



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA**

**MTM510017 K-Teoria para  $C^*$ -Álgebras**

**PRÉ-REQUISITOS:** Álgebras de Operadores

**Nº DE HORAS/AULA SEMANAIS:** 06

**EMENTA** – Funtores  $K_0$  e  $K_1$ , Classificação das AF-álgebras, Aplicação Índice, Periodicidade de Bott, Sequência Exata dos Seis Termos.

**OBJETIVO:** Fornecer ao aluno as definições básicas e as principais propriedades dos grupos de  $K$ -teoria das  $C^*$ -álgebras.

**PROGRAMA DETALHADO:**

I. Revisão da Teoria de  $C^*$ -álgebras.

I.1.  $C^*$ -álgebras,  $*$ -homomorfismos, Sub- $C^*$ -álgebras, Ideais e Quocientes.

I.2. Projeções, Isometrias, Isometrias Parciais; Elementos Invertíveis, Normais, Auto-adjuntos, Unitários e Positivos.

I.3. Representação de Gelfand, Representação de Gelfand-Naimark, Cálculo Funcional Contínuo, Teorema Espectral.

I.4. Unitização, Sequências Exatas de  $C^*$ -álgebras, Álgebras de Matrizes.

I.5.  $C^*$ -álgebras de Dimensão Finita, Limite Indutivo (Direto), AF-álgebras, UHF-álgebras, Produto Tensorial, Estabilização.

II. Funtor  $K_0$ .

II.1. Relações de Equivalência entre Projeções.

II.1.1. Equivalência Homotópica.

II.1.2. Equivalência Unitária.

II.1.3. Equivalência de Murray-von Neumann.

II.2. Grupo  $K_0$ .

II.2.1. Semigrupo  $P_\infty(A)$ .

II.2.2. Relação de Equivalência em  $P_\infty(A)$ .

II.2.3. Semigrupo  $D(A)$ .

II.2.4. Grupo de Grothendieck.

II.2.5.  $K_0$  de uma  $C^*$ -álgebra Unital.

II.2.6.  $K_0$  de uma  $C^*$ -álgebra.

II.3. Funtor  $K_0$ .

II.3.1. Funtorialidade de  $K_0$ .

II.3.2. Semi-exatidão de  $K_0$ .

II.3.3. Exatidão de  $K_0$  sob Cisão.

II.3.4. Continuidade de  $K_0$ .

II.3.5. Estabilidade de  $K_0$ .

II.4. Classificação das AF-álgebras.

II.4.1. Cone Positivo de  $K_0$ .

II.4.2. Diagramas de Bratteli.

- II.4.3. *Dimension Groups*.
- II.4.4. Teorema de Elliott.
- II.4.5. Classificação das UHF-álgebras.

### III. Funtor $K_1$ .

III.1. Equivalência Homotópica entre Unitários.

III.2. Grupo  $K_1$ .

III.2.1. Semigrupo  $U_\infty(A)$ .

III.2.2. Grupo  $K_1$  de uma  $C^*$ -álgebra.

III.3. Funtor  $K_1$ .

III.3.1. Funtorialidade de  $K_1$ .

III.3.2. Semi-exatidão de  $K_1$ .

III.3.3. Exatidão de  $K_1$  sob Cisão.

III.3.4. Continuidade de  $K_1$ .

III.3.5. Estabilidade de  $K_1$ .

III.4. Grupo  $K_1$  e Determinantes.

### IV. Sequência Exata dos Seis Termos

IV.1 Aplicação Índice.

IV.2. Suspensões.

IV.3.  $K$ -funtores de Ordem Elevada.

IV.3. Isomorfismo entre  $K_1(A)$  e  $K_0(SA)$ .

IV.4 Sequência Exata Longa.

IV.5. Periodicidade de Bott.

IV.6. Aplicação Exponencial.

IV.7. Sequência Exata dos Seis Termos.

IV.8. Cálculo de Grupos de  $K$ -teoria Usando a Sequência Exata dos Seis Termos.

### **BIBLIOGRAFIA:**

#### **Livro Texto:**

1.M. Rordam, F. Larsen, N. J. Lausten - *An Introduction to K-Theory for  $C^*$ -Algebras*. Cambridge University Press, 2000.

#### **Bibliografia complementar:**

1.N. E. Wegge-Olsen – *K-Theory And  $C^*$ -Algebras – A Friendly Approach*. Oxford University Press, 1993.

2.B. Blackadar – *K-Theory for Operator Algebras*. Cambridge University Press, Second Edition, 1998.