



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA**

**MTM510051 Álgebras de Von Neumann**

**PRÉ-REQUISITOS:** MTM510011 Álgebras de Operadores

**Nº DE HORAS/AULA SEMANAIS:** 06

**EMENTA** – Topologias em álgebras de operadores, o teorema do duplo comutante, fatores e sua classificação via projeções, teoria de Tomita-Takesaki, fatores de tipo III, produtos cruzados.

**OBJETIVO:** Fornecer ao aluno ferramentas e exemplos clássicos da teoria de Álgebras de von Neumann.

**PROGRAMA DETALHADO:**

**I. Introdução.**

- I.1. Operadores em espaços de Hilbert
- I.2. Topologias localmente convexas em  $B(H)$
- I.3. O pré-dual
  - I.4. O teorema do duplo comutante
  - I.5.

**II. Classificação de fatores**

- II.1. Equivalência de Murray-von Neumann
- II.2 Projeções finitas
  - II.3. A função dimensão
  - II.4.

**III. Teoria de Tomita-Takesaki**

- III.1. Integração não-comutativa
- III.2. A construção GNS
- III.3. O teorema de Tomita-Takesaki (para estados)
- III.4. Pesos e álgebras de Hilbert generalizadas
- III.5. A condição KMS
- III.6. O teorema de Radon-Nikodym não comutativo e esperanças condicionais

**IV. A classificação de fatores de tipo III**

- IV.1. O teorema do cociclo unitário
- IV.2. O espectro de Arveson de uma ação
- IV.3. O espectro de Connes de uma ação
- IV.3. Descrições alternativas de  $\Gamma(M)$

**V. Produtos cruzados**

- V.1. Produtos cruzados discretos
- V.2. O operador modular para um produto cruzado discreto
- V.3. Exemplos de fatores
- V.4. Produtos cruzados contínuos e o teorema da dualidade de Takesaki

## V.5. A estrutura de álgebras de von Neumann propriamente infinitas

### **BIBLIOGRAFIA**

#### **Livro Texto:**

Sunder, V. S. *An invitation to von Neumann algebras*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1987.

#### **Bibliografia complementar:**

1. Alfsen, E. M.; Shultz, F. W. *State spaces of operator algebras. Basic theory, orientations, and C\*-products*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001.
2. Arveson, W. *An invitation to C\*-algebras*. Graduate Texts in Mathematics, No. 39. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.
3. Connes, Alain. *Noncommutative geometry*. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994.
4. Dixmier, J. *von Neumann algebras*. North-Holland Mathematical Library, 27. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1981.
5. Kadison, R. V.; Ringrose, J. R. *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. II. Advanced theory*. Graduate Studies in Mathematics, 16. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
6. Sakai, S. *C\*-algebras and W\*-algebras*. Reprint of the 1971 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
7. Takesaki, M. *Theory of operator algebras. I*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 124. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 5. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
8. Takesaki, M. *Theory of operator algebras. II*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 125. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 6. Springer-Verlag, Berlin, 2003.