t)^{\frac{n}{4}-\frac{n}{2m}-i-\frac{|\alpha|}{2}} \left(\| f \|_{\mathbb{L}^m} + \| f \|_{i+|\alpha|}\right).$$

Antes de começarmos a demonstração do lema acima, demonstramos as seguintes afirmaçôes

Afirmação 1. *Se* R_1 *é a função dada pela proposição (16), então:*

i. $$\left|\frac{d^i}{dt^i} R_1(t,\xi)\right| \leq Ce^{-\frac{t}{2}} \left|\frac{(1+\sqrt{4|\xi|^2-1})^i}{\sqrt{4|\xi|^2-1}}\right|$$

ii. $$\left|\frac{d^i}{dt^i} R_1(t,\xi)\right| \leq Ce^{-\frac{t}{2}} \left[1 + \sup_{\frac{1}{2}<|\xi|<1} \left\{\frac{1}{\sqrt{4|\xi|^2-1}} \sin\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2} t\right)\right\}\right]$$

iii. $$\left|\frac{d^i}{dt^i} R_1(t,\xi)\right| \leq Ce^{-\frac{t}{2}} \left[1 + \sup_{\delta<|\xi|<\frac{1}{2}} \left\{\frac{1}{\sqrt{4|\xi|^2-1}} \sinh\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2} t\right)\right\}\right.$$
$$\left. + \sup_{\delta<|\xi|\leq\frac{1}{2}} \left\{\cosh\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2} t\right)\right\}\right]$$

iv. $$\left|\frac{d^i}{dt^i} R_1(t,\xi)\right| \leq C \left[\frac{(1-\sqrt{1-4|\xi|^2})^i}{\sqrt{1-4|\xi|^2}} e^{-\frac{t}{2}(1-\sqrt{1-4|\xi|^2})} + \frac{(1+\sqrt{1-4|\xi|^2})^i}{\sqrt{1-4|\xi|^2}} e^{-\frac{t}{2}(1+\sqrt{1+4|\xi|^2})}\right]$$

Começamos com a demonstração do item (i).

Demonstração. :

Para $|\xi| \geq 1$, temos $R(\xi,t) = \dfrac{2e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{4|\xi|^2-1}} \sin\left(\dfrac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2} t\right)$. Por simplicidade, vamos tomar $\beta = \sqrt{4|\xi|^2-1}$. Podemos escrever $R(t,\xi) = \dfrac{2e^{-\frac{t}{2}}}{\beta} \sin\left(\dfrac{\beta}{2} t\right)$.

Assim, temos para $i = 1$

$$\frac{d}{dt} R(t,\xi) = -\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\beta} \sin\left(\frac{\beta}{2} t\right) + e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\beta}{2} t\right)$$

e daí

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{dt}R(t,\xi)\right| &= \left|-\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\beta}\sin\left(\frac{\beta}{2}t\right) + e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\beta}{2}t\right)\right| \\ &\leq Ce^{-\frac{t}{2}}\left|1+\frac{1}{\beta}\right| = Ce^{-\frac{t}{2}}\left|\frac{1+\beta}{\beta}\right| = Ce^{-\frac{t}{2}}\left|\frac{1+\sqrt{4|\xi|^2-1}}{\sqrt{4|\xi|^2-1}}\right|\end{aligned}$$

No caso de $i = 2$,

$$\frac{d^2}{dt^2}R(t,\xi) = e^{-\frac{t}{2}}\left[\left(\frac{1-\beta^2}{2\beta}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}t\right) - \cos\left(\frac{\beta}{2}t\right)\right]$$

e assim,

$$\begin{aligned}\left|\frac{d^2}{dt^2}R(t,\xi)\right| &= e^{-\frac{t}{2}}\left|\left(\frac{1-\beta^2}{2\beta}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}t\right) - \cos\left(\frac{\beta}{2}t\right)\right| \\ &\leq Ce^{-\frac{t}{2}}\left|\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta}\right)+1\right| \\ &= Ce^{-\frac{t}{2}}\frac{(1+\beta)^2}{2\beta} = Ce^{-\frac{t}{2}}\frac{(1+\sqrt{4|\xi|^2-1})^2}{\sqrt{4|\xi|^2-1}}\end{aligned}$$

Para $i = 3$,

$$\frac{d^3}{dt^3}R(t,\xi) = e^{-\frac{t}{2}}\left[\left(\frac{3\beta^2-1}{4\beta}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}t\right) + \left(\frac{3-\beta^2}{4}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}t\right)\right]$$

logo,

$$\begin{aligned}\left|\frac{d^3}{dt^3}R(t,\xi)\right| &= e^{-\frac{t}{2}}\left|\left(\frac{3\beta^2-1}{4\beta}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}t\right) + \left(\frac{3-\beta^2}{4}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}t\right)\right| \\ &\leq Ce^{-\frac{t}{2}}\left|\left(\frac{1+\beta^2}{4\beta}\right)+\left(\frac{3+\beta^2}{4}\right)\right| \\ &= Ce^{-\frac{t}{2}}\left|\frac{1+\beta^2+3\beta+\beta^3}{4\beta}\right| \\ &\leq Ce^{-\frac{1}{2}}\frac{(1+\beta)^3}{4\beta} = Ce^{-\frac{t}{2}}\frac{(1+\sqrt{4|\xi|^2-1})^3}{\sqrt{4|\xi|^2-1}}\end{aligned}$$

Repetindo esse processo i-vezes, obtemos o resultado em **i** . □

Agora demonstramos o item (ii).

Demonstração. Para demonstrarmos **ii**, basta observar que de **i**

$$\frac{d^i}{dt^i}R(t,\xi) = e^{-\frac{t}{2}}\left[C_{|\xi|}\cos\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2}t\right) + \frac{C_{|\xi|}}{\sqrt{4|\xi|^2-1}}\sin\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2}\right)\right]$$

e assim,

$$\begin{aligned}\left|\frac{d^i}{dt^i}R(t,\xi)\right| &= e^{-\frac{t}{2}}\left|C_{|\xi|}\cos\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2}t\right) + \frac{C_{|\xi|}}{\sqrt{4|\xi|^2-1}}\sin\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2}\right)\right| \\ &\leq Ce^{-\frac{t}{2}}\left[1+\sup_{\frac{1}{2}<|\xi|<1}\left\{\frac{1}{\sqrt{4|\xi|^2-1}}\sin\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2}t\right)\right\}\right].\end{aligned}$$

o que demonstra **ii**.

□

Agora demonstramos o item (iii)

Demonstração. :

Para $\delta < |\xi| < \frac{1}{2}$, e tomando novamente $\beta = \sqrt{1-4|\xi|^2}$, temos, da proposição (16),

$$R_1(t,\xi) = \frac{2e^{-\frac{t}{2}}}{\beta}\sinh\left(\frac{\beta}{2}t\right).$$

No caso de $i = 1$

$$\frac{d}{dt}R(t,\xi) = e^{-\frac{t}{2}}\left[-\frac{1}{\beta}\sinh\left(\frac{\beta}{2}t\right) + \cosh\left(\frac{\beta}{2}t\right)\right]$$

portanto,

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{dt}R(t,\xi)\right| &= e^{-\frac{t}{2}}\left|-\frac{1}{\beta}\sinh\left(\frac{\beta}{2}t\right) + \cosh\left(\frac{\beta}{2}t\right)\right| \\ &\leq Ce^{-\frac{t}{2}}\left|1+\sup_{\delta<|\xi|\leq\frac{1}{2}}\frac{1}{\beta}\sinh\left(\frac{\beta}{2}t\right)\right| \\ &= Ce^{-\frac{t}{2}}\left[1+\sup_{\delta<|\xi|\leq\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}\sinh\left(\frac{\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}t\right)\right\}\right]\end{aligned}$$

Para $i = 2$,

$$\frac{d^2}{dt^2}R(t,\xi) = e^{-\frac{t}{2}}\left[\left(\frac{\beta^2+1}{2\beta}\right)\sinh(\frac{\beta}{2}t) - \left(\frac{\beta+1}{2\beta}\right)\cosh\left(\frac{\beta}{2}t\right)\right]$$

logo,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{d^2}{dt^2}R(t,\xi)\right| &= e^{-\frac{t}{2}}\left|\left(\frac{\beta^2+1}{2\beta}\right)\sinh(\frac{\beta}{2}t)-\left(\frac{\beta+1}{2\beta}\right)\cosh\left(\frac{\beta}{2}t\right)\right| \\
&\leq Ce^{-\frac{t}{2}}\left|1+\sup_{\delta<|\xi|\leq\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{\beta}\sinh\left(\frac{\beta}{2}t\right)\right\}\right| \\
&= Ce^{-\frac{t}{2}}\left[1+\sup_{\delta<|\xi|\leq\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}\sinh\left(\frac{\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}t\right)\right\}\right]
\end{aligned}
$$

Repetindo o processo acima i-vezes, verificamos que **iii**. □

Agora demonstramos o item (iv).

Demonstração. Quando $|\xi| \leq \delta$, constatamos novamente que

$$
R_1(t,\xi) = \frac{2e^{-\frac{t}{2}}}{\beta}\sinh\left(\frac{\beta}{2}t\right).
$$

Para $i = 1$,

$$
\frac{d}{dt}R(t,\xi) = e^{-\frac{t}{2}}\left[-\frac{1}{\beta}\sinh\left(\frac{\beta}{2}t\right)+\cosh\left(\frac{\beta}{2}t\right)\right]
$$

então,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dt}R(t,\xi)\right| &= e^{-\frac{t}{2}}\left|-\frac{1}{\beta}\sinh\left(\frac{\beta}{2}t\right)+\cosh\left(\frac{\beta}{2}t\right)\right| \\
&\leq Ce^{-\frac{t}{2}}\left|\frac{1}{\beta}\left(\frac{e^{\frac{\beta}{2}t}-e^{-\frac{\beta}{2}t}}{2}\right)+\left(\frac{e^{\frac{\beta}{2}t}+e^{-\frac{\beta}{2}t}}{2}\right)\right| \\
&= C\left[\left(\frac{1+\beta}{2\beta}\right)e^{-\frac{t}{2}(1-\beta)}+\left(\frac{1+\beta}{2\beta}\right)e^{-\frac{t}{2}(1+\beta)}\right] \\
&= C\left[\frac{(1-\sqrt{1-4|\xi|^2})}{2\sqrt{1-4|\xi|^2}}e^{-\frac{t}{2}(1-\sqrt{1-4|\xi|^2})}+\frac{(1+\sqrt{1-4|\xi|^2})}{2\sqrt{1-4|\xi|^2}}e^{-\frac{t}{2}(1+\sqrt{1-4|\xi|^2})}\right]
\end{aligned}
$$

No caso de $i = 2$,

$$
\frac{d^2}{dt^2}R(t,\xi) = e^{-\frac{t}{2}}\left[\left(\frac{\beta^2+1}{2\beta}\right)\sinh(\frac{\beta}{2}t)-\left(\frac{\beta+1}{2\beta}\right)\cosh\left(\frac{\beta}{2}t\right)\right]
$$

assim,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d^2}{dt^2}R(t,\xi)\right| &= e^{-\frac{t}{2}}\left|\left(\frac{\beta^2+1}{2\beta}\right)\sinh(\frac{\beta}{2}t)-\left(\frac{\beta+1}{2\beta}\right)\cosh\left(\frac{\beta}{2}t\right)\right| \\
&= Ce^{-\frac{t}{2}}\left[\left(\frac{\beta^2+1}{2\beta}\right)\left(\frac{e^{\frac{\beta}{2}t}-e^{-\frac{\beta}{2}t}}{2}\right)-\left(\frac{\beta+1}{2\beta}\right)\left(\frac{e^{\frac{\beta}{2}t}+e^{-\frac{\beta}{2}t}}{2}\right)\right] \\
&\leq C\left|\left(\frac{(1-\beta)^2}{\beta}\right)e^{-\frac{t}{2}(1-\beta)}+\left(\frac{(1+\beta)^2}{\beta}\right)e^{-\frac{t}{2}(1+\beta)}\right| \\
&= C\left[\frac{(1-\sqrt{1-4|\xi|^2})^2}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}e^{-\frac{t}{2}(1-\sqrt{1-4|\xi|^2})}+\frac{(1+\sqrt{1-4|\xi|^2})^2}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}e^{-\frac{t}{2}(1+\sqrt{1-4|\xi|^2})}\right].
\end{aligned}$$

Procedendo dessa forma $i-vezes$, obtemos **iv**. □

Afirmação 2.

i. $\int_0^\delta |\xi|^k e^{-c|\xi|^2 t}d\xi \leq C(1+t)^{-\frac{(k+n)}{2}}$, $\forall t \geq 0$;

ii. $\sup\limits_{0\leq|\xi|\leq\delta}\{|\xi|^k e^{-c|\xi|^2 t}\} \leq C(1+t)^{-\frac{k}{2}}$, $\forall t \geq 0$.

Demonstração. : Demonstramos primeiro o item(i).

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta |\xi|^k e^{-c|\xi|^2 t}d\xi &= \int_0^\delta\int_{|\xi|=r} r^k e^{-cr^2 t}dS_\xi dr = \int_0^\delta r^k e^{-cr^2 t}\left[\int_{|\xi|=r}dS_\xi\right]dr \\
&= \omega_n\int_0^\delta r^{k+n-1}e^{-cr^2 t}dr = \omega_n\int_0^{\sqrt{t}\delta}\frac{z^{k+n-1}e^{-z^2}}{t^{\frac{k+n-1}{2}}}\frac{dz}{t^{\frac{1}{2}}} \\
&= \omega_n t^{-\frac{k+n}{2}}\int_0^{\sqrt{t}\delta} z^{k+n-1}e^{-z^2}dz
\end{aligned}$$

,em que $w_n = \int_{|\xi|=1} dS_\xi$.

Agora, observamos que

$$\int_0^{\sqrt{t}\delta} z^{k+n-1}e^{-z^2}dz \leq \int_0^\infty z^{k+n-1}e^{-z^2}dz \leq C.$$

e existe $C > 0$ tal que

$$t^{-s} \leq C\,(1+t)^s\,,\ \ \forall t \geq 0.$$

Então

$$\int_0^\delta |\xi|^k e^{-c|\xi|^2 t}d\xi \leq C\,(1+t)^{-\frac{k+n}{2}}\,,\ \ \forall t \geq 0,$$

como queríamos mostrar. □

Demonstração. Demontramos agora o item (ii)

Notamos que:

$$\lim_{t\to\infty} |\xi|^k e^{-c|\xi|^2 t}(1+t)^{\frac{k}{2}} = 0$$

, ou seja, existem $N > 0$ e $C > 0$ tais que se $t \geq N$

$$|\xi|^k e^{-c|\xi|^2 t}(1+t)^{\frac{k}{2}} \leq C, \ \ \forall t \geq 0.$$

Isso prova **ii** □

Proposição 17. (Desigualdade de Hausdorff-Young)

Seja $f \in \mathbb{L}^m \bigcap H^{[\frac{n}{2}]+i+|\alpha|}$ *com* $1 \leq m \leq 2$, *então*

$$\|f\|_{\mathbb{L}^k} \leq (2\pi)^{\frac{n}{2}-\frac{n}{k}} \|\widehat{f}\|_{\mathbb{L}^m},$$

$\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{m} = 1$, *sendo* $\widehat{f}$ *a transformada de Fourier de* f.

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em(Reed-Simon,[25]).

Vamos agora demonstrar o Lema 3.

Demonstração. do Lema 3: Usando a Proposição 17 e $A = (2\pi^{\frac{n}{2}-\frac{n}{k}})$, chega-se a

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\frac{\partial^i}{\partial t^i}\right)\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right)(K_1 * f)\right\|_\infty &\leq A \left\|(i\xi)^\alpha \frac{d^i}{dt^i} R(\xi,t)\widehat{f}(\xi)\right\|_{\mathbb{L}^1} \\
&\leq C \int |\xi|^{|\alpha|} \left|\frac{d^i}{dt^i} R(\xi,t)\right| |\widehat{f}(\xi)| d\xi,
\end{aligned}$$

em que $C = Ai^{|\alpha|}$ Seja $\delta > 0$ com $\delta \leq \frac{1}{2}$.

Podemos, nesse contexto, dividir a integral acima da seguinte forma :

$$\begin{aligned}
\int |\xi|^{|\alpha|} \left|\frac{d^i}{dt^i} R(\xi,t)\right| |\widehat{f}(\xi)| d\xi &= \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{|\alpha|} \left|\frac{d^i}{dt^i} R(\xi,t)\right| |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\
&+ \int_{\frac{1}{2}<|\xi|<1} |\xi|^{|\alpha|} \left|\frac{d^i}{dt^i} R(\xi,t)\right| |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\
&+ \int_{\delta\leq|\xi|\leq\frac{1}{2}} |\xi|^{|\alpha|} \left|\frac{d^i}{dt^i} R(\xi,t)\right| |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\
&+ \int_{|\xi|\leq\delta} |\xi|^{|\alpha|} \left|\frac{d^i}{dt^i} R(\xi,t)\right| |\widehat{f}(\xi)| d\xi.
\end{aligned}$$

Estimamos, a partir de então, as integrais acima.

i

$$
\begin{aligned}
\int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{|\alpha|} \left| \frac{d^i}{dt^i} R(\xi,t) \right| |\widehat{f(\xi)}| d\xi &\overset{1}{\leq} \int_{\|\xi|\geq 1} |\xi|^{|\alpha|} C e^{-\frac{t}{2}} \left| \frac{(1+\sqrt{4|\xi|^2-1})^i}{\sqrt{4|\xi|^2-1}} \right| |\widehat{f}(\xi)| \\
&\leq C e^{-\frac{t}{2}} \sup_{|\xi|\geq 1} \left\{ \frac{(1+\sqrt{4|\xi|^2-1})^i}{|\xi|^{i-1}\sqrt{4|\xi|^2-1}} \right\} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{|\alpha|+i-1} |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\
&\overset{2}{\leq} C e^{-\frac{t}{2}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{|\alpha|+[\frac{n}{2}]-[\frac{n}{2}]+i-1} |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\
&= C e^{-\frac{t}{2}} \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{-[\frac{n}{2}]-1} |\xi|^{|\alpha|+[\frac{n}{2}]+i} |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\
&\overset{3}{\leq} C e^{-\frac{t}{2}} \left(\int |\xi|^{-2[\frac{n}{2}]-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |\xi|^{2|\alpha|+2[\frac{n}{2}]+2i} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C e^{-\frac{t}{2}} \left(\int \left(1+|\xi|^2\right)^{|\alpha|+[\frac{n}{2}]+i} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{4}{=} C e^{-\frac{t}{2}} \|f\|_{|\alpha|+[\frac{n}{2}]+1}
\end{aligned}
$$

Justificamos as desigualdades $1, 2, 3$ e a iguadade 4

1. Segue da afirmação(1) item (**i**).

2. Ressaltamos que
$$\lim_{|\xi|\to\infty} \frac{(1+\sqrt{4|\xi|^2-1})^i}{|\xi|^{i-1}\sqrt{4|\xi|^2-1}} = 2^{i-1}$$
então existe $C > 0$ tal que:
$$\sup_{|\xi|\geq 1} \left\{ \frac{(1+\sqrt{4|\xi|^2-1})^i}{|\xi|^{i-1}\sqrt{4|\xi|^2-1}} \right\} \leq C$$
.

3. Primeiramente, sabemos que, se n é par

$$
\begin{aligned}
\int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{-2[\frac{n}{2}]-2} d\xi = \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{-n-2} d\xi = \int_1^\infty \int_{|\xi|=r} r^{-n-2} dS_\xi dr = \int_1^\infty r^{-n-2}\omega_n r^{n-1} dr \\
= \omega_n \int_1^\infty \frac{1}{r^3} dr \leq \omega_n C \leq K
\end{aligned}
$$

e, para $f \in H^{|\alpha|+[\frac{n}{2}]+i}$,

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{2|\alpha|+2[\frac{n}{2}]+2i} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq \int \left(1+|\xi|^2\right)^{2|\alpha|+2[\frac{n}{2}]+2i} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$
$$\leq \|f(\xi)\|_{|\alpha|+[\frac{n}{2}]+i} < \infty$$

Então, usando a desigualdade de Hölder, constatamos que

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{-2[\frac{n}{2}]-2} |\xi|^{2|\xi|+2[\frac{n}{2}]+2i} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq$$
$$\left(\int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{-2[\frac{n}{2}]-2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{2|\xi|+2[\frac{n}{2}]+2i} |\widehat{f}(\xi)| d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq K \left(\int |\xi|^{2|\xi|+2[\frac{n}{2}]+2i} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para n ímpar, o processo é análogo, o que demonstra a passagem (3).

4. Segue do fato que $f \in H^{|\xi|+[\frac{n}{2}]+i}$

ii

$$\int_{\frac{1}{2}<|\xi|<1} |\xi|^{|\alpha|} \left|\frac{d^i}{dt^i} R(\xi,t)\right| |\widehat{f}(\xi)| d\xi \overset{1}{\leq}$$
$$Ce^{-\frac{t}{2}} \left[1 + \sup_{\frac{1}{2}<|\xi|<1} \left\{\frac{1}{\sqrt{4|\xi|^2-1}} \sin\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2} t\right)\right\}\right] \int_{\frac{1}{2}<|\xi|<1} |\xi|^{|\alpha|} |\widehat{f}((\xi))| d\xi \overset{2}{\leq}$$
$$C(1+t)e^{-\frac{t}{2}} \left(\int |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \overset{3}{=} C(1+t)e^{-\frac{t}{2}} \|f\|_{\mathbb{L}^2}.$$

Justicamos as desigualdades $1, 2$ e a igualdade 3:

1. Segue da afirmação (1) (**ii**)
2. Notamos que

$$\lim_{|\xi|\to\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{4|\xi|^2-1}} \sin\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2} t\right) = \frac{t}{2} \leq t.$$

e

$$\lim_{|\xi|\to 1} \frac{1}{\sqrt{4|\xi|^2-1}} \sin\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2} t\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{t}{2}\sqrt{3}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{t\sqrt{3}}{2} = \frac{t}{2} \leq t$$

portanto,

$$\left[1+\sup_{\frac{1}{2}<|\xi|<1}\left\{\frac{1}{\sqrt{4|\xi|^2-1}}\sin\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2}t\right)\right\}\right]\leq C(1+t)$$

e, além disso,

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}<|\xi|<1}|\xi|^{|\alpha|}|\widehat{f}(\xi)|d\xi &\leq \int_{|\xi|<1}|\widehat{f}(\xi)|d\xi\\ &\leq\left(\int_{|\xi|<1}1^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{|\xi|<1}|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq C\left(\int|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Isso demonstra **2**

3. Basta aplicar a identidade de Parseval. Ou seja, de Parseval sabemos que

$$\|f\|_{\mathbb{L}^2}=\|\widehat{f}\|_{\mathbb{L}^2},$$

então

$$C(1+t)e^{-\frac{t}{2}}\left(\int|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}=C(1+t)e^{-\frac{t}{2}}\|\widehat{f}\|_{\mathbb{L}^2}=C(1+t)e^{-\frac{t}{2}}\|f\|_{\mathbb{L}^2}.$$

iii

$$\begin{aligned}\int_{\delta<|\xi|\leq\frac{1}{2}}|\xi|^{|\alpha|}\left|\frac{d^i}{dt^i}R(\xi,t)\right||\widehat{f}(\xi)|d\xi &\overset{1}{\leq}\\ &Ce^{-\frac{t}{2}}\left[1+\sup_{\delta<|\xi|<\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{4|\xi|^2-1}}\sinh\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2}t\right)\right\}\right.\\ &\left.+\sup_{\delta<|\xi|\leq\frac{1}{2}}\left\{\cosh\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2}t\right)\right\}\right]\int_{\delta<|\xi|\leq\frac{1}{2}}|\widehat{f}(\xi)|d\xi\\ &\overset{2}{\leq}Ce^{-(1-\sqrt{1-4|\xi|^2})\frac{t}{2}}\|f\|_{\mathbb{L}^2}.\end{aligned}$$

Justificamos abaixo as desigualdades (1 *e* 2) :

1. A justificativa vem da afirmação (1) item (**iii**).

2. Note que

$$\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{4|\xi|^2-1}}\sinh\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2}t\right) = e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{e^{\frac{\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}t}-e^{-\frac{\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}t}}{2\sqrt{1-4|\xi|^2}}\right)$$
$$= e^{-\frac{t}{2}(1-\sqrt{1-4|\xi|^2})}\left(\frac{1-e^{-\sqrt{1-4|\xi|^2}t}}{2\sqrt{1-4|\xi|^2}}\right).$$

Como

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-e^{-\sqrt{1-4|\xi|^2}t}}{2\sqrt{1-4|\xi|^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-4|\xi|^2}},$$

logo

$$\sup_{\delta<|\xi|\leq\frac{1}{2}}\left\{\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{4|\xi|^2-1}}\sinh\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2}t\right)\right\} \leq Ce^{-\frac{t}{2}(1-\sqrt{1-4|\xi|^2})}.$$

Analogamente, temos

$$\sup_{\delta<|\xi|\leq\frac{1}{2}}\left\{e^{-\frac{t}{2}}\cosh\left(\frac{\sqrt{4|\xi|^2-1}}{2}t\right)\right\} \leq Ce^{-\frac{t}{2}(1-\sqrt{1-4|\xi|^2})}.$$

Além disso,

$$\int_{\delta<|\xi|\leq\frac{1}{2}}|\xi|^{|\alpha|}|\widehat{f}(\xi)|d\xi \leq \int_{|\xi|\leq\frac{1}{2}}|\widehat{f}(\xi)|d\xi$$
$$\overset{Holder}{\leq}\left(\int_{|\xi|\leq\frac{1}{2}}1^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{|\xi|\leq\frac{1}{2}}|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq C\left(\int|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}} = \|\widehat{f}(\xi)\|_{\mathbb{L}^2}\overset{Parseval}{=}\|f(\xi)\|_{\mathbb{L}^2}.$$

Isso mostra a desigualdade (2).

iv

$$\int_{|\xi|\leq\delta}|\xi|^{|\alpha|}\left|\frac{d^i}{dt^i}R(\xi,t)\right||\widehat{f}(\xi)|d\xi \overset{1}{\leq}$$
$$C\int_{|\xi|\leq\delta}|\xi|^{|\alpha|}\left|\frac{(1-\sqrt{1-4|\xi|^2})^i}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}e^{-\frac{t}{2}(1-\sqrt{1-4|\xi|^2})}\right.$$
$$\left.+\frac{(1+\sqrt{1-4|\xi|^2})^i}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}e^{-\frac{t}{2}(1+\sqrt{1+4|\xi|^2})}\right||\widehat{f}(\xi)|d\xi \overset{2}{\leq}$$
$$C\int_{|\xi|\leq\delta}|\xi|^{2i+|\alpha|-|\xi|^2t}|\widehat{f}(\xi)|d\xi + Ce^{-\frac{t}{2}}\int_{|\xi|\leq\delta}|\widehat{f}(\xi)|d\xi \overset{3}{\leq}$$
$$C\left[(1+t)^{\frac{-(n+m(2i+|\alpha|))}{2}}\right]^{\frac{1}{m}}\|\widehat{f}\|_{\mathbb{L}^k}\overset{4}{\leq}C(1+t)^{-\frac{n}{2m}-i-\frac{|\alpha|}{2}}\|f\|_{\mathbb{L}^m}.$$

As desigualdades $(1, 2, 3\ e\ 4)$ serão aqui justificadas:

1. Segue da afirmação(1) item (**iv**).

2. Observamos que

$$-4|\xi|^2 \leq -1 + \sqrt{1-4|\xi|^2} \leq -2|\xi|^2 \text{ para } |\xi| < \frac{1}{2}.$$

Portanto

$$e^{\frac{t}{2}(-1+\sqrt{1-4|\xi|^2})} \leq e^{\frac{t}{2}(-2|\xi|^2)} = e^{-t|\xi|^2}$$

e

$$|(1-\sqrt{1-4|\xi|^2})^i| = |-1+\sqrt{1-4|\xi|^2})^i| \leq |(-2|\xi|^2)^i| = 2^i|\xi|^{2i}.$$

Agora, se $|\xi| \leq \delta$

$$\frac{|\xi|^{|\alpha|}(1+\sqrt{1-4|\xi|^2})^i}{\sqrt{1-4|\xi|^2}} \leq \frac{2^i\delta^{|\alpha|}}{\sqrt{1-4|\xi|^2}} \leq C.$$

Logo, de acordo com o que foi feito acima

$$\int_{|\xi|\leq\delta} |\xi|^{|\alpha|} \left| \frac{(1-\sqrt{1-4|\xi|^2})^i}{\sqrt{1-4|\xi|^2}} \right| e^{-\frac{t}{2}(1-\sqrt{1-4|\xi|^2})} \leq$$

$$C\int_{|\xi|\leq} |\xi|^{2i+|\alpha|}e^{-|\xi|^2t}|\widehat{f}(\xi)|d\xi$$

e

$$\int_{|\xi|\leq\delta} \left| \frac{(1+\sqrt{1-4|\xi|^2})^i}{\sqrt{1-4|\xi|^2}} e^{-\frac{t}{2}(1+\sqrt{1+4|\xi|^2})} \right| |\widehat{f}(\xi)|d\xi \leq$$

$$Ce^{-\frac{t}{2}} \int_{|\xi|\leq\delta} |\widehat{f}(\xi)|d\xi.$$

Isso conclui 2.

3. Para $\frac{1}{m}+\frac{1}{k}=1$, temos, pela desigualdade de Hölder, que

$$\int_{|\xi|\leq\delta}|\xi|^{|\alpha|}\left|\frac{(1-\sqrt{1-4|\xi|^2})^i}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}e^{-\frac{t}{2}(1-\sqrt{1+4|\xi|^2})}\right||\widehat{f}(\xi)|d\xi \overset{2}{\leq}$$
$$C\int_{|\xi|\leq}|\xi|^{2i+|\alpha|}e^{-|\xi|^2t}|\widehat{f}(\xi)|d\xi \overset{Holder}{\leq}$$
$$C\left(\int_{|\xi|\leq\delta}|\xi|^{m(2i+|\alpha|)}e^{-m|\xi|^2t}\right)^{\frac{1}{m}}\left(\int_{|\xi|\leq\delta}|\widehat{f}(\xi)|^k\right)^{\frac{1}{k}} \quad .$$

e, novamente, usando a desigualdade de Hölder,

$$\int_{|\xi|\leq\delta}\left|\frac{(1+\sqrt{1-4|\xi|^2})^i}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}e^{-\frac{t}{2}(1+\sqrt{1+4|\xi|^2})}\right||\widehat{f}(\xi)|d\xi \leq$$
$$Ce^{-\frac{t}{2}}\int_{|\xi|\leq\delta}|\widehat{f}(\xi)|d\xi \overset{Holder}{\leq}$$
$$Ce^{-\frac{t}{2}}\left(\int_{|\xi|\leq\delta}1^m d\xi\right)^{\frac{1}{m}}\left(\int_{|\xi|\leq\delta}|\widehat{f}(\xi)|^k d\xi\right)^{\frac{1}{k}} \leq$$
$$Ce^{-\frac{t}{2}}\left(\int|\widehat{f}(\xi)|^k\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Da Afirmação 2 item(i), obtemos que

$$\int_{|\xi|\leq\delta}|\xi|^{|\alpha|}\left|\frac{(1-\sqrt{1-4|\xi|^2})^i}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}\right|e^{-\frac{t}{2}(1-\sqrt{1-4|\xi|^2})} \leq$$
$$C\left[(1+t)^{-\frac{m(2i+|\alpha|)+n}{2}}\right]^{\frac{1}{m}}\left(\int_{|\xi|\leq\delta}|\widehat{f}(\xi)|^k\right)^{\frac{1}{k}} \leq$$
$$C\left[(1+t)^{-\frac{m(2i+|\alpha|)+n}{2}}\right]^{\frac{1}{m}}\left(\int|\widehat{f}(\xi)|^k\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Observação 10. *É possível observar que existe $C>0$ tal que*

$$e^{-\frac{t}{2}} \leq C(1+t)^{-\frac{n+m(|\alpha|+2i)}{2m}} \ \forall t\geq 0.$$

Para mostrar esse fato, basta verificar que existe $C>0$ de forma que a função

$$f(t)=e^{-\frac{t}{2}}-C(1+t)^{-\frac{n+m(|\alpha|+2i)}{2m}}$$

seja:

i. $f(0) \leq 0$;

ii. Se $t_1 < t_2$, $f(t_1) \geq f(t_2)$.

Demonstração. :

Dado que

$$f(0) = 1 - C \leq 0$$

, basta tomar $C \geq 1$

Agora derivaremos a função f

$$f'(t) = -\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2} + C\frac{n + m(|\alpha| + 2i)}{2m}(1+t)^{-\frac{n+m(|\alpha|+2i)}{2m}} \leq 0$$

Portanto, como $t \geq 0$, verificamos que

$$C\frac{n + m(|\alpha| + 2i)}{m} \leq 1$$

Como devemos ter, pela primeira condição, que $C \geq 1$,tomaremos

$$C = \max\left\{1, \frac{m}{n + m(|\alpha| + 2i)}\right\}.$$

As colocações acima demonstram nossa observação. □

Finalmente, da observação (10), constamos que

$$Ce^{-\frac{t}{2}}\left(\int |\widehat{f}(\xi)|\right)^{\frac{1}{k}} + C\left[(1+t)^{-\frac{m(2i+|\alpha|)+n}{2}}\right]^{\frac{1}{m}}\left(\int |\widehat{f}(\xi)|^k\right)^{\frac{1}{k}}$$
$$\leq C\left[(1+t)^{-\frac{m(2i+|\alpha|)+n}{2}}\right]^{\frac{1}{m}}\|f\|_{\mathbb{L}^k}$$

4. Basta usar a Proposição 17. Assim, decorre da Proposição 17, que

$$\left[(1+t)^{-\frac{m(2i+|\alpha|)+n}{2}}\right]^{\frac{1}{m}}\|\hat{f}\|_{\mathbb{L}^k} \leq A(1+t)^{-\frac{n}{2m}-i-\frac{|\alpha|}{2}}\|f\|_{\mathbb{L}^m}$$

Agora, utilizando ($\mathbf{i}, \mathbf{ii}, \mathbf{iii}, \mathbf{iv}$), $\|f\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|f\|_{[\frac{n}{2}]+i+|\alpha|}$ e a observação(10), chegamos:

$$\left\|\left(\frac{\partial^i}{\partial t^i}\right)\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right)(K_1 * f)\right\|_\infty \leq Ce^{-\frac{t}{2}}\|f\|_{[\frac{n}{2}]+i+|\alpha|} + C(1+t)e^{-\frac{t}{2}}\|f\|_{\mathbb{L}^2}$$
$$+ Ce^{-\frac{t}{2}(1-\sqrt{1-\delta^2})}\|f\|_{\mathbb{L}^2} + C(1+t)^{-\frac{n}{2m}-i-\frac{|\alpha|}{2}}\|f\|_{\mathbb{L}^m} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2m}-i-\frac{|\alpha|}{2}}\|f\|_{[\frac{n}{2}]+i+|\alpha|}$$
$$+ C(1+t)^{-\frac{n}{2m}-i-\frac{|\alpha|}{2}}\|f\|_{[\frac{n}{2}]+i+|\alpha|} + C(1+t)^{-\frac{n}{2m}-i-\frac{|\alpha|}{2}}\|f\|_{\mathbb{L}^m}$$
$$\leq C(1+t)^{-\frac{n}{2m}-i-\frac{|\alpha|}{2}}\left(\|f\|_{[\frac{n}{2}+i+|\alpha|]} + \|f\|_{\mathbb{L}^m}\right).$$

De forma análoga podemos demonstramos (ii,iii e iv). □

Demonstração. : A demonstração da Proposição 15 segue do Lema 3 item ii. □

Demonstramos agora a Proposição 12.

Demonstração. Proposição 12: Reescrevendo o problema de Cauchy (3.1)(3.2) na equação integral

$$u(t) = \epsilon u_L(t) + \int_0^t S_2(t-\tau) * |u(\tau)|^p d\tau, \tag{3.53}$$

em que $u_L(t) = \partial_t S_2(t) * u_0 + S_2(t) * (u_0 + u_1)$ é solução da equação linear $(\partial_{tt} + \triangle + \partial_t)u_L = 0$ com dados iniciais $u_L|_{t=0} = u_0$, $\partial_t u_L = u_1$, e S_2 é a solução fundamental dada por (3.8). Observamos que a justificativa do porquê podemos reescrever o problema (3.1)–(3.2) na igualdade (3.53) é similar ao que fizemos na observação(4), sendo assim, não a faremos aqui.

Usando a Proposição 15 com $m = 1$, o termo linear é limitado por:

$$\begin{aligned}
\|D\epsilon u_L(t,\cdot)\|_{\mathbb{L}^2} &= \epsilon\|D(\partial_t S_2(t) * u_0 + S_2(t) * (u_0 + u_1))\|_{\mathbb{L}^2} \\
&\leq \epsilon(\|\partial_t D S_2(t) * u_0\|_{\mathbb{L}^2} + \|DS_2(t) * (u_0 + u_1)\|_{\mathbb{L}^2}) \\
&\leq C\epsilon(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}(\|u_0\|_{\mathbb{L}^1} + \|u_0\|_{\mathbb{H}^1}) \\
&+ C\epsilon(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}(\|u_1\|_{\mathbb{L}^1} + \|u_1\|_{\mathbb{L}^2}) \\
&\leq C\epsilon(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}(\|u_0\|_{\mathbb{L}^1} + \|u_0\|_{\mathbb{H}^1} + \|u_1\|_{\mathbb{L}^1} + \|u_1\|_{\mathbb{L}^2}).
\end{aligned}$$

Como $supp(u_i) \subset B(t+K), \quad i = 0, 1$, obtemos

$$\epsilon\|Du_L(t,\cdot)\|_{\mathbb{L}^2} \leq C\epsilon(t+1)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}. \tag{3.54}$$

Agora vamos estimar a integral em (3.53). Observemos que

$$\int_0^t S_2(t) * |u(\tau)|^p d\tau = \int_0^{\frac{t}{2}} S_2(t) * |u(\tau)|^p d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^t S_2(t) * |u(\tau)|^p d\tau. \tag{3.55}$$

Para a primeira integral, vamos aplicar a Proposição 15, com $m = 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|DS_2 * |u(\tau)|^p\|_{\mathbb{L}^2} &\leq C(t-\tau+1)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}(\||u(\tau)|^p|\|_{\mathbb{L}^1} + \||u(\tau)|^p\|_{\mathbb{L}^2}) &(3.56)\\
&\leq C(t-\tau+1)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}(\|u(\tau)\|^p_{\mathbb{L}^p} + \|u(\tau)\|^p_{\mathbb{L}^{2p}}). &(3.57)
\end{aligned}$$

A partir do fato de que $supp(u) \subset B(t+K)$ e da desiqualdade de Cauchy, destacamos que

$$\begin{aligned}\|u(\tau)\|_{\mathbb{L}^p}^p &= \int |u(\tau,x)|^p dx = \int_{B(t+K)} |u(\tau,x)|^p dx = \int_{B(t+K)} e^{-p\delta\varphi(\tau,\cdot)} e^{-p\delta\varphi(\tau,\cdot)} |u(\tau,x)|^p dx \\ &\leq \left(\int_{B(t+K)} e^{-p\delta\varphi(\tau,\cdot)} dx\right)\left(\int_{B(t+K)} e^{p\delta\varphi(\tau,\cdot)} |u(\tau,x)|^p dx\right).\end{aligned}$$

Observação 11. *Sabemos que*

$$\int e^{-|z|^2} dz = \sqrt[n]{\pi}. \tag{3.58}$$

e

$$\int_{|x|=r} dS = r^{n-1}\omega_n, \tag{3.59}$$

sendo ω_n a medida da casca esférica.

Por conseguinte, obtemos

$$\begin{aligned}\int e^{-\frac{p\delta|x|^2}{2(\tau+K)}} dx &= \int_0^\infty \int_{|x|=r} e^{-\frac{p\delta|r|^2}{2(\tau+K)}} dS_x dr = \omega_n \int_0^\infty r^{n-1} e^{-\frac{p\delta|r|^2}{2(\tau+K)}} dr \\ &= \omega_n \int_0^\infty \left(\frac{2(\tau+K)}{p\delta}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{2(\tau+K)}{p\delta}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-|z|^2} dz \\ &= \omega_n \left(\frac{2\pi}{p\delta}\right)^{\frac{n}{2}} (\tau+K)^{\frac{n}{2}} \leq C_{K,\delta}(\tau+1)^{\frac{n}{2}}.\end{aligned}$$

Portanto, de (3.14), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B(t+K)} e^{-p\delta\varphi(\tau,\cdot)} dx &\leq \int_{B(t+K)} e^{-\frac{p\delta|x|^2}{2(\tau+K)}} dx \\ &\leq \int e^{-\frac{p\delta|x|^2}{2(\tau+K)}} dx \\ &\leq C_{K,\delta}(\tau+1)^{\frac{n}{2}}.\end{aligned}$$

Logo concluímos, através da Observação 11, que

$$\|u(\tau)\|_{\mathbb{L}^p}^p \leq C_{K,\delta}(\tau+1)^{\frac{n}{4}} \|e^{\delta\varphi(\tau,\cdot)} u(\tau,\cdot)\|_{\mathbb{L}^{2p}}^p. \tag{3.60}$$

sendo $\delta > 0$ arbitrário.

Dando seqüência ao raciocínio, visto que $\varphi > 0$, concluimos que

$$\|u(\tau)\|_{\mathbb{L}^{2p}}^p \leq C_\delta(\tau+1)^{\frac{n}{4}} \|e^{\delta\varphi(\tau,\cdot)} u(\tau,\cdot)\|_{\mathbb{L}^{2p}}^p. \tag{3.61}$$

Usando (3.56), (3.57), (3.60) e **(3.61)**, vemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{t}{2}} S_2(t) * |u(\tau)|^p d\tau &\leq \int_0^{\frac{t}{2}} \|DS_2 * |u(\tau)|^p\|_{\mathbb{L}^2} dt \\
&\leq C \int_0^{\frac{t}{2}} (t-\tau+1)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} [(\tau+1)^{\frac{n}{4p}} \|e^{\delta\varphi(\tau,\cdot)} u(\tau,\cdot)\|_{\mathbb{L}^{2p}}]^p d\tau \\
&\leq C \int_0^{\frac{t}{2}} (t-\tau+1)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} \left[\max_{[0,t]} \left\{(\tau+1)^{\frac{n}{4p}} \|e^{\delta\varphi(\tau,\cdot)} u(\tau,\cdot)\|_{\mathbb{L}^{2p}}\right\}\right]^p d\tau \\
&\leq C \frac{t}{2} (t+1)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} \left[\max_{[0,t]} \left\{(\tau+1)^{\frac{n}{4p}} \|e^{\delta\varphi(\tau,\cdot)} u(\tau,\cdot)\|_{\mathbb{L}^{2p}}\right\}\right]^p d\tau \\
&\leq C (t+1)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} \left[\max_{[0,t]} \left\{t^{\frac{1}{p}} (\tau+1)^{\frac{n}{4p}} \|e^{\delta\varphi(\tau,\cdot)} u(\tau,\cdot)\|_{\mathbb{L}^{2p}}\right\}\right]^p d\tau \\
&\leq C (t+1)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} \left[\max_{[0,t]} \left\{(\tau+1)^{\frac{n}{4p}+\frac{1}{p}} \|e^{\delta\varphi(\tau,\cdot)} u(\tau,\cdot)\|_{\mathbb{L}^{2p}}\right\}\right]^p d\tau \\
&\leq (t+1)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} \left[\max_{[0,t]} \left\{(\tau+1)^{\beta} \|e^{\delta\varphi(\tau,\cdot)} u(\tau,\cdot)\|_{\mathbb{L}^{2p}}\right\}\right]^p d\tau.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^{\frac{t}{2}} S_2(t) * |u(\tau)|^p d\tau \leq (t+1)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} \left[\max_{[0,t]} \left\{(\tau+1)^{\beta} \|e^{\delta\varphi(\tau,\cdot)} u(\tau,\cdot)\|_{\mathbb{L}^{2p}}\right\}\right]^p d\tau. \tag{3.62}$$

Para a segunda integral, usamos a Proposição 15 com $m = 2$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\|DS_2 * |u(\tau)|^p\|_{\mathbb{L}^2} &\leq C(t-\tau+1)^{\frac{n}{4}-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}-0} (\||u(\tau)|^p\|_{\mathbb{L}^2} + \||u(\tau)|^p\|_{\mathbb{H}^{0+1-1}}) \\
&= C(t-\tau+1)^{-\frac{1}{2}} (\||u(\tau)|^p\|_{\mathbb{L}^2} + \||u(\tau)|^p\|_{\mathbb{L}^2}) \\
&= C(t-\tau+1)^{-\frac{1}{2}} (\|u(\tau)\|^p_{\mathbb{L}^{2p}}).
\end{aligned}$$

Além disso, vemos que

$$\begin{aligned}
\|u(\tau)\|^p_{\mathbb{L}^{2p}} &= (1+t)^{-\frac{n}{4}-1} (1+t)^{\frac{n}{4}+1} \|u(\tau)\|^p_{\mathbb{L}^{2p}} \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}-1} \left[\max_{[\frac{t}{2},t]} \left\{(1+t)^{\frac{n}{4p}+\frac{1}{p}} \|u(\tau)\|_{\mathbb{L}^{2p}}\right\}\right]^p,
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\|DS_2 * |u(\tau)|^p\|_{\mathbb{L}^2} \leq C(t-\tau+1)^{-\frac{1}{2}} (1+t)^{-\frac{n}{4}-1} \left[\max_{[\frac{t}{2},t]} \left\{(1+t)^{\frac{n}{4p}+\frac{1}{p}} \|u(\tau)\|_{\mathbb{L}^{2p}}\right\}\right]^p \tag{3.63}$$

Observação 12. *Observamos que*

$$\int_{\frac{t}{2}}^{t} (t-\tau+1)^{-\frac{1}{2}} d\tau = C(1+t)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.64}$$

Assim, a partir da Observação 12 e de (3.63), obtemos que:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{t}{2}}^{t} \|DS_2 * |u(\tau)|^p\|_{\mathbb{L}^2} d\tau &\leq C\int_{\frac{t}{2}}^{t} (t-\tau+1)^{-\frac{1}{2}} \|u(\tau,\cdot)\|_{\mathbb{L}^{2p}}^p d\tau \\ &\leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} \left[\max_{[\frac{t}{2},t]} \left\{(1+t)^{\frac{n}{4p}+\frac{1}{p}} \|u(\tau)\|_{\mathbb{L}^{2p}}\right\}\right]^p.\end{aligned}$$

Como $\varphi > 0$ e $\delta > 0$

$$\int_{\frac{t}{2}}^{t} S_2(t) * |u(\tau)|^p d\tau \leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} \left[\max_{[\frac{t}{2},t]} \left\{(1+t)^{\frac{n}{4p}+\frac{1}{p}} \|e^{\delta\varphi(\tau,\cdot)} u(\tau)\|_{\mathbb{L}^{2p}}\right\}\right]^p. \tag{3.65}$$

Então, juntando (3.54), (3.62) e (3.65) chegamos-a

$$\|Du(\tau,\cdot)\|_{\mathbb{L}^2} \leq (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} \left[C\epsilon + C(\max_{[0,t]} \left\{(1+\tau)^{\beta} \|e^{\delta\varphi(\tau,\cdot)} u(\tau,\cdot)\|_{\mathbb{L}^{2p}}\right\})^p\right]. \tag{3.66}$$

Isso demonstra a proposição (12). □

Demonstração. da Proposição 13:

Integrando em $[0,t]\times\mathbb{R}^n$ a desigualdade **b** na Proposição 10, deduzimos que

$$\begin{aligned}-\frac{2}{p+1}\int_0^t \int \varphi_t e^{2\varphi} |u|^{p+1} dxdt \geq &\int_0^t \int \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2\varphi}}{2}(|u_t|^2 + |\nabla u|^2) - \frac{e^{2\varphi}}{p+1}|u|^{p+1}\right) dxdt \\ &- \int_0^t \int div(e^{2\varphi} u_t \nabla u) dxdt \\ &- \int_0^t \int \frac{e^{2\varphi}}{\varphi_t} |\varphi_t \nabla u - u_t \nabla\varphi|^2 dxdt\end{aligned}$$

Observamos que:

i. Sabemos que

$$\int_0^t \int div(e^{2\varphi} u_t \nabla u) dxdt = 0,$$

e

$$-\int_0^t \int \frac{e^{2\varphi}}{\varphi_t} |\varphi_t \nabla u - u_t \nabla\varphi|^2 dxdt \geq 0.$$

ii. Por Fubini, verificamos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2\varphi}}{2}(|u_t|^2 + |\nabla u|^2) - \frac{e^{2\varphi}}{p+1}|u|^{p+1}\right) dxdt \\
&= \int \int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2\varphi}}{2}(|u_t|^2 + |\nabla u|^2) - \frac{e^{2\varphi}}{p+1}|u|^{p+1}\right) dtdx \\
&= \frac{1}{2}\|e^{\varphi} Du(t,\cdot)\|^2 - \frac{1}{2}\|e^{\varphi(0,\cdot)} Du(0,\cdot)\|^2 - \int_0^t \int \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2\varphi}}{p+1}|u|^{p+1}\right) dxdt.
\end{aligned}$$

Portanto, usando (i) e (ii), concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|e^{\varphi} Du(t,\cdot)\|^2 - \frac{1}{2}\|e^{\varphi(0,\cdot)} Du(0,\cdot)\|^2 - \int_0^t \int \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2\varphi}}{p+1}|u|^{p+1}\right) dxdt \\
\leq \frac{-2}{p+1}\int_0^t \int \varphi_t e^{2\varphi}|u|^{p+1} dxdt. \qquad (3.67)
\end{aligned}$$

Como $u(0,x) = \epsilon u_0 \quad e \quad u_t(0,x) = \epsilon u_1$, com $supp\ u_0,\, u_1 \subset B(K)$ verificamos que:

1.

$$\begin{aligned}
\|e^{\varphi(0,\cdot)} Du(0,\cdot)\|^2 &= \epsilon^2 \int e^{\varphi(0,x)}(|u_0|^2 + |\nabla u_1|^2) dx \\
&\leq \epsilon^2 \int_{B(K)} \sup_{B(K)} \left\{ e^{\varphi(0,x)}(|u_0|^2 + |\nabla U_1|^2) \right\} dx \leq C\epsilon^2
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2\varphi(t,x)}}{p+1}|u|^{p+1}\right) dxdt = \int \left(\frac{e^{2\varphi(t,x)}}{p+1}|u(t,x)|^{p+1}\right) dx - \\
&\int \left(\frac{e^{2\varphi(0,x)}}{p+1}|u(0,x)|^{p+1}\right) dx \leq \int \left(\frac{e^{2\varphi(t,x)}}{p+1}|u(t,x)|^{p+1}\right) dx + C\epsilon^{p+1} = \\
&\|e^{2/p+1\varphi(t,\cdot)} u(\tau,\cdot)\|_{\mathbb{L}^{p+1}}^{p+1} + C\epsilon^{p+1}.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int \varphi_t(\tau,x) e^{2\varphi(\tau,x)}|u(t,x)|^{p+1} dxdt &\leq \int_0^t \int |\varphi_t(\tau,x)| e^{2\varphi(t,x)}|u(t,x)|^{p+1} dxdt \\
&\leq \int_0^t \left(\max_{supp(u(\tau,\cdot))} \psi(\tau,x)\right) \|e^{\gamma\varphi(\tau,\cdot)} u(\tau,x)\|_{\mathbb{L}^{p+1}}^{p+1} d\tau
\end{aligned}$$

em que $\psi(\tau,x) = |\varphi_t(\tau,x)| e^{(2-\gamma(p+1))\varphi(\tau,x)}$, $\gamma > \dfrac{2}{(p+1)}$.

Então usando 1,2 e 3 obtemos,

$$\|e^{\varphi(\tau,\cdot)}Du(t,\cdot)\|^2_{\mathbb{L}^2} \leq C\epsilon + C\|e^{(2/p+1)\varphi(t,\cdot)}u(\tau,\cdot)\|^{p+1}_{\mathbb{L}^{p+1}} \tag{3.68}$$

$$+ C\int_0^t \left(\max_{supp(u(\tau,\cdot))} \psi(\tau,x)\right) \|e^{\gamma\varphi(\tau,\cdot)}u(\tau,x)\|^{p+1}_{\mathbb{L}^{p+1}} d\tau \tag{3.69}$$

Para terminarmos a demonstração, basta provarmos que

$$\max_{suppu(\tau,\cdot)} \{\psi(\tau,x)\} \leq \frac{C}{\tau+1} \tag{3.70}$$

pois,

$$\begin{aligned}\int_0^t \left(\max_{suppu(\tau,\cdot)} \psi(\tau,x)\right) \|e^{\gamma\varphi(\tau,\cdot)}u(\tau,x)\|^{p+1}_{\mathbb{L}^{p+1}} d\tau &\leq \int_0^t \frac{C}{\tau+1}\|e^{\gamma\varphi(\tau,\cdot)}u(\tau,x)\|^{p+1}_{\mathbb{L}^{p+1}} d\tau \\ &\leq \max_{[0,t]}\{\|e^{\gamma\varphi(\tau,\cdot)}u(\tau,x)\|^{p+1}_{\mathbb{L}^{p+1}}\} \int_0^t \frac{C}{\tau+1} d\tau \\ &\leq \max_{[0,t]}\{\ln(\tau+1)\|e^{\gamma\varphi(\tau,\cdot)}u(\tau,x)\|^{p+1}_{\mathbb{L}^{p+1}}\}\end{aligned}$$

Observação 13. *Dado $\delta > 0$, existe $C_\delta > 0$ e de modo que*

$$\ln(\tau+1) \leq C_\delta(\tau+1)^\delta.$$

De fato, dado $\delta > 0$, consideremos a função

$$f(s) = \ln(s) - C(s+1)^\delta. \tag{3.71}$$

Assim, basta mostrar que $f(s) \leq 0$, $\forall s \geq 0$. Observemos que

1. $f(0) = -C$;
2. $f'(s) = \dfrac{1}{s+1} - C\delta(s+1)^{\delta-1}$.

Impondo que $f'(s) \leq 0$, devemos tomar $C \geq \dfrac{1}{\delta}$. Portanto, pela observação (13), concluímos que

$$\int_0^t \left(\max_{suppu(\tau,\cdot)} \psi(\tau,x)\right) \|e^{\gamma\varphi(\tau,\cdot)}u(\tau,x)\|^{p+1}_{\mathbb{L}^{p+1}} d\tau \leq C_\delta \max_{[0,t]}\{(\tau+1)^\delta\|e^{\gamma\varphi(\tau,\cdot)}u(\tau,x)\|^{p+1}_{\mathbb{L}^{p+1}}\}. \tag{3.72}$$

Logo, chegamos a

$$\begin{aligned}\|e^{\varphi(\tau,\cdot)}Du(t,\cdot)\|^2_{\mathbb{L}^2} &\leq C\epsilon + C\|e^{(2/p+1)\varphi(t,\cdot)}u(\tau,\cdot)\|^{p+1}_{\mathbb{L}^{p+1}} \\ &+ C\max_{[0,t]}\{(\tau+1)^\delta\|e^{\gamma\varphi(\tau,\cdot)}u(\tau,x)\|^{p+1}_{\mathbb{L}^{p+1}}\},\end{aligned}$$

e assim,
$$\|e^{\varphi(\tau,\cdot)}Du(t,\cdot)\|_{\mathbb{L}^2} \leq C\epsilon + C\max_{[0,t]}\{(\tau+1)^{\delta}\|e^{\gamma\varphi(\tau,\cdot)}u(\tau,x)\|_{\mathbb{L}^{p+1}}^{\frac{p+1}{2}}\}.$$

Vamos demonstrar (3.70). Sabemos que

$$|\varphi_t| = \frac{1}{2}\left|\frac{((t+K)^2-|x|^2)^{\frac{1}{2}}-t+K}{((t+K)^2-|x|^2)^{\frac{1}{2}}}\right|, \tag{3.73}$$

para $|x| < t+K$.

Observação 14. *Escrevendo $\alpha = (t+K)$ e $r = |x|^2$, consideremos a função*

$$f(r) = 2Cr^2 - \alpha^2 + \alpha(\alpha^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}$$

com $0 \leq r \leq \alpha$. Então, existe $C > 0$ tal que $f(r) \geq 0$, se $0 \leq r < \alpha$. A demonstração é análoga à feita na Observação 13.

Portanto, concluímos, da Observação 14, que

$$|\varphi_t(\tau,x)| \leq \left|\frac{C|x|^2}{(t+K)[(t+K)^2-|x|^2]^{\frac{1}{2}}}\right|. \tag{3.74}$$

É conhecido que as soluções da equação (3.1) com dados iniciais (3.2) satisfazem a propriedade da velocidade de propagação finita. Ou seja, como $supp(u_0), supp(u_1) \subset B(K-d)$, $suppu(t,\cdot) \subset B(t+K-d)$ em que $d =$distância$(supp(u_0)\bigcup supp(u_1))$. Assim,

$$\begin{aligned}
|\varphi_t(t,x)| &= \frac{1}{2}\left|\frac{((t+K)^2-|x|^2)^{\frac{1}{2}}-t+K}{((t+K)^2-|x|^2)^{\frac{1}{2}}}\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left|\frac{t+K}{((|x|+d)^2-|x|^2)^{\frac{1}{2}}}\right| \\
&\leq \frac{C(t+K)}{d}
\end{aligned}$$

portanto,

$$|\varphi_t(t,x)| \leq \frac{C(t+K)}{d}. \tag{3.75}$$

Logo, se $|x| \leq \dfrac{(\tau+K)}{2}$ e utilizando (3.14) e (3.74), temos

$$\begin{aligned}
\psi(\tau,x) &= |\varphi_\tau(\tau,x)|e^{(2-\gamma(p+1))\varphi(\tau,x)}| \\
&\leq \left|\frac{C|x|^2}{(\tau+K)[(\tau+k)^2-|x|^2]^{\frac{1}{2}}}\right| e^{(2-\gamma(p+1))(|x|^2/[4(\tau+K)])} \\
&\leq \frac{C|x|^2}{(\tau+K)4(\tau+k)} e^{(2-\gamma(p+1))(|x|^2/[4(\tau+K)])}.
\end{aligned}$$

Como $\gamma > \dfrac{2}{p+1}$, verifica-se facilmente que

$$\frac{|x|^2}{4(\tau+k)} e^{(2-\gamma(p+1))(|x|^2/[4(\tau+K)])} \leq C.$$

Então,

$$\psi(\tau,x) \leq \frac{C_k}{(\tau+K)}. \tag{3.76}$$

Agora, se $|x| > \dfrac{(\tau+K)}{2}$ e usando **(3.14)** resulta que

$$\varphi(\tau,x) \geq \frac{|x|^2}{4(\tau+K)} \geq \frac{(\tau+k)^2}{16(\tau+K)} = \frac{(\tau+K)}{16}.$$

Como $\gamma > \dfrac{2}{p+1}$, constatamos que existe $C > 0$ tal que

$$(\tau+k)^2 e^{(2-\gamma(p+1)(t+K)/16)} \leq C.$$

Assim obtemos, de (3.75), que

$$\begin{aligned}
\psi(\tau,x) = |\varphi_t(\tau,x)|e^{(2-\gamma(p+1)\varphi(\tau,x)} &\leq \frac{C(t+K)}{d} e^{(2-\gamma(p+1)(\tau+K)/16)} \\
&\leq \frac{C_d}{(\tau+K)}(\tau+K)^2 e^{(2-\gamma(p+1)(\tau+K)/16)} \leq \frac{C_{K,d}}{(\tau+K)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\psi(\tau,x) \leq \frac{C_{K,d}}{(\tau+K)}, \tag{3.77}$$

e, dos resultados dados por (3.76) e (3.77), concluimos (3.70), o que completa a demonstração.

$\square$

3.4 Demonstração dos Teoremas (9) e (10).

3.4.1 Demonstração do Teorema (9)

Iniciaremos a demonstração do **Teorema (9)**. Faremos uso da Proposição 17 para a existência global e unicidade de soluções do problema (3.1)-(3.2), ou seja, mostraremos que a energia é limitada para qualquer intervalo limitado para o tempo $t \geq 0$.

Demonstração. :

Consideramos o funcional de energia com peso

$$W(t) = \|e^{\varphi(t,\cdot)} Du(t,\cdot)\|_{\mathbb{L}^2} + (1+t)^{n/4+1/2}\|Du(t,\cdot)\|_{\mathbb{L}^2}, \tag{3.78}$$

em que a função peso $(1+t)^{n/4+1/2}$ indica a propriedade de decaimento da equação linear.

Mostrarenos que $W(t) \leq K$ para alguma constante K, com K dependendo dos dados iniciais. Das Proposições 12 e 13, constatamos que

$$\begin{aligned} W(t) \leq C\epsilon \quad + & \quad C(\max\nolimits_{[0,t]}(\tau+1)^{\beta}\|e^{\delta\varphi(\tau,\cdot)}u(\tau,\cdot)\|_{\mathbb{L}^{2p}})^{p} \\ + & \quad C(\max\nolimits_{[0,t]}(\tau+1)^{\delta}\|e^{\gamma\varphi(\tau,\cdot)}u(\tau,\cdot)\|_{p+1})^{(p+1)/2}. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Usaremos a Proposição 14 para estimar o lado direito da desigualde (3.79). Observamos que como $p_c(n) < p \leq \frac{n}{(n-2)}$, temos

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta(2p) &= n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}\right) \leq n\left(\frac{1}{2} - \frac{n-2}{2n}\right) = n\frac{2}{2n} = 1 \\ 0 \leq \theta(p+1) &= n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \leq n\left(\frac{1}{2} - \frac{n-2}{2(n-1)}\right) = n\frac{2}{2(n-1)} \leq 1. \end{aligned}$$

Assim, aplicando a Proposição (14), obtemos

$$\begin{aligned} \|e^{\delta\varphi(\tau,\cdot)}u(\tau,\cdot)\|_{\mathbb{L}^{2p}} &\leq C_k(\tau+1)^{(1-\theta(2p))/2}\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^{1-\delta}\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^{\delta} \\ &\leq C_k(\tau+1)^{(1-\theta(2p))/2}(\tau+1)^{(-n/4-1/2)(1-\delta)} \\ &\quad (\tau+1)^{(n/4+1/2)(1-\delta)}\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^{1-\delta}\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^{\delta} \\ &\leq C_k(\tau+1)^{(1-\theta(2p))/2}(\tau+1)^{(-n/4-1/2)(1-\delta)}W(t)^{1-\delta}W(t)^{\delta} \\ &= C_k(\tau+1)^{(1-\theta(2p))/2-(n/4+1/2)(1-\delta)}W(t). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|e^{\delta\varphi(\tau,\cdot)}u(\tau,\cdot)\|_{\mathbb{L}^{2p}} \leq C_k(\tau+1)^{(1-\theta(2p))/2-(n/4+1/2)(1-\delta)}W(t). \tag{3.80}$$

Analogamente, obtemos também que

$$\|e^{\gamma\varphi(\tau,\cdot)}u(\tau,\cdot)\|_{\mathbb{L}^{2p}} \leq C_k(\tau+1)^{(1-\theta(p+1))/2-(n/4+1/2)(1-\gamma)}W(t). \tag{3.81}$$

Logo, utilizando (3.79),(3.80) e (3.81), concluímos que

$$\begin{aligned} W(t) &\leq C\epsilon + C\max_{[0,t]}(\tau+1)^{p\beta+p(1-\theta(2p))/2-p(n/4+1/2)(1-\delta)}(W(t))^p \\ &+ C\max_{[0,t]}(\tau+1)^{(p+1)\beta+(p+1)(1-\theta(p+1))/2-(p+1)(n/4+1/2)(1-\gamma)} \times (W(t))^{(p+1)/2}. \end{aligned} \tag{3.82}$$

Mostramos que pode-se escolher constantes positivas δ, β e γ tais (3.82) é reescrito como

$$\max_{[0,t]} W(s) \leq C\epsilon + C(\max_{[0,t]} W(s))^{(p+1)/2} + C(\max_{[0,t]} W(s))^p. \tag{3.83}$$

Observemos que dessa desigualdade podemos concluir que

$$W(t) \leq K = K(p, \epsilon_0, C) \tag{3.84}$$

com $K \leq C\epsilon$. Com efeito, considere a função

$$F(x) = C\epsilon + Cx^{\frac{p+1}{2}} + Cx^p - x. \tag{3.85}$$

Notemos que $F(0) = C\epsilon \geq 0$ e, para algum $\delta > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon \leq \delta$ existe $x_0 > 0$ tal que $F(x_0) < 0$. Assim, podemos tomar $0 < \epsilon_0 < \delta$, de forma que $0 < x \leq x_p < x_0$ e $F(x) \geq 0$, se $\epsilon \leq \epsilon_0$.

Agora, fazendo $x = \max_{[0,t]} W(s)$ temos de (3.83) e (3.85), que $F(\max_{[0,t]} W(s)) \geq 0$. Portanto, constatamos que $\max_{[0,t]} W(s) \leq x_p$, isto é, $W(t) \leq K$. Logo, se provarmos (3.83), estará concluída a demonstração do Teorema 9.

Recordemos que $p > 1 + \dfrac{2}{n}$, $\beta > \dfrac{n}{4} + \dfrac{1}{p}$ e $\gamma > \dfrac{2}{p+1}$.

Então existem ϵ_1 e ϵ_2 positivos tais que

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{n}{4} + \frac{1}{p} + \epsilon_1 \\ \gamma &= \frac{2}{p+1} + \epsilon_2. \end{aligned}$$

Logo, para o expoente do primeiro termo do lado direito de (3.82), deduzimos que

$$p\beta + p\frac{1}{2} - p\frac{\theta(2p)}{2} - p\frac{n}{4} + p\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{4}\right)\delta \tag{3.86}$$

$$= p\left[\epsilon_1 + \frac{1}{p} + \frac{n}{2p} - \frac{n}{2} + \left(\frac{1}{2}+\frac{n}{4}\right)\delta\right] \tag{3.87}$$

$$= p\left[\epsilon_1 + \left(\frac{1}{2}+\frac{n}{4}\right)\delta\right] - \left(p - 1 - \frac{2}{n}\right)\frac{n}{2}, \tag{3.88}$$

como $p > 1 + \dfrac{2}{n}$, podemos escolher δ e ϵ_1 de forma que (3.88) seja negativo.

Agora, para o segundo termo do lado direito de (3.82), temos

$$(p+1)\left[\frac{\delta}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\theta(p+1)}{4} - \frac{1}{2} - \frac{n}{4} + \left(\frac{1}{2}+\frac{n}{4}\right)\gamma\right] \tag{3.89}$$

$$\leq (p+1)\left[\frac{\epsilon_2}{2} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}+\frac{n}{4}\right)\gamma\right] \tag{3.90}$$

$$= (p+1)\left[\frac{\epsilon_2}{2} + \left(\frac{1}{2}+\frac{n}{4}\right)\gamma\right] - \left[\frac{(p+1)(n+1)}{4} - 1\right], \tag{3.91}$$

assim, como $p > 1$, podemos escolher γ e ϵ_2 de forma que (3.91) seja negativo. Isso verifica (3.83).

Agora, denotando $M(t) = \max\limits_{[0,t]} W(t)$, segue de (3.83) que $M(t) \leq K = K(p, \epsilon_0, C)$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno chegamos na seguinte estimativa:

$$W(t) = \|e^{\varphi(t,\cdot)}Du(t,\cdot)\|_{\mathbb{L}^2} + (1+t)^{n/4+1/2}\|Du(t,\cdot)\|_{\mathbb{L}^2} \leq K. \tag{3.92}$$

□

3.4.2 Demonstração do Teorema (10)

A demonstração do Teorema 10 é conseqüência direta da desigualdade (3.92), como vemos abaixo:

Demonstração. : Usando (3.92), observamos que

$$\begin{aligned} K &\geq \|e^{\varphi(t,\cdot)}Du(t,\cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\geq \|e^{|x|^2/4(t+k)}Du(t,\cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n\setminus B(t^{1/2+\delta}))} \\ &\geq e^{t^{1+2\delta}/4(t+k)}\|Du(t,\cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n\setminus B(t^{1/2+\delta}))}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\|Du(t,\cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n \setminus B(t^{1/2+\delta}))} \leq Ke^{-t^{1+2\delta}}. \tag{3.93}$$

Analogamente:

$$\|Du(t,\cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)} \leq K(1+t)^{-n/4-1/2}. \tag{3.94}$$

Isso conclui a demonstração. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] R. A. Adams, *Sobolev spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[2] S. Agmon, H. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II.* Comm. Pure Appl. Math. 17 (1964), 35–92.

[3] J. M. Ball, *Strngly continuous semigrups, weak solutions, and the variation of the constant formula*, Proc. AMS 63 (1977), n^o 2, 370–373.

[4] H. Brezis, T. Cazenave, *Nonlinear evolution equations.* 1994.

[5] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle: theórie et applications.* Masson, Paris, 1983.

[6] R. C. Charão, R. Ikehata, *Decay of solutions for a semilinear system of elastic waves in an exterior domain with damping near infinity*, Nonlinear Analysis 67 (2007), 398–429.

[7] W. Dan, Y. Shibata, *On a local energy decay of solutions of a dissipative wave equation*, Funkcial. Ekvac. 38 (1995), 545–568.

[8] H. Fujita, *On the blowing up of solutions the Cauchy problem for* $u_t = \triangle u + u^{1\alpha}$, J. Fac Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 13 (1990), 109–124.

[9] J. A. Goldstein, *Semigroups of linear operators and applications.* Oxford Mathematical Monographs, Copyright, New York, 1985.

[10] A. M. Gomes, *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução.* Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1985.

[11] C. W. Groetsch, *Elements of applicable functional analysis.* Marcel Dekker, New York and Basel, 1983.

[12] R. Ikehata, *Fast decay of solutions for linear wave equations with dissipation localized near infinity in an exterior domain*, J. Differential Equations 188 (2003), 390–405.

[13] R. Ikehata, *Local energy decay for linear wave equations with non-compactly supported initial data*, Math. Meth. Appl. Sci. 27 (2004), 1881–1892.

[14] R. Ikehata, *Global existence of solutions for 2-D semilinear wave equations with dissipation localized near infinity in an exterior domain*, Math. Meth. Appl. Sci. 29 (2006), 479–496.

[15] R. Ikehata, Y. Inoue, *Total energy decay for semilinear wave equations with a critical potential type of damping*, Nonlinear Analysis (in press).

[16] R. Ikehata, K. Tanizawa, *Global existence of solutions for semilinear damped wave equations in $\mathbb{R}^n$ with non-compactly supported initial data*, Nonlinear Analysis 61 (2005), 1189–1208.

[17] R. Kanwal, *Generalized functions: theory and technique*, Academic Press, New York, 1983.

[18] S. Kesavan, *Topics in functional analysis and applications.* Copyright, Bangalore, India, 1989.

[19] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications.* John Wiley e Sons, 1978.

[20] A. Matsumura, *On the Asymptotic Behavior of Solutions of Semi-linear Wave Equations.* Publ. Res. Institute Math. Sciences Kyoto University, 12 (1976), 169–189.

[21] L. A. Medeiros, P. H. Rivera, *Espaços de Sobolev e aplicações às equações diferenciais parciais.* Textos de Métodos Matemáticos número 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro.

[22] L. Menoncini, *Existência e unicidade de soluções globais de equações de evolução semilineares via semigrupos.* Dissertação de Mestrado. Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, Universidade Federal de Santa Catarina, 2005.

[23] M. Nakao, *Energy decay for the linear and semilinear equations in exterior domains with some localized dissipations,* Math. Z. 238 (2001), 781–797.

[24] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[25] M. Reed, B. Simon, *Methods of Moder Mathematical Physics, vol. II: Fourier Analysis and Self-adjointness*, Academic Press, New York, 1975.

[26] G. Todorova, B. Yordanov, *Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping*, J. Diff. Eqns 174 (2001), 464–489.

[27] G. Todorova, B. Yordanov, *Nonlinear dissipative wave equations with potential*, AMS Contemporary Math. 426 (2007), 317–337.

[28] G. Todorova, B. Yordanov, *Weighted L^2-estimates for dissipative wave equations with variable coefficients*, J. Diff. Eqs. (to appear).

[29] K. Yosida, *Functional analysis*. Springer-Verlag, Berlim-Heildelberg, New York, 1966.

[30] E. Zuazua, *Exponential decay for the semilinear wave equation with localized damping in unbounded domains*, J. Math. Pures Appl. 70 (1991) 513–529.