UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

MTM510054 Geometria Riemanniana
PRÉ-REQUISITO: Variedades Diferenciáveis
Nº DE HORAS/AULA SEMANAIS: 06

EMENTA: Métricas Riemannianas. Conexão de Levi-Civita. Geodésicas. Aplicação Exponencial. Vizinhanças Normais e Convexas. Derivação Covariante de Tensores. Tensor de Curvatura. Campos de Jacobi. 1ª e 2ª Variação dos Funcionais Comprimento e Energia. Pontos Conjugados. Teorema de Bonnet-Myers. Imersões isométricas: equações de Gauss e Codazzi. Variedades Riemannianas completas: Teorema de Hopf-Rinow e Teorema de Hadamard. Espaços de curvatura constante. Teoremas de comparação para Curvaturas Seccional e de Ricci.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:
1- Propiciar ao estudante uma introdução às ideias básicas da Geometria Riemanniana.
2- Permitir que o estudante aprecie a relação entre aspectos locais e globais da Geometria das Variedades.
3- Propiciar ao estudante uma base mínima para entender resultados geométricos mais avançados.

PROGRAMA:

1- GEOMETRIA RIEMANNIANA LOCAL [1,3,4]
1.1 – Métrica Riemanniana: Definição e exemplos.
1.2 - Tensores e Derivada Covariante.
1.3 - Derivada Covariante em Curvas e Transporte Paralelo. Geodésicas.
1.4 – O Tensor de Curvatura e suas simetrias. Curvatura Seccional e de Ricci.
1.5 – O Fibrado Tangente e a Aplicação Exponencial.
1.6 - Vizinhanças Normais e Convexas.

2 – PROPRIEDADES VARIACIONAIS DAS GEODÉSICAS [1,3,4]
2.1 -Propriedades Minimizantes das Geodésicas.
2.2- Primeira e Segunda Variação do Comprimento de Arco e da Energia.
2.3- Campos de Jacobi.
2.4- Relação entre Geodésicas e Curvatura: Pontos Conjugados.
2.5- Elementos de Espaços de Recobrimento e Grupo Fundamental.
2.6 –O Teorema de Bonnet-Myers.

3- VARIEDADES COMPLETAS [1,3,4]
3.1- Variedades Completas. O Teorema de Hopf-Rinow.

3.2- O Teorema de Hadamard

4- GEOMETRIA DE SUBVARIEDADES [1,3,4]
4.1 – Imersões Isométricas: Definição e exemplos.
4.2 – A Conexão Induzida. Segunda Forma Fundamental.
4.3 – A Equação de Gauss
4.4 – Geodésicas em subvariedades. Subvariedades totalmente geodésicas.
4.5 – A Conexão Normal. A Equação de Codazzi.

5 – TEOREMAS DE COMPARAÇÃO [2,4]
5.1 – Variedades de Curvatura Seccional Constante.
5.2 – Função distância: Equações de comparação para a Hessiana, Laplaciano e Volume.
5.3 – O Teorema de Comparação de Volume de Bishop-Cheeger-Gromov.
5.4 – Aplicação: o Teorema de Cheng da Rigidez de Diâmetro Maximal.
5.5 - O Cut Locus. Estimativas básicas do Raio de Injetividade
5.6 – O Teorema do triângulo de Toponogov.
5.7 – Aplicação: o Teorema da Esfera.

BIBLIOGRAFIA:
[1] Do CARMO, M. P.- Geometria Riemanniana, Rio de Janeiro, IMPA, Projeto Euclides, 1979.
[2] CHEEGER, J., EBIN, D. - Comparison Theorems in Riemannian Geometry, Amsterdam, North-Holland, 1975.
[3] O'NEILL, B. - Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity, New York, Academic Press, 1983.
[4] PETERSEN, P. - Riemannian Geometry, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2006.